Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. О. Бурлаков, Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, Н. П. Пучков, О непрерывных и разрывных моделях нейронных полей, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 165, 10–20

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-165-10-20>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 13:18:08

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 165 (2019). С. 10–20
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-165-10-20

УДК 517.988, 517.968

О НЕПРЕРЫВНЫХ И РАЗРЫВНЫХ МОДЕЛЯХ НЕЙРОННЫХ ПОЛЕЙ

© 2019 г. Е. О. БУРЛАКОВ, Т. В. ЖУКОВСКАЯ,
Е. С. ЖУКОВСКИЙ, Н. П. ПУЧКОВ

Аннотация. Статья посвящена исследованиям в математической нейробиологии, целью которых являлось установление связи между подходами к моделированию нейронных полей, основанными на непрерывных и разрывных моделирующих уравнениях. Приводится обзор работ по данной тематике и предлагается новый аппарат решения подобных задач, основанный на абстрактных включениях Вольтерры и позволяющий обобщить ряд полученных ранее результатов.

Ключевые слова: математическая модель, нейронное поле, интегральное уравнение, уравнение Гаммерштейна, разрешимость, непрерывная зависимость от параметров.

ON CONTINUOUS AND DISCONTINUOUS MODELS OF NEURAL FIELDS

© 2019 Е. О. BURLAKOV, T. V. ZHUKOVSKAYA,
E. S. ZHUKOVSKIY, N. P. PUCHKOV

ABSTRACT. This paper is devoted to research in mathematical neurobiology whose purpose is the establishment of a connection between approaches to the modeling of neural fields based on continuous and discontinuous equations. We review works on this topic and propose a new method for solving such problems based on Volterra's abstract inclusions, which allows one to generalize some previously obtained results.

Keywords and phrases: mathematical model, neural field, integral equation, Hammerstein equation, solvability, continuous dependence on parameters.

AMS Subject Classification: 47J05, 47H04, 35R09, 45K05, 47H30, 92F99

1. Введение. В течение последних десятилетий существенно возрос интерес к математическим моделям электрической активности коры головного мозга. Первые подобные модели восходят к работам Н. R. Wilson, J. D. Cowan, S. Amari. Дальнейшие исследования в этой области позволили дать математические описания нормального функционирования головного мозга (например, при обработке визуальных стимулов — исследования Н. Sompolinsky и R. Shapley, при управлении движениями — исследования J. S. Taube и J. P. Bassett, при обращении к памяти —

Работа Е. О. Бурлакова выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-41-680975, № 18-31-00227) и фонда развития теоретической физики и математики «Базис» (проект № 18-1-7-37-1).

Работа Е. С. Жуковского выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-01-00553, № 17-41-680975, № 17-51-12064) и Министерства образования и науки Российской Федерации (государственное задание № 3.8515.2017/БЧ)..

исследования J. M. Fuster, G. Alexander, X.-J. Wang), а также математические описания различных нарушений его нормальной активности (например, при болезни Паркинсона — исследования S. J. Schiff, во время приступа эпилепсии — исследования F. H. Lopes Da Silva, P. Taylor).

Наиболее известной моделью, описывающей электрическую активность в коре головного мозга, является так называемая модель Amari (см. [2]):

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = -\alpha u(t, x) + \int_{\Omega} \omega(x - y) f(u(t, y)) dy, \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^m, \quad \alpha > 0. \quad (1)$$

Здесь функция $u(t, x)$ характеризует активность нейрона в позиции x в момент времени t , функции активации $f(u)$ — степень влияния нейрона с активностью u на другие нейроны, функция связи ω — силу взаимодействия между нейронами. Исходя из биофизических оснований, входящие в уравнение (1) функции являются непрерывными, а зачастую даже гладкими: функция f типично имеет сигмоидальную форму, ω — форму гауссовой функции.

Для случая непрерывной функции активации f разрешимость и корректная разрешимость в различных функциональных пространствах модели Amari и ее обобщений были показаны в [3, 4]. Использование в таких моделях разрывной функции типа Хевисайда вместо непрерывной функции f позволяет существенно упростить их численное исследование, а также получить в явном виде многие важные с точки зрения нейробиологии типы решений. «Обоснованием» такой замены обычно служит трактовка функции Хевисайда в качестве предела сигмоидальных функций нарастающей крутизны (т.е. при стремлении к нулю промежутка между «активацией» и «насыщением»). В последние годы появились исследования, дающие строгие обоснования возможности такого перехода (в основном для определенных типов решений уравнения (1)), использующие теории топологической степени, частично упорядоченных пространств, компактность в специальных топологиях и другие методы нелинейного функционального анализа.

Данная работа построена следующим образом. Раздел 2 начинается с введения необходимых обозначений; п. 2.1 содержит описания результатов вышеупомянутых исследований, полученных для стационарных пространственно локализованных решений уравнения (1), отвечающих нормальной функции головного мозга (см. [1]) и, соответственно, занимающих особенно важное место в исследованиях математической нейробиологии. В п. 2.2 освещается исследование близости нестационарных решений уравнения (1) с разрывной и непрерывной функцией активации, а также предлагается метод решения данной задачи для обобщения уравнения (1), учитывающего эффекты памяти и запаздывания, основанный на теории включений Вольтерры. В разделе 3 обсуждаются приведенные результаты и возможные перспективы дальнейших исследований.

2. Основные результаты. Для удобства дальнейшего изложения введем следующие обозначения. Пусть $\mathbb{R}^m$ — m -мерное вещественное векторное пространство с нормой $|\cdot|$. Для любого измеримого по Лебегу множества $D \subset \mathbb{R}^m$ обозначим через $\text{mes}(D)$ его меру Лебега.

Пусть $\mathcal{B}$ — некоторое банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Обозначим через $\text{con}\mathcal{V}(\mathcal{B})$ множество всех непустых выпуклых замкнутых подмножеств $\mathcal{B}$.

Для любых $M \subset \mathcal{B}$, $r > 0$ определим множество

$$B_{\mathcal{B}}(M, r) = \left\{ b \in \mathcal{B}, \quad \|b - m\|_{\mathcal{B}} < r, \quad m \in M \right\}$$

и обозначим через $\overline{M}$ замыкание M в $\mathcal{B}$.

Пусть Ω — замкнутое подмножество $\mathbb{R}^m$, $\Omega_r = \Omega \cap \overline{B_{\mathbb{R}^m}(0, r)}$, $T > 0$. Для любых $r > 0$ и $k = 0, 1, 2, \dots$ обозначим через $C^k(\Omega_r, \mathbb{R}^n)$ пространство всех функций $\xi : \Omega_r \rightarrow \mathbb{R}^n$, непрерывных вместе с первыми k производными $\xi^{(i)}$, $i = 1, \dots, k$, с нормой

$$\|\xi\|_{C^k(\Omega_r, \mathbb{R}^n)} = \sum_{i=0}^k \max_{x \in \Omega_r} |\xi^{(i)}(x)|, \quad \xi^{(0)} = \xi;$$

через $BC(\Omega, \mathbb{R}^n)$ — пространство всех непрерывных ограниченных функций $\zeta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|\zeta\|_{BC(\Omega, \mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \Omega} |\zeta(x)|.$$

Будем использовать стандартное обозначение $C(\Omega_r, \mathbb{R}^n)$ в случае $k = 0$. Обозначим через $L(\Omega, \mathbb{R}^n)$ пространство всех измеримых суммируемых функций $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|\eta\|_{L(\Omega, \mathbb{R}^n)} = \int_{\Omega} |\eta(x)| dx.$$

Пусть $C_0([0, T] \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных функций $\nu : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих в случае неограниченности множества Ω дополнительному условию

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \nu(t, x) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

с нормой

$$\|\nu\|_{C_0([0, T] \times \Omega, \mathbb{R}^n)} = \max_{(t, x) \in [0, T] \times \Omega} |\nu(t, x)|.$$

Обозначим через $C_0([0, \infty) \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ локально выпуклое пространство функций $\hat{\nu} : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих в случае неограниченности множества Ω дополнительному условию

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \hat{\nu}(t, x) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

с топологией равномерной сходимости на множествах вида $[0, T] \times \Omega$, $0 < T < \infty$.

2.1. Стационарные локализованные решения уравнения нейронного поля. В [7] исследовались стационарные пространственно локализованные решения уравнения (1) в случае $\Omega = \mathbb{R}$. Ниже излагаются результаты этой работы.

В случае, если стационарное решение (1) существует, оно удовлетворяет следующему уравнению:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} \omega(x - y) f(u(y)) dy, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Относительно функции связи ω предполагается, что выполнено следующее условие:

$$(\mathbf{A}_{\omega}^1) \quad \omega(x) = \omega(-x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}; \quad \omega \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \text{ существует такое } C > 0, \text{ что } |\omega'(x)| \leq C \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

С учетом замены $r(x, y) = \omega(x - y) + \omega(x + y)$ уравнение (2) принимает вид

$$u(x) = \int_0^{\infty} r(x, y) f(u(y)) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пусть задано $\theta > 0$. Будем говорить, что $U(x)$ — пространственно локализованное стационарное симметричное решение (1) ширины A ($A > 0$), если для некоторого связного множества $\Theta \subset \mathbb{R}$, $\text{mes}(\Theta) = A$, неравенство $U(x) \geq \theta$ выполнено тогда и только тогда, когда $x \in \Theta$.

В случае, если f — функция вида

$$f_0(u) = \begin{cases} 0, & u \leq \theta, \\ 1, & u > \theta, \end{cases} \quad (3)$$

то пространственно локализованное стационарное симметричное решение (1) принимает вид

$$U(x) = \int_{\Theta} \omega(x - y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Учитывая свойство инвариантности уравнения (2) относительно сдвигов (для любого решения $U(x)$ уравнения (2) функция $U(x + \hat{x})$ также является решением (2) при любом $\hat{x} \in \mathbb{R}$), можем записать последнее равенство в виде

$$U(x) = \int_{-A/2}^{A/2} \omega(x - y) dy \quad \text{или} \quad U(x) = \int_0^{A/2} r(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пусть для любого $h > 0$ заданы такая неубывающая функция $\hat{f} \in C(\mathbb{R}, [0, 1])$, что $\hat{f}(u) = 0$, $u \leq \theta$ и $\hat{f}(u) = 1$, $u \geq \theta + h$ и функция $f_h \in C(\mathbb{R}, [0, 1])$,

$$f_h(u) = \begin{cases} 0, & u < \theta + h, \\ 1, & u \geq \theta + h. \end{cases}$$

Для любого $u \in \mathbb{R}$, очевидно, имеем

$$f_h(u) \leq \hat{f}(u) \leq f_0(u).$$

Предположение 2.1. Предположим, что существуют пространственно локализованные стационарные симметричные решения U_0 ширины $2A_0$ и U_h ширины $2A_h$ уравнения (1) при $f = f_0$ и $f = f_h$, соответственно, причем $A_h < A_0$.

Предположение 2.2. Предположим, что при всех $x, y \in [A_h, A_0]$ имеет место неравенство $r(x, y) \geq 0$.

Всюду далее для случая, когда $f = \hat{f}$, рассматриваются пространственно локализованные стационарные симметричные решения $\hat{U}$ уравнения (1), для которых выполнены следующие условия:

$$U_h(x) > h \Rightarrow \hat{U}(x) > \theta + h, \quad U_0(x) < 0 \Rightarrow \hat{U}(x) < \theta.$$

Такие решения $\hat{U}$ при всех $x \in [A_h, A_0]$ удовлетворяют уравнению

$$U(x) = U_h(x) + \int_{A_h}^{A_0} r(x, y) \hat{f}(U(y)) dy \quad (4)$$

и являются элементами конусного отрезка

$$[U_h, U_0] = \{u \in C([A_h, A_0], \mathbb{R}), \quad U_h(x) \leq u(x) \leq U_0(x), \quad x \in [A_h, A_0]\}.$$

При помощи теории монотонных операторов в частично упорядоченных пространствах в [7] получено следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть выполнено условие (A_ω^1) , а также предположения 2.1 и 2.2. Тогда уравнение (4) имеет решение. Кроме того, для итераций $\mathcal{F}^i$ оператора

$$\mathcal{F} : [U_h, U_0] \rightarrow C([A_h, A_0], \mathbb{R}),$$

$$(\mathcal{F}U)(x) = U_h(x) + \int_{A_h}^{A_0} r(x, y) \hat{f}(U(y)) dy, \quad x \in [A_h, A_0],$$

имеют место соотношения

$$\|\mathcal{F}^i U_0 - U^*\|_{C([A_h, A_0], \mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad \|\mathcal{F}^i U_h - U_*\|_{C([A_h, A_0], \mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty,$$

где U_* и U^* — такие решения уравнения (4), что для любого решения $U \in [U_h, U_0]$ уравнения (4) и любого $x \in [A_h, A_0]$ выполнено неравенство $U_*(x) \leq U(x) \leq U^*(x)$.

Следствие 2.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Если $U^* = U_* = \hat{U}$, то $\hat{U}$ является единственным решением уравнения (4) в множестве $[U_h, U_0]$.

На основе данных утверждений авторами работы [7] были предложены два численных метода построения пространственно локализованного стационарного симметричного решения для непрерывной функции активации $f = \hat{f}$: с помощью итераций по ширине такого решения и «прямыми итерациями» (т.е. по схеме теоремы 2.1).

В [7] также был решен вопрос о возможности продолжения решения $\hat{U} \in C([A_h, A_0], \mathbb{R})$ до такого пространственно локализованного стационарного симметричного решения $\hat{U} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, что

$$\begin{aligned} \hat{U}(x) &> \theta + h, & x &\in [0, A_h), \\ \hat{U}(x) &< \theta, & x &\in (A_0, \infty). \end{aligned}$$

Используя теорему 2.1, при дополнительных предположениях можно получить результат о близости исследуемых решений при переходе от разрывной к непрерывной функции активации. Сформулируем соответствующие предположение и утверждение.

Предположение 2.3. Пусть для заданного $\theta > 0$ найдется такое $\hat{h} > 0$, что при любом h , $0 < h \leq \hat{h}$, существуют локализованные стационарные симметричные решения U_0 ширины $2A_0$ и U_h ширины $2A_h$ уравнения (1) при $f = f_0$ и $f = f_h$, соответственно, причем $A_h < A_0$.

Следствие 2.2. Пусть выполнено условие (A_ω^1) , а также предположения 2.2 и 2.3. Тогда уравнение (4) имеет решение $U(x)$. Кроме того, при $h \rightarrow 0$ имеют место соотношения

$$\begin{cases} U_h(x) \leq U(x) \leq U_0(x), \\ U_h(x) \rightarrow U_0(x) \end{cases} \quad \forall x \in [A_{\hat{h}}, A_0].$$

В [8] была показана непрерывная зависимость локализованного стационарного решения (1) (в случае $\Omega = \mathbb{R}$) при переходе от гладкой функции активации к разрывной функции типа Хевисайда. Этот результат был обобщен в [3] на случай m -мерной усредненной модели Amari:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x, x_f)}{\partial t} &= -u(t, x, x_f) + \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} \omega(x - y, x_f - y_f) f(u(t, y)) dy_f dy, \\ t > 0, \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^m, \quad x_f \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^k, \end{aligned} \quad (5)$$

полученной из уравнения (1) путем введения периодической микроструктуры и последующего усреднения (подробнее см. [4] и приведенную там библиографию). В качестве элементарной единицы микроструктуры был выбран k -мерный тор $\mathcal{Y}$. Ниже приводятся результаты статьи [3].

Предположим, что выполнено следующее условие:

$$(A_\omega^2) \quad \omega(\cdot, x_f) \in C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \text{ для любого } x_f \in \mathcal{Y} \text{ и } \omega(x, \cdot) \in L(\mathcal{Y}, \mu, \mathbb{R}) \text{ для любого } x \in \mathbb{R}^m.$$

Пусть для некоторого $\theta > 0$ функция f_0 задана равенством (3); при $i = 1, 2, \dots$ функции семейства $f_i \in C(\mathbb{R}, [0, 1])$ являются неубывающими и удовлетворяют условию

$$\forall \varepsilon > 0, \quad f_i \rightarrow f_0 \text{ равномерно на } (-\infty, \theta - \varepsilon] \cup [\theta + \varepsilon, \infty) \text{ при } i \rightarrow \infty.$$

В случае, если стационарное решение (5) существует и не зависит от переменной микрорвариации x_f , оно удовлетворяет следующему уравнению:

$$u(x) = \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} \omega(x - y, y_f) f(u(y)) dy_f dy, \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

Следуя идеям статьи [8], определим следующий специфический тип решений, который будем далее исследовать.

Для фиксированного $\theta > 0$ будем говорить, что $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ удовлетворяет θ -условию, если

- (\theta 1) множество $\Theta = \{x \in \Omega, \quad u(x) > \theta\}$ непусто и ограничено;
- (\theta 2) для любой точки x , принадлежащей границе $\mathcal{B}$ множества Θ , выполнено неравенство $u'(x) \neq 0$;
- (\theta 3) найдутся такие $\sigma > 0$ и $r > 0$, что $u(x) < \theta - \sigma$ для всех $x \in \Omega \setminus B_{\mathbb{R}^m}(\Theta, r)$.

В предположении, что $\Omega = \mathbb{R}^m$ и для $f = f_0$ существует стационарное решение $U \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ уравнения (6), удовлетворяющее θ -условию, исследуются условия существования стационарных решений U_i уравнений (6) для $f = f_i$, $i = 1, 2, \dots$, (т.е., в случае непрерывных функций активации) и условия сходимости этих решений к U при $i \rightarrow \infty$. Следующая теорема дает условия сходимости вышеописанных решений U_i , $i = 1, 2, \dots$ (при условии, что они существуют) к стационарному решению, отвечающему случаю $f = f_0$.

Теорема 2.2. Пусть выполнено условие (A_ω^2) , задано некоторое число $\theta > 0$ и функция $U \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ удовлетворяет θ -условию. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что если для любого достаточно большого $r > 0$ при $\Omega = \Omega_r$ существуют решения $U_i \in B_{C^1(\Omega_r, \mathbb{R})}(U, \varepsilon)$ уравнения (6)

при $f = f_i$ для всех i , больших некоторого номера $\hat{i}$, то существует решение этого уравнения при $f = f_0$, являющееся предельной точкой множества $\{U_i, i = \hat{i} + 1, \hat{i} + 2, \dots\}$. Более того, если решение (6) при $f = f_0$ и $\Omega = \Omega_r$ (обозначим его U_0) единственно, то

$$\|U_i - U_0\|_{C^1(\Omega_r, \mathbb{R})} \rightarrow 0.$$

Существование стационарных решений U_i уравнения (6) при $i = \hat{i} + 1, \hat{i} + 2, \dots$ установлено в [3] при помощи теории топологической степени. Там же приведены примеры вычисления топологической степени операторов, порожденных частными случаями уравнения (6) для различных симметричных стационарных пространственно локализованных решений (5) в случаях $\Omega = \mathbb{R}$ и $\Omega = \mathbb{R}^2$.

В [6] получены условия существования симметричных стационарных локализованных решений уравнения (1) в случае $\Omega = \mathbb{R}$ и сигмоидальной функции активации, а также предложена схема аппроксимации таких решений соответствующими решениями для случая функции активации типа Хевисайда. Приведем данные результаты.

В случае параметризации функции активации, входящей в (1), некоторым $\lambda \in [0, 1]$, стационарное решение уравнения (1) принимает вид:

$$u(x) = \int_R \omega(x - y) f_\lambda(u(y)) dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (7)$$

Относительно функций, входящих в уравнение (1), предполагается следующее:

($\mathbf{A}_\omega^3$) функция связи $\omega \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ липшицева и

$$\omega(x) = \omega(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

($\mathbf{A}_f^3$) при $\lambda = 0$ функция активации f_0 представлена функцией Хевисайда (3); при любом $\lambda \in (0, 1]$ функция $f_\lambda \in C(\mathbb{R}, [0, 1])$ является неубывающей и липшицевой, $f_\lambda(u) = 0$ для всех $u \in (-\infty, \theta]$, и выполнено следующее условие:

для всех $\varepsilon > 0$ $f_\lambda \rightarrow f_0$ равномерно на $(-\infty, \theta - \varepsilon] \cup [\theta + \varepsilon, \infty)$ при $\lambda \rightarrow 0$,

для всех $\hat{\lambda} \in (0, 1]$ $f_\lambda \rightarrow f_{\hat{\lambda}}$ равномерно на $\mathbb{R}$ при $\lambda \rightarrow \hat{\lambda}$.

Введем следующие понятия. Для некоторых $\theta > 0$ и набора чисел $a_1 < \dots < a_{2N}$ назовем *регулярным* $(\theta, a_1, \dots, a_{2N})$ -*бампом* такое стационарное решение U уравнения (1), что множество $\{a_1, \dots, a_{2N}\}$ является множеством всех решений уравнения $U(x) = \theta$, $U'(a_i) \neq 0$, и существуют такие $\sigma > 0$ и $r > 0$, что $U(x) < \theta - \sigma$ для всех $x \in \mathbb{R} \setminus B_{\mathbb{R}}([a_1, a_{2N}], r)$.

Далее, для любых $\varepsilon > 0$, регулярного $(\theta, a_1, \dots, a_{2N})$ -бампа U и чисел $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $d_1 < a_1 < a_{2N} < d_2$, определим в $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ множество

$$K_\varepsilon(U, d_1, d_2) = \left\{ u \in B_{C(\mathbb{R}, \mathbb{R})}(U, \varepsilon), \max_{x \in [d_1, d_2]} |u'(x) - U'(x)| < \varepsilon \right\}.$$

Используя теорему о неявной функции и теорию пространств Гельдера, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.3 (см. [6]). Пусть выполнены условия ($\mathbf{A}_\omega^3$) и ($\mathbf{A}_f^3$) и задан регулярный (симметричный) $(\theta, -a_N, \dots, -a_1, a_1, \dots, a_N)$ -бамп U_0 . Пусть также матрица $A = (a_{ij})$ с элементами

$$a_{ii} = |U'_0(a_i)| - \omega(0) - \omega(2a_i),$$

$$a_{ij} = (-1)^{i+j+1} - \omega(a_i - a_j) + \omega(a_i + a_j), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

имеет обратную. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что при любом $d > a_N$ уравнение (7) при каждом $\lambda \in (0, 1]$ имеет решение U_λ на множестве $K_\varepsilon(U_0, -d, d)$, являющееся регулярным симметричным бампом, причем $\|U_0 - U_\lambda\|_{C^1([-d, d], \mathbb{R})} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$.

В [6] также был предложен численный метод построения пространственно локализованного стационарного симметричного решения U_λ для непрерывной функции активации $f = f_\lambda$, $\lambda \in (0, 1]$, использующий известное решение U_0 уравнения (1), отвечающее функции активации f типа Хевисайда.

2.2. Динамика нейронного поля. В [10] было рассмотрено уравнение нейронного поля

$$\alpha \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = -u(t, x) + \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x, y) f(u(t, y)) dy, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha > 0, \quad (8)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (9)$$

Ниже приводятся значимые для данного обзора результаты работы [10].

Зафиксируем $\gamma \in (0, 1]$.

(**A** $^4_\omega$) Предположим, что функция связи $\omega \in BC(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \omega(x, \cdot) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \\ & \exists C_\omega > 0 \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\omega(x, \cdot)\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} + \sup_{\substack{\forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n \\ x \neq \hat{x}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\omega(x, y) - \omega(\hat{x}, y)}{|x - \hat{x}|^\gamma} dy \leq C_\omega, \end{aligned}$$

Функция f_0 представлена функцией Хевисайда (3); при $i = 1, 2, \dots$ функции семейства $f_i \in C(\mathbb{R}, [0, 1])$ являются неубывающими и удовлетворяют условиям $f_i(u) = 0$ при $u < \theta - 1/i$, $f_i(u) = 1$ при $u \geq \theta$.

Рассмотрим следующее эквивалентное представление задачи (8), (9) при $f = f_i$, $i = 0, 1, \dots$, в виде семейства операторных уравнений:

$$u(t, x) = u_0(x) + (\mathcal{F}_i u)(t, x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (10)$$

где при каждом $i = 0, 1, 2, \dots$ оператор $\mathcal{F}_i : BC([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow BC([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ задается равенством

$$(\mathcal{F}_i u)(t, x) = \int_0^t \frac{1}{\alpha} \left(-u(s, x) + \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x, y) f_i(u(s, y)) dy \right) ds, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Используя теорему Банаха о неподвижной точке сжимающего оператора и компактность вложения пространства Гельдера (с показателем γ) в пространство ограниченных непрерывных функций, в [10] было получено следующее утверждение.

Теорема 2.4. Пусть выполнено условие (**A** $^4_\omega$). Тогда для $f = f_i$ при каждом $i = 1, 2, \dots$ задача (8), (9) имеет единственное решение $u_i \in BC([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Если предельная точка $\hat{u}$ последовательности $\{u_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, решений уравнений (10) удовлетворяет условию

$$\text{mes}(\{(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \hat{u}(t, x) = \theta\}) = 0, \quad (11)$$

то задача (8), (9) имеет решение при $f = f_0$.

Следующий результат, непосредственно вытекающий из доказательства данной теоремы, но не сформулированный в [10] в явном виде, представляет интерес для настоящей работы.

Следствие 2.3. Пусть выполнены условия теоремы 2.4. Если точка сгущения $\hat{u} = \hat{u}(t, x)$ последовательности решений уравнений (10) удовлетворяет условию (11), то она является решением задачи (8), (9) при $f = f_0$.

Здесь предлагается следующее обобщение уравнения (1):

$$u(t, x) = \int_0^t \int_{\Omega} W(t, s, x, y) f(u(s - \tau(x, y), y)) dy ds + I(t, x), \quad t \in [0, \infty), \quad x \in \Omega, \quad (12)$$

учитывающее внешнее воздействие, а также эффекты памяти и запаздывания в нейронном поле.

Наличие запаздывания подразумевает рассмотрение данного уравнения вместе с предысторией:

$$u(t, x) = \varphi(t, x), \quad t \in (-\infty, 0), \quad x \in \Omega. \quad (13)$$

Ниже исследуются вопросы разрешимости и корректной разрешимости задачи (12), (13). Предположим, что выполнены следующие условия:

($\mathbf{A}_W^5$) $W \in C([0, \infty) \times [0, \infty) \times \Omega \times \Omega, \mathbb{R}^n)$, а также

$$\begin{aligned} \sup_{(t,x) \in [0,T] \times \Omega} |W(t, \cdot, x, \cdot)| &\in L([0, T] \times \Omega, \mathbb{R}) \quad \text{для всех } T > 0, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} \sup_{y \in \Omega} |W(t, s, x, y)| &= 0 \quad \text{для всех } t, s \in [0, \infty); \end{aligned}$$

($\mathbf{A}_\tau^5$) $\tau \in C(\Omega \times \Omega, [0, \infty))$;

($\mathbf{A}_I^5$) $I \in C_0([0, \infty) \times \Omega, \mathbb{R}^n)$;

($\mathbf{A}_\varphi^5$) $\varphi \in C((-\infty, 0) \times \Omega, \mathbb{R}^n)$, $\lim_{|(t,x)| \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = 0$, а также $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t, x) = I(0, x)$ для всех $x \in \Omega$.

Пусть при $i = 0, 1, \dots$ функция $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]^n$ ($[0, 1]^n = [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$) имеет компоненты $f_i(u) = (f_i^1(u^1), \dots, f_i^n(u^n))^T$. При $i = 0$ компоненты вектор-функции f_0 имеют вид функции Хевисайда с пороговыми значениями $\theta^1, \dots, \theta^n$, т.е.

$$f_0^j(u^j) = \begin{cases} 0, & u^j \leq \theta^j, \\ 1, & u^j > \theta^j, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n;$$

при каждом $i = 1, 2, \dots$ компоненты $f_i^j \in C(\mathbb{R}, [0, 1])$ функции f_i липшицевы и существует такой вектор $h = (h^1, \dots, h^n)$, $h^j > 0$, что $f_i^j(u^j) = 0$ для любого $i = 1, 2, \dots$ и всех таких $u^j \in \mathbb{R}$, что $u_j < h_j$, $j = 1, \dots, n$. Пусть также для любого $\varepsilon > 0$ выполнено условие

$$\text{mes}(\{u \in \mathbb{R}^n, f_i(u) \notin B_{\mathbb{R}^n}(f_0(u), \varepsilon)\}) \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty.$$

Если в уравнении (12) выбрана функция активации $f = f_i$, $i = 1, 2, \dots$, то T -локальным решением задачи (12), (13) будем называть функцию $u_T \in C_0([0, T] \times \Omega, \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую на $[0, T] \times \Omega$ уравнению (12) и условию (13). Для задачи (12), (13) при $f = f_i$, $i = 1, 2, \dots$, под глобальным решением понимается такая функция $u_\infty \in C_0([0, \infty) \times \Omega, \mathbb{R}^n)$, что при любом $T > 0$ всякое ее сужение $u_T \in C_0([0, T] \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ на $[0, T] \times \Omega$ является T -локальным решением данной задачи.

В случае $f = f_0$ под обобщенным T -локальным решением задачи (12), (13) понимаем функцию $u_T \in C_0([0, T] \times \Omega, \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую на $[0, T] \times \Omega$ включению

$$u(t, x) \in \int_0^t \int_{\Omega} W(t, s, x, y) \mathcal{H}(u(s - \tau(x, y), y)) dy ds + I(t, x), \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega, \quad (14)$$

с предысторией (13), где компоненты многозначного отображения $\mathcal{H} = (\mathcal{H}^1, \dots, \mathcal{H}^n)$ заданы следующим образом:

$$\mathcal{H}^j(u^j) = \begin{cases} 0, & u^j < \theta^j, \\ [0, 1], & u^j = \theta^j, \\ 1, & u^j > \theta^j, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n.$$

При $f = f_0$ будем считать обобщенным глобальным решением задачи (12), (13) функцию $u_\infty \in C_0([0, \infty) \times \Omega, \mathbb{R}^n)$, сужение которой $u_T \in C_0([0, T] \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ на $[0, T] \times \Omega$ при любом $T > 0$ является обобщенным T -локальным решением данной задачи (12), (13).

Теорема 2.5. Пусть выполнены условия (A_W^5) , (A_τ^5) , (A_I^5) , (A_φ^5) . Тогда

- (1) для $f = f_0$ при любом $T > 0$ задача (12), (13) имеет обобщенное T -локальное решение, всякое обобщенное T -локальное решение может быть продолжено до обобщенного глобального решения;
- (2) для $f = f_i$ при любых $T > 0$ и $i = 1, 2, \dots$ задача (12), (13) имеет единственное T -локальное решение $u_{iT} \in C_0([0, T] \times \Omega, \mathbb{R}^n)$, всякое T -локальное решение может быть продолжено до единственного глобального решения $u_{i\infty} \in C_0([0, \infty) \times \Omega, \mathbb{R}^n)$, последовательность $\{u_{i\infty}\}$, $i = 1, 2, \dots$, компактна в $C_0([0, \infty) \times \Omega, \mathbb{R}^n)$.

Если дополнительно для некоторой предельной точки $\hat{u}_\infty$ последовательности $\{u_{i\infty}\}$, $i = 1, 2, \dots$, выполнено условие

$$\sup_{x \in \Omega} \text{mes} \left(\{(s, y) \in [0, \infty) \times \Omega, \hat{u}_\infty(s - \tau(x, y), y) = \theta\} \right) = 0, \quad (15)$$

то $\hat{u}_\infty$ является обобщенным глобальным решением задачи (12), (13) при $f = f_0$. Если при $f = f_0$ решение (12), (13) (скажем, $u_{0\infty}$), единственно, то $u_{i\infty} \rightarrow u_{0\infty}$ при $i \rightarrow \infty$.

3. Обсуждение. До публикации работы [7] в литературе использовались два следующих способа построения стационарных локализованных решений уравнения (1) для случая непрерывной функции активации: первый способ основывался на методе сингулярного возмущения (см. [9]), второй — на преобразовании (1) в систему нелинейных дифференциальных уравнений высшего порядка, представимую далее в виде гамильтоновой системы, гомоклиническими траекториями которой являлись искомые решения (1) (см. [5]). Первый способ построения является довольно громоздким, и, кроме того, может применяться только в случае симметричной функции связи, имеющей ровно один положительный нуль. Недостатком второго способа также является ограничение выбора функции связи ω : ее преобразование Фурье должно допускать представление в виде вещественной рациональной функции. В [7] были предложены два естественных итерационных метода построения стационарного локализованного решения, отвечающего непрерывной функции активации, на основе знания о существовании такого решения уравнения (1) с функцией активации типа Хевисайда, а также была показана сходимость этих методов в пространстве непрерывных функций. В [3] был использован подход к проблеме исследования близости стационарных локализованных решений (1) с разрывной и непрерывной функциями активации, основанный на совокупной компактности интегральных операторов Гаммерштейна, порождаемых правой частью уравнения (6), в специальной топологии. Данное свойство позволяет исследовать близость решений при условии их существования, для доказательства которого используется теория топологической степени. Комбинация этих методов позволяет решать рассматриваемую задачу в довольно общих случаях. Главным ограничением применимости аппарата, предложенного в [3], является возможность вычисления топологической степени интегрального оператора Гаммерштейна, соответствующего случаю разрывной функции f , действующего в бесконечномерном пространстве. Для некоторых важных типов решений (6) задача вычисления топологической степени несложно решается путем ее трансляции в конечномерное пространство при помощи удобного гомеоморфизма (см. [3]). Метод исследования близости стационарных локализованных решений уравнения (1) с разрывной и непрерывной функциями активации, основанный на применении теоремы о неявной функции в специально построенном функциональном пространстве (см. [6]), имеет ряд преимуществ по сравнению с предыдущим методом, использующим теорию топологической степени. В отличие от [3], результат статьи [6] гарантирует единственность решений аппроксимирующих уравнений (7) с непрерывной функцией активации, причем без предположения гладкости функции связи, а также дает возможность их численного построения. Заметим здесь, что подход работы [7] опирается на теорию монотонных операторов в упорядоченных пространствах и, следовательно, не требует непрерывности оператора Гаммерштейна, для достижения которой в [3, 6, 8] вводились специальные пространства и топологии.

В [10] при помощи теоремы Банаха о неподвижной точке сжимающего оператора и свойства компактности в пространстве Гельдера ограниченных непрерывных функций была показана разрешимость разрывного уравнения (1) в классе непрерывных функций, удовлетворяющих условию (11). Данное условие представляет собой обобщение θ -условия, использованного в [3, 8], на случай зависящего от времени решения. Результат о близости решений (1) с разрывной и непрерывной функциями активации 2.3 в явном виде в [10] сформулирован не был, однако был получен в ходе доказательства теоремы 2.4. Предложенная авторами данного обзора теорема 2.5, полученная на основе применения теории абстрактных включений Вольтерры к обобщению (12) уравнения (1), учитывающему эффекты запаздывания и памяти, обобщает, в свою очередь, теорему 2.4 и следствие 2.3 п. 2.2 раздела 2. При этом условие (11) является частным случаем использованного в теореме 2.5 условия 15.

В качестве ближайших перспектив исследований по теме настоящего обзора авторы рассматривают следующие направления.

1. Исследование решений уравнений нейронного поля (1) и (12), не удовлетворяющих условиям 11 и (15), соответственно. Такие решения могут возникать, например, при математическом описании различных видов патологической активности в коре больших полушарий головного мозга. Так, стационарные решения, описывающие такую электрическую активность, типично неустойчивы по Ляпунову, что имеет место, например, в случае, когда стационарное решение $U(x)$ не удовлетворяют условию $U'(x) \neq 0$ для таких x , что $U(x) = \theta$ (см. [8]). Из подобных решений $U(x)$ можно получить зависящие от времени решения типа «движущаяся волна» $U(x+ct)$, где c — скорость волны, важное в изучении расстройств нормальной функции мозга (см. [11]). Для этих решений не выполнены ни условие (11), ни условие (15), что влечет нарушение непрерывности соответствующих операторов Гаммерштейна, на которую опираются исследования п. 2.2 раздела 2 данной работы. Однако для изучения решений такого типа представляется возможным разработать аппарат, использующий абстрактные включения Вольтерры в упорядоченных пространствах, который позволит получить результаты о близости вышеописанных решений при переходе от непрерывной к разрывной функции активации.

2. Получение условий сохранения свойства устойчивости по Ляпунову стационарных решений уравнения Amari и его обобщений при переходе от непрерывной к разрывной функции активации. Эти результаты можно будет получить на основе изучения асимптотических свойств спектров соответствующих операторов, которые могут следовать, например, из сходимости производных Фреше данных операторов в некоторой специальной топологии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурлаков Е. О., Жуковский Е. С. О корректности обобщенных уравнений нейрополей с импульсным управлением // Изв. вузов. Мат. — 2016. — № 5. — P. 75–79.
2. Amari S. Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields // Biol. Cybern. — 1977. — 27. — P. 77–87.
3. Burlakov E., Ponomov A., Wyller J. Stationary solutions of continuous and discontinuous neural field equations // J. Math. Anal. Appl. — 2016. — 444. — P. 47–68.
4. Burlakov E., Wyller J., Ponomov A. Two-dimensional Amari neural field model with periodic microstructure: Rotationally symmetric bump solutions // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. — 2016. — 32. — P. 81–88.
5. Laing C. R., Troy W. C. PDE methods for nonlocal models // SIAM J. Appl. Dynam. Syst. — 2003. — 2. — P. 487–516.
6. Oleynik A., Ponomov A., Kostykin V., Sobolev A. Spatially localized solutions of the Hammerstein equation with sigmoid type of nonlinearity // J. Differ. Equations. — 2016. — 261, № 10. — P. 5844–5874.
7. Oleynik A., Ponomov A., Wyller J. Iterative schemes for bump solutions in neural field model // Differ. Equ. Dynam. Syst. — 2015. — 23, № 1. — P. 79–98.
8. Oleynik A., Ponomov A., Wyller J. On the properties of nonlinear nonlocal operators arising in neural field models // J. Math. Anal. Appl. — 2013. — 398. — P. 335–351.
9. Pinto D. J., Ermentrout G. B. Spatially structured activity in synaptically couple neuronal networks: II. Lateral inhibition and standing pulses // SIAM J. Appl. Math. — 2001. — 62. — P. 226–243.

10. *Potthast R., Graben P. B.* Existence and properties of solutions for neural field equations// Math. Meth. Appl. Sci. — 2010. — 8. — P. 935–949.
11. *Ursino M., La Cara G. E.* Travelling waves and EEG patterns during epileptic seizure: Analysis with an integrate-and-fire neural network// J. Theor. Biol. — 2006. — 242, № 1. — P. 171–187.

Бурлаков Евгений Олегович

Тюменский государственный университет

E-mail: eb_@bk.ru

Жуковская Татьяна Владимировна

Тамбовский государственный технический университет

E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Жуковский Евгений Семенович

Тамбовский государственный университет

E-mail: zukovskys@mail.ru

Пучков Николай Петрович

Тамбовский государственный технический университет

E-mail: puchkov@nnn.tstu.ru