Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. О. Бурлаков, Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, Н. П. Пучков, Приложения накрывающих отображений в теории неявных дифференциальных уравнений, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 165, 21–33

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-165-21-33>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 15:32:17

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 165 (2019). С. 21–33
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-165-21-33

УДК 517.922, 517.927.4, 517.988

ПРИЛОЖЕНИЯ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ТЕОРИИ НЕЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2019 г. Е. О. БУРЛАКОВ, Т. В. ЖУКОВСКАЯ,
Е. С. ЖУКОВСКИЙ, Н. П. ПУЧКОВ

Аннотация. Приводится краткий обзор современных результатов и предлагаются новые результаты по теории накрывающих отображений метрических и векторных метрических пространств, ее приложениям к неявным дифференциальным уравнениям. Для задачи Коши и краевых задач получены условия существования и оценки решений, а также условия непрерывной зависимости решений от параметров уравнения, начальных и краевых условий.

Ключевые слова: накрывающее отображение, точка совпадения отображений, метрическое пространство, частично упорядоченное пространство, неявное дифференциальное уравнение, задача Коши, краевая задача.

APPLICATIONS OF COVERING MAPPINGS IN THE THEORY OF IMPLICIT DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2019 E. O. BURLAKOV, T. V. ZHUKOVSKAYA,
E. S. ZHUKOVSKIY, N. P. PUCHKOV

ABSTRACT. This paper is a brief review of results in the theory of covering mappings of metric spaces and vector metric spaces and its applications to implicit differential equations. For the Cauchy problem and boundary-value problems, we obtain existence conditions, estimates of solutions, and conditions of the continuous dependence of solutions on the parameters of the equation and initial and boundary conditions.

Keywords and phrases: covering mapping, map coincidence point, metric space, partially ordered space, implicit differential equation, Cauchy problem, boundary-value problem.

AMS Subject Classification: 55M20, 34A09, 34A12, 34A40, 34B15

1. Введение. Одним из основных инструментов, позволяющих получать условия разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнения явного вида (т.е. разрешенных относительно производной искомой функции), являются теоремы о неподвижной точке. Эти утверждения также применяют для получения оценок решений, исследования устойчивости, приближенного интегрирования уравнений и других вопросов. Аналогичную роль в исследовании неявных дифференциальных уравнений могут играть теоремы о точках совпадения двух отображений и теоремы

Работа Е. О. Бурлакова выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 17-41-680975, 18-31-00227) и Фонда развития теоретической физики и математики «Базис» (проект № 18-1-7-37-1).

Работа Е. С. Жуковского выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 17-01-00553, 17-41-680975, 17-51-12064) и Министерства образования и науки РФ (государственное задание № 3.8515.2017/БЧ).

о липшицевых возмущениях накрывающих отображений. В настоящей работе приводится краткий обзор современных результатов и предлагаются новые результаты по теории накрывающих отображений метрических и векторных метрических пространств, ее приложениям к неявным дифференциальным уравнениям.

2. Накрывающие отображения метрических пространств и их приложения к исследованию задачи Коши.

2.1. Операторные уравнения в метрических пространствах. Пусть заданы метрические пространства $X = (X, \rho_X)$, $Y = (Y, \rho_Y)$. Будем обозначать замкнутый шар $\{x \in X : \rho_X(x, x_0) \leq r\}$ с центром в $x_0 \in X$ радиуса $r \geq 0$ символом $B_X(x_0, r)$.

Определение 2.1. Пусть задано число $\alpha > 0$. Отображение $\Psi : X \rightarrow Y$ называют α -накрывающим, если для всех $x_0 \in X$ и всех $r \geq 0$

$$B_Y(\Psi(x_0), \alpha r) \subset \Psi(B_X(x_0, r)).$$

Определение 2.2. Пусть задано число $\kappa \geq 0$. Отображение $\Psi : X \rightarrow Y$ называют (*метрически*) κ -регулярным, если для всех $x_0 \in X$ и всех $y \in Y$ найдется такое $x \in X$, что $\Psi(x) = y$ и

$$\rho_X(x, x_0) \leq \kappa \rho_Y(y, \Psi(x_0)).$$

Сформулированные свойства равносильны: отображение Ψ является α -накрывающим тогда и только тогда, когда оно κ -регулярно с $\kappa = \alpha^{-1}$. Здесь используется термин «накрывающее отображение», а в следующем разделе для отображений векторных метрических пространств более удобным окажется векторный аналог свойства регулярности. Свойства накрывания и метрической регулярности отображений подробно исследованы благодаря работам Е. Р. Авакова, А. В. Арутюнова, Б. Д. Гельмана, Л. М. Грейвса, А. В. Дмитрука, А. Д. Иоффе, А. А. Милютин, Б. С. Мордуховича, Н. П. Осмоловского, А. Удерзо и др. Сформулируем результаты, имеющие приложения к дифференциальным уравнениям.

Пусть заданы отображения $\Psi, \Phi : X \rightarrow Y$. Их *точкой совпадения* называют такой элемент $x \in X$, что $\Psi(x) = \Phi(x)$. А. В. Арутюнов доказал следующую теорему о точке совпадения.

Теорема 2.1 (см. [2]). Пусть пространство X полно, отображение $\Psi : X \rightarrow Y$ является непрерывным и α -накрывающим, а отображение $\Phi : X \rightarrow Y$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\beta < \alpha$. Тогда для произвольного $x_0 \in X$ существует точка совпадения $\xi = \xi(x_0) \in X$ отображений Ψ, Φ , для которой

$$\rho_X(\xi, x_0) \leq (\beta - \alpha)^{-1} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

Доказательство. Определим такую последовательность $\{x_i\} \subset X$, что

$$\Psi(x_i) = \Phi(x_{i-1}), \quad \rho_X(x_{i+1}, x_i) \leq \frac{\beta}{\alpha} \rho_X(x_i, x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Эта последовательность фундаментальна и сходится в полном пространстве X к точке совпадения ξ заданных отображений. $\square$

Итерации (1) можно использовать для приближенного нахождения точек совпадения. Применение такого метода требует исследования влияния на предел итерационной последовательности погрешностей, неизбежно возникающих при нахождении элементов x_i . Эта проблема рассмотрена в [3, 10].

Приведенный результат уточнялся А. В. Арутюновым и другими авторами, использовались различные модификации условия накрывания (наиболее общие утверждения получены в [13], сравнительный анализ различных определений накрывания приведен в [14]). Сформулируем понятие, позволяющее объединить разнообразные определения свойства накрывания.

Определение 2.3. Множеством α -накрывания отображения $\Psi : X \rightarrow Y$ назовем совокупность всех пар $(u, y) \in X \times Y$, для каждой из которых существует такой $x \in X$, что

$$\Psi(x) = y, \quad \rho_X(x, u) \leq \alpha^{-1} \rho_Y(y, \Psi(u)).$$

Будем обозначать множество α -накрывания отображения $\Psi : X \rightarrow Y$ символом $\mathfrak{B}_\alpha(\Psi)$.

В [1, 4] с использованием свойства накрывания исследовано операторное уравнение (относительно неизвестного $x \in X$)

$$F(x) = y, \quad (2)$$

где $F : X \rightarrow Y$ — заданное отображение, $y \in Y$; в указанных работах получены условия разрешимости, корректной разрешимости и оценки решения уравнения (2), эти результаты применены к исследованию задачи Коши для неявного дифференциального уравнения. Приведем утверждения об уравнении (2), аналогичные соответствующим теоремам из [1, 4] в несколько менее ограничительных предположениях, использующих определение 2.3.

Теорема 2.2. Пусть метрическое пространство X является полным, $x_0 \in X$, $\alpha > \beta \geq 0$, $r = (\alpha - \beta)^{-1} \rho_Y(F(x_0), y)$, и пусть для всех $x \in X$ отображение $F : X \rightarrow Y$ представимо в виде

$$F(x) = \Upsilon(x, x),$$

где отображение $\Upsilon : X^2 \rightarrow Y$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\forall x \in B_X(x_0, r) : (x, y) \in \mathfrak{B}_\alpha(\Upsilon(\cdot, x)); \quad (3)$$

$$\forall x, \hat{x} \in B_X(x_0, r) : \Upsilon(\hat{x}, x) = y \Rightarrow \rho_Y(\Upsilon(\hat{x}, \hat{x}), y) \leq \beta \rho_X(\hat{x}, x); \quad (4)$$

$$\forall \{x_i\} \subset B_X(x_0, r), \quad \forall \xi \in X \quad x_i \rightarrow \xi, \quad \forall i = 1, 2, \dots : \Upsilon(x_i, x_{i-1}) = y \Rightarrow \Upsilon(\xi, \xi) = y. \quad (5)$$

Тогда в шаре $B_X(x_0, r)$ существует решение уравнения (2).

Доказательство. Как и для доказательства теоремы 2.1, используется итерационная последовательность, которая здесь определяется следующим образом. В силу (3) имеет место следующее утверждение:

$$\exists x_1 \in X : \Upsilon(x_1, x_0) = y, \quad \rho_X(x_1, x_0) \leq \frac{\rho_Y(y, \Upsilon(x_0, x_0))}{\alpha}.$$

Очевидно, $x_1 \in B_X(x_0, r)$. Согласно (3) выполнено неравенство

$$\rho_Y(\Upsilon(x_1, x_1), y) \leq \beta \rho_X(x_1, x_0),$$

а согласно (4) — справедливо утверждение

$$\exists x_2 \in X : \Upsilon(x_2, x_1) = y, \quad \rho_X(x_2, x_1) \leq \frac{\rho_Y(y, \Upsilon(x_1, x_1))}{\alpha}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \rho_X(x_2, x_1) &\leq \frac{\beta}{\alpha} \rho_X(x_1, x_0), \\ \rho_X(x_2, x_0) &\leq \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \rho_X(x_1, x_0) \leq \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \frac{\rho_Y(y, \Upsilon(x_0, x_0))}{\alpha} \leq r. \end{aligned}$$

Аналогично, при любом $i = 3, 4, \dots$ доказываем существование такого x_i , что

$$\begin{aligned} \Upsilon(x_i, x_{i-1}) &= y, \quad \rho_X(x_i, x_{i-1}) \leq \frac{\beta}{\alpha} \rho_X(x_{i-1}, x_{i-2}), \\ \rho_X(x_i, x_0) &\leq \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} + \dots + \frac{\beta^{i-1}}{\alpha^{i-1}}\right) \frac{\rho_Y(y, \Upsilon(x_0, x_0))}{\alpha} \leq r. \end{aligned}$$

В силу предположения $\beta < \alpha$ построенная последовательность является фундаментальной; это следует из неравенства

$$\rho_X(x_i, x_{i+j}) \leq \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} + \dots + \frac{\beta^{j-1}}{\alpha^{j-1}}\right) \rho_X(x_i, x_{i+1}) \leq \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} + \dots + \frac{\beta^{j-1}}{\alpha^{j-1}}\right) \frac{\beta^i}{\alpha^i} \rho_X(x_0, x_1).$$

Согласно (5) последовательность $\{x_i\} \subset B_X(x_0, r)$ сходится к решению уравнения (2). $\square$

Выведем из теоремы 2.2 условия корректности уравнения (2). Пусть задана последовательность отображений $\Upsilon_i : X^2 \rightarrow Y$, $i = 1, 2, \dots$, и элементы $x_0 \in X$, $y \in Y$. Рассмотрим последовательность уравнений

$$F_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Upsilon_i(x, x) = y, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Нас интересуют условия, обеспечивающие сходимость последовательности решений уравнений (6) к $x_0 \in X$ в случае, если последовательность $F_i(x_0)$ сходится к y .

Следствие 2.1. Пусть метрическое пространство X полно, для каждого $i = 1, 2, \dots$ отображение $\Upsilon_i : X^2 \rightarrow Y$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2, т.е. заданы числа $\alpha_i > \beta_i \geq 0$, $r_i = (\alpha_i - \beta_i)^{-1} \rho_Y(F(x_0), y)$, для которых выполнены соотношения (3), (4), (5). Если при $i \rightarrow \infty$ имеет место сходимость $r_i \rightarrow 0$, то при любом i существует такое решение $x = \xi_i$ уравнения (6), что $\xi_i \rightarrow x_0$.

Доказательство. Согласно теореме 2.2, при любом i существует решение ξ_i уравнения (6), принадлежащее шару $B_X(x_0, r_i)$; следовательно, $\xi_i \rightarrow x_0$. $\square$

Следствие 2.1 является несколько более общим утверждением, чем [4, теорема 2].

2.2. Накрывающие свойства оператора Немыцкого. Чтобы применять рассмотренные в п. 2.1 утверждения о накрывающих отображениях к различным функциональным (в том числе дифференциальным) уравнениям, требуется проверять предположения этих утверждений для конкретных операторов в различных функциональных пространствах. Наибольший интерес представляют накрывающие свойства оператора Немыцкого.

Пусть задана функция $f : [0, \tau] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, удовлетворяющая условиям Каратеодори (т.е. измеримая по первому аргументу и непрерывная по каждой компоненте второго аргумента — вектора из $\mathbb{R}^m$). В этом случае определен оператор Немыцкого, ставящий в соответствие каждой измеримой функции $x : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$ измеримую функцию

$$[0, \tau] \ni t \longmapsto (N_f x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t, x(t)) \in \mathbb{R}^l.$$

Для оператора Немыцкого, действующего в пространствах существенно ограниченных функций, в [1, 4] показано, что, если при почти каждом $t \in [0, \tau]$ функция $f(t, \cdot)$ является α -накрывающим, то и оператор N_f также α -накрывающий. В [11] получены условия накрывания оператора N_f , действующего в пространствах суммируемых функций.

Приведем утверждение об операторе Немыцкого, позволяющее проверять справедливость соотношения (3) для различных функциональных уравнений.

Лемма 2.1. Пусть заданы измеримые функции

$$u : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad y : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^l, \quad \alpha : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

Пусть при почти каждом $t \in [0, \tau]$ существует такая точка $x \in \mathbb{R}^m$, что

$$f(t, x) = y(t), \quad |x - u(t)| \leq \frac{1}{\alpha(t)} |y(t) - f(t, u(t))|. \quad (7)$$

Тогда существует измеримая функция $\hat{x} : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$, удовлетворяющая соотношениям

$$(N_f \hat{x})(t) = y(t), \quad |\hat{x}(t) - u(t)| \leq \frac{1}{\alpha(t)} |y(t) - (N_f u)(t)| \quad \text{п.в. на } [0, \tau]. \quad (8)$$

Доказательство. Положим

$$R(t) = \frac{1}{\alpha(t)} |f(t, u(t)) - y(t)|, \quad U(t) = B_{\mathbb{R}^m}(u(t), R(t)), \quad t \in [0, \tau].$$

Функция $R : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ измерима, поэтому многозначное отображение $U : [0, \tau] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ измеримо. В силу предположения (7) справедливо включение $y(t) \in f(t, U(t))$. Согласно лемме Филиппова (см., например, [7, п. 1.5.2]) существует такое измеримое сечение $\hat{x} : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$ отображения U , что $y(t) = f(t, \hat{x}(t))$, $t \in [0, \tau]$. Таким образом, $y = N_f \hat{x}$. Второе соотношение в (8) прямо следует из включения $\hat{x}(t) \in U(t)$. $\square$

Стандартным образом обозначим через $L_p^m = L_p([0, \tau], \mathbb{R}^m)$ пространство суммируемых в степени $p \in [0, \infty)$ функций $v : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$ с нормой

$$\|v\|_{L_p^m} = \left(\int_0^\tau |v(t)|^p dt \right)^{1/p};$$

через $L_\infty^m = L_\infty([0, \tau], \mathbb{R}^m)$ — пространство существенно ограниченных функций $v : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$ с нормой

$$\|v\|_{L_\infty^m} = \operatorname{vrai\,sup}_{t \in [0, \tau]} |v(t)|.$$

Лемма 2.1 позволяет формулировать условия накрывания (относительно соответствующих метрик) оператора Немыцкого, действующего в конкретных пространствах измеримых функций. Таким образом, выводятся результаты (см. [1, 4, 11]) об операторе Немыцкого в лебеговых пространствах. Например, если

$$(y - N_f u) \in L_p^l, \quad \alpha_0 = \operatorname{vrai\,inf}_{t \in [0, \tau]} \alpha(t) > 0,$$

то в силу (8) выполнено $(\hat{x} - u) \in L_p^m$ и

$$\|\hat{x} - u\|_{L_p^m} \leq \frac{1}{\alpha_0} \|y - N_f u\|_{L_p^l}.$$

Это означает, что в случае существенной ограниченности функции α из включения

$$(u(t), y(t)) \in \mathfrak{B}_{\alpha(t)}(f(t, \cdot)) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$$

следует включение

$$(u, y) \in \mathfrak{B}_{\alpha_0}(N_f) \subset L_p^m \times L_p^l.$$

Аналогично, если $(y - N_f u) \in L_p^l$ и

$$\alpha_0 = \left(\int_0^\tau \frac{1}{\alpha(t)^q} dt \right)^{-1/q} < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (9)$$

то $(\hat{x} - u) \in L_1^m$ и

$$\|\hat{x} - u\|_{L_1^m} \leq \frac{1}{\alpha_0} \|y - N_f u\|_{L_p^l}.$$

Таким образом, при выполнении (9) из включения

$$(u(t), y(t)) \in \mathfrak{B}_{\alpha(t)}(f(t, \cdot)) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$$

следует включение

$$(u, y) \in \mathfrak{B}_{\alpha_0}(N_f) \subset L_1^m \times L_p^l.$$

2.3. Задача Коши для неявного дифференциального уравнения. Введем некоторые функциональные пространства, используемые ниже. Пусть задана измеримая функция $y : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^l$. Определим пространство $W_\tau^l(y) = W(y, [0, \tau], \mathbb{R}^l)$ всех измеримых функций $v : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^l$, для которых разность $v - y$ существенно ограничена, и положим

$$\rho_{W_\tau^l(y)}(v, \hat{v}) = \operatorname{vrai\,sup}_{t \in [0, \tau]} |v(t) - \hat{v}(t)|.$$

Очевидно, пространство $W_\tau^l(y)$ является полным. Заметим, что если функция y существенно ограничена, то пространство $W_\tau^l(y)$ совпадает с «обычным пространством» существенно ограниченных функций L_∞^l .

Пусть заданы измеримая функция $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^l$ и функция $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, удовлетворяющая условиям Каратеодори (т.е. измеримая по первому аргументу и непрерывная по каждой компоненте второго и третьего аргументов). Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$f(t, x, \dot{x}) = y(t), \quad t \geq 0, \quad (10)$$

с начальным условием

$$x(0) = \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}^m. \quad (11)$$

Пусть $\tau > 0$. Решением уравнения (10), определенным на $[0, \tau]$, называют абсолютно непрерывную на этом отрезке функцию, удовлетворяющую уравнению при п.в. $t \in [0, \tau]$.

Пусть задана функция $x_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$, являющаяся абсолютно непрерывной на каждом конечном отрезке $[0, \tau]$, $\tau > 0$, и удовлетворяющая условию $x_0(0) = \gamma$. Положим $y_0(t) = f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))$, $t \in \mathbb{R}_+$. Эта функция измерима, и пусть $R(t) = \text{vrai sup}_{s \in [0, t]} |y(s) - y_0(s)| < \infty$ при любом $t > 0$. Определим

$$r(t) = \int_0^t R(s) ds.$$

Пусть заданы $\alpha, \varepsilon > 0$. Определим многозначные отображения (первое из которых непрерывно, а второе — измеримо):

$$\begin{aligned} U_{\alpha\varepsilon} : \mathbb{R}_+ &\rightrightarrows \mathbb{R}^m, & U_{\alpha\varepsilon}(t) &= B_{\mathbb{R}^m}(x_0(t), \alpha^{-1}r(t) + \varepsilon t); \\ V_{\alpha\varepsilon} : \mathbb{R}_+ &\rightrightarrows \mathbb{R}^m, & V_{\alpha\varepsilon}(t) &= B_{\mathbb{R}^m}(\dot{x}_0(t), \alpha^{-1}R(t) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Теорема 2.3. Пусть для некоторых положительных чисел α, ε и существенно ограниченных на каждом конечном отрезке функций $\mu, M : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$ и произвольных $x, \hat{x} \in U_{\alpha\varepsilon}(t)$, $v \in V_{\alpha\varepsilon}(t)$ выполнены следующие соотношения:

$$(v, y(t)) \in \mathfrak{B}_\alpha(f(t, x, \cdot)) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l, \quad (12)$$

$$|f(t, x, v) - f(t, \hat{x}, v)| \leq \mu(t)|x - \hat{x}|, \quad (13)$$

$$|f(t, x_0(t), v) - f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))| \leq M(t). \quad (14)$$

Тогда существует такое $\tau > 0$, что на $[0, \tau]$ существует решение задачи (10), (11).

Доказательство. Положим

$$\hat{R} = \text{vrai sup}_{t \in [0, 1]} R(t), \quad \hat{\mu} = \text{vrai sup}_{t \in [0, 1]} \mu(t), \quad \tau = \min \left\{ 1, 2^{-1} \hat{R}^{-1} \hat{\mu}^{-1} \alpha^2 \varepsilon \right\}. \quad (15)$$

Обозначим через $\mathcal{V}_\tau$ множество определенных на $[0, \tau]$ измеримых сечений многозначного отображения $V_{\alpha\varepsilon}(\cdot)$. Имеем $\mathcal{V}_\tau \subset W_\tau^m(\dot{x}_0)$, поэтому полагаем, что $\mathcal{V}_\tau$ является метрическим пространством с редуцированной метрикой. Определим отображение

$$\Upsilon_\tau(z_1, z_2)(t) = f \left(t, \gamma + \int_0^t z_2(s) ds, z_1(t) \right), \quad t \in [0, \tau].$$

Задача (10), (11) при $t \in [0, \tau]$ записывается в виде равносильного уравнения

$$\Upsilon_\tau(z, z) = f \quad (16)$$

относительно неизвестной функции $z \in \mathcal{V}_\tau$ — производной искомого решения задачи (10), (11). $\square$

В силу предположений (13), (14) отображение Υ_τ действует из $\mathcal{V}_\tau \times \mathcal{V}_\tau$ в $W_\tau^l(y)$. Из соотношения (13) вытекает, что при любом $z_1 \in \mathcal{V}_\tau$ отображение $\Upsilon_\tau(z_1, \cdot) : \mathcal{V}_\tau \rightarrow W_\tau^l(y)$ липшицево с коэффициентом $\beta = \hat{\mu}\tau \leq 2^{-1} \hat{R}^{-1} \alpha^2 \varepsilon$; без ограничения общности полагаем ε достаточно малым для справедливости неравенства $\beta \leq 2^{-1} \alpha$. Так как функция f удовлетворяет условиям Каратеодори, то при любом $z_2 \in \mathcal{V}_\tau$ отображение $\Upsilon_\tau(\cdot, z_2) : \mathcal{V}_\tau \rightarrow W_\tau^l(y)$ замкнуто. Согласно лемме 2.1, из предположения (12) следует, что для любого $z \in \mathcal{V}_\tau$ справедливо включение

$$(z, y) \in \mathfrak{B}_\alpha(\Upsilon_\tau(\cdot, z)) \subset \mathcal{V}_\tau \times W_\tau^l(y).$$

Остается заметить, что

$$V_{\alpha\varepsilon}(t) \subset B_{\mathbb{R}^m}(\dot{x}_0(t), (\alpha - \beta)^{-1}R(t));$$

таким образом, выполнены условия теоремы 2.2. Следовательно, уравнение (16) имеет решение — некоторую функцию $\hat{z} \in \mathcal{V}_\tau$, а тогда абсолютно непрерывная функция

$$\hat{x}(\cdot) = \gamma + \int_0^{\cdot} \hat{z}(s) ds$$

является решением задачи (10), (11), определенным на $[0, \tau]$.

Замечание 2.1. Соотношением (15) определяется длина промежутка существования решения задачи (10), (11). Определенное на этом промежутке решение x удовлетворяет неравенству

$$\text{vrai sup}_{t \in [0,1]} |\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)| \leq \frac{2}{\alpha} R(t).$$

Отметим, что задача Коши для частного случая уравнения (10) вида $g(t, \dot{x}) = \varphi(t, x)$ рассмотрена в [5]. Это исследование использует полученную в [2] теорему о точках совпадения.

Исследуем вопрос о непрерывной зависимости решений задачи (10), (11) от параметров (т.е. от функции f и начального значения γ).

Пусть для каждого натурального i определены:

- (i) функция $f_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, удовлетворяющая условиям Каратеодори,
- (ii) измеримая функция $y_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^l$,
- (iii) вектор $\gamma_i \in \mathbb{R}^m$.

Рассмотрим последовательность задач Коши

$$f_i(t, x, \dot{x}) = y_i(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Пусть задана абсолютно непрерывная на каждом конечном отрезке функция $x_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0(0) = \gamma$. Положим

$$x_{0i}(t) = \gamma_i + \int_0^t \dot{x}_0(s) ds, \quad y_{0i}(t) = f_i(t, x_{0i}(t), \dot{x}_0(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Сформулируем условия разрешимости при каждом i задачи (17) и сходимости (в пространстве абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке функций) последовательности решений к функции $x_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ при условии, что γ_i сходится к γ и y_{0i} сходится (равномерно) к y .

Отметим следующее обстоятельство. В теореме 2.3, устанавливающей условия разрешимости задачи Коши, нет ограничений на коэффициент накрывания α функции f по второму аргументу и коэффициентом $\mu(t)$ условия Липшица этой функции по третьему аргументу. Дело в том, что при рассмотрении соответствующих операторов в пространствах функций, определенных на $[0, \tau]$, при достаточно малом $\tau > 0$ оказывается выполненным неравенство $\beta < \alpha$, требуемое в теореме 2.2. При исследовании последовательности задач Коши потребуются предположить существование общих коэффициентов $\alpha, \mu(t)$ для всех функций f_i , иначе при каждом i мы можем получить решение, определенное на $[0, \tau_i]$ с $\tau_i \rightarrow 0$, или на любом отрезке $[0, \tau]$ последовательность решений может оказаться расходящейся.

Пример 2.1. Рассмотрим задачу Коши для простейшего линейного уравнения

$$\dot{x} - ix = 1, \quad t \geq 0, \quad x(0) = i^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Положим $f_i(t, x, v) = -ix + v$, $y(t) \equiv 1$, $\gamma_i = i^{-1}$, $x_{0i}(t) \equiv i^{-1}$. Функция f_i по третьему аргументу является 1-накрывающей, а по второму — i -липшицевой. При $i \rightarrow \infty$ имеем $f_i(t, x_{0i}(t), \dot{x}_{0i}(t)) \equiv 1$, $\gamma_i \rightarrow 0$, $\dot{x}_{0i}(t) \equiv 0$. Решением задачи (18) является $x_i(t) = i^{-1} \exp(it) - i^{-1}$, и при любом $t > 0$ выполнено $x_i(t) \rightarrow \infty$.

Для $\varepsilon > 0$, $i = 1, 2, \dots$, положим

$$U_{\varepsilon i}, V_{\varepsilon i} : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m, \quad U_{\varepsilon i}(t) = B_{\mathbb{R}^m}(x_{0i}(t), \varepsilon t), \quad V_{\varepsilon i}(t) = B_{\mathbb{R}^m}(\dot{x}_0(t), \varepsilon).$$

Теорема 2.4. Пусть для некоторых положительных чисел α, ε и существенно ограниченной на каждом конечном отрезке функции $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ при любом $i = 1, 2, \dots$, для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$ и произвольных $x, \hat{x} \in U_{\varepsilon i}(t)$, $v \in V_{\varepsilon i}(t)$ выполнены следующие соотношения:

$$(v, y(t)) \in \mathfrak{B}_\alpha(f_i(t, x, \cdot)) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l, \quad (19)$$

$$|f_i(t, x, v) - f_i(t, \hat{x}, v)| \leq \mu(t)|x - \hat{x}|, \quad (20)$$

$$\forall \tau > 0 \quad \text{vrai sup}_{s \in [0, \tau]} |f_i(s, x_{0i}(s), v) - f_i(s, x_{0i}(s), \dot{x}_{0i}(s))| \leq \infty. \quad (21)$$

Если для некоторого $T > 0$ при $i \rightarrow \infty$ выполнено

$$R_i = \text{vrai sup}_{s \in [0, T]} |y_i(s) - y_{0i}(s)| \rightarrow 0,$$

то существует такой номер i_0 , что при всех $i \geq i_0$ существует определенное на $[0, T]$ решение x_i задачи (17), а для последовательности этих решений выполнено условие

$$\text{vrai sup}_{s \in [0, T]} |\dot{x}_i(s) - \dot{x}_0(s)| \rightarrow 0.$$

Доказательство. Положим

$$\hat{\mu} = \text{vrai sup}_{t \in [0, T]} \mu(t), \quad \tau = \min \{T, 2^{-1} \hat{\mu}^{-1} \alpha\}. \quad (22)$$

Определим i_0 так, чтобы $\alpha^{-1} 2R_i \leq \varepsilon$ при любом $i > i_0$. Обозначим через $\mathcal{V}_{\tau i}$ подпространство в $W_\tau^m(\dot{x}_0)$, содержащее такие измеримые функции $v : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$, что $|v(t) - \dot{x}_{0i}(t)| \leq \varepsilon$ при почти всех $t \in [0, \tau]$. Определим отображение

$$\Upsilon_{\tau i}(z_1, z_2)(t) = f_i \left(t, \gamma_i + \int_0^t z_2(s) ds, z_1(t) \right), \quad t \in [0, \tau].$$

Задача (17) при $t \in [0, \tau]$ записывается в виде равносильного уравнения

$$\Upsilon_{\tau i}(z, z) = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

относительно неизвестной функции $z \in \mathcal{V}_{\tau i}$ — производной искомого решения задачи (17).

Повторив те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 2.3, получим, что для отображения $\Upsilon_{\tau i} : \mathcal{V}_{\tau i} \times \mathcal{V}_{\tau i} \rightarrow W_\tau^l(y_i)$ выполнены условия теоремы 2.2; следовательно, уравнение (23) при $i \geq i_0$ имеет решение $\hat{z}_i \in \mathcal{V}_{\tau i}$, удовлетворяющее неравенству

$$\text{vrai sup}_{t \in [0, \tau]} |\hat{z}_i(t) - \dot{x}_0(t)| \leq \frac{2}{\alpha} R_i \leq \varepsilon.$$

Соответственно, функция

$$x_i(\cdot) = \gamma_i + \int_0^{\cdot} \hat{z}_i(s) ds$$

является решением задачи (17), определенным на $[0, \tau]$. Для этого решения выполнено включение $x_i(t) \in U_{\varepsilon i}(t)$.

Аналогично доказывается, что при любом $i > i_0$ существует решение рассматриваемого дифференциального уравнения на промежутке $[\tau, 2\tau]$ с начальным условием $x(\tau) = x_i(\tau)$; для этого решения x_i выполнено

$$x_i(t) \in U_{\varepsilon i}(t), \quad \dot{x}_i(t) \in V_{\varepsilon i}(t), \quad |\dot{x}_i(t) - \dot{x}_0(t)| \leq \alpha^{-1} 2R_i, \quad t \in [\tau, 2\tau],$$

и так далее. Таким образом, при любом $i > i_0$ за конечное число $\tau^{-1}T$ «шагов» будет получено решение x_i задачи (17), определенное на $[0, T]$ и удовлетворяющее на всем этом промежутке соотношениям

$$\dot{x}_i(t) \in V_{\varepsilon i}(t), \quad |\dot{x}_i(t) - \dot{x}_0(t)| \leq \alpha^{-1} 2R_i.$$

Теперь утверждение теоремы очевидно следует из сходимости $R_i \rightarrow 0$. □

В силу предположений (20), (21) отображение $\Upsilon_{\tau i}$ действует из $\mathcal{V}_{\tau i} \times \mathcal{V}_{\tau i}$ в $W_{\tau}^l(y_i)$. Из соотношения (20) вытекает, что при любом $z_1 \in \mathcal{V}_{\tau i}$ отображение $\Upsilon_{\tau}(z_1, \cdot) : \mathcal{V}_{\tau} \rightarrow W_{\tau}^l(y)$ липшицево с коэффициентом $\beta = \hat{\mu}\tau \leq 2^{-1}\alpha$. Так как функция f удовлетворяет условиям Каратеодори, то при любом $z_2 \in \mathcal{V}_{\tau}$ отображение $\Upsilon_{\tau}(\cdot, z_2) : \mathcal{V}_{\tau} \rightarrow W_{\tau}^l(y)$ замкнуто. Согласно лемме 2.1 из предположения (12) следует, что для любого $z \in \mathcal{V}_{\tau}$ справедливо включение

$$(z, y) \in \mathfrak{B}_{\alpha}(\Upsilon_{\tau}(\cdot, z)) \subset \mathcal{V}_{\tau} \times W_{\tau}^l(y).$$

Таким образом, выполнены условия теоремы 2.2, и уравнение (16) имеет решение — некоторую функцию $\hat{z} \in \mathcal{V}_{\tau}$, а тогда абсолютно непрерывная функция

$$\hat{x}(\cdot) = \gamma + \int_0^{\cdot} \hat{z}(s) ds$$

является решением задачи (10), (11), определенным на $[0, \tau]$.

Из теорем 2.3 и 2.4 могут быть выведены полученные ранее в [1, 4, 5] утверждения о существовании и непрерывной зависимости от параметров решений задачи Коши для неявного дифференциального уравнения.

3. Регулярные отображения произведений метрических пространств и их приложения к исследованию краевой задачи.

3.1. Системы операторных уравнений в метрических пространствах. Пусть заданы метрические пространства $X_k, Y_j, k = \overline{1, m}, j = \overline{1, l}$. Определим пространства

$$\overline{X} = \prod_{k=1}^m X_k, \quad \overline{Y} = \prod_{j=1}^l Y_j.$$

В определенных здесь произведениях $\overline{X}, \overline{Y}$ расстоянием между элементами естественно считать векторы $\overline{\rho}_{\overline{X}} = (\rho_{X_1}, \dots, \rho_{X_m}), \overline{\rho}_{\overline{Y}} = (\rho_{Y_1}, \dots, \rho_{Y_l})$. Шаром в $\overline{X}$ радиуса $d = (d_1, \dots, d_m) \in \mathbb{R}_+^n$ с центром в $u = (u_1, \dots, u_m) \in \overline{X}$ относительно такой векторной метрики называем множество

$$\overline{B}_{\overline{X}}(u, d) = \prod_{k=1}^n B_{X_k}(u_k, d_k).$$

Последовательность $\{x_i\}$ называют сходящейся в $\overline{X}$ к x_0 , если имеет место сходимость $\overline{\rho}_{\overline{X}}(x_i, x_0) \rightarrow 0$ в пространстве $\mathbb{R}^m$. Стандартно определяются фундаментальные последовательности и вводится понятие полноты пространства. Пространство $(\overline{X}, \overline{\rho}_{\overline{X}})$ полно тогда и только тогда, когда полными являются пространства $X_k, k = \overline{1, m}$.

Определение 3.1. Пусть задана $(m \times l)$ -матрица K с неотрицательными компонентами $\kappa_{kj}, k = \overline{1, m}, j = \overline{1, l}$. Множеством (векторной метрической) K -регулярности отображения $\Psi : \overline{X} \rightarrow \overline{Y}$ назовем совокупность всех пар $(u, y) \in \overline{X} \times \overline{Y}$, для каждой из которых существует такой элемент $x \in \overline{X}$, что $\Psi(x) = y$ и $\overline{\rho}_{\overline{X}}(x, u) \leq K \overline{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u))$. Будем обозначать множество K -регулярности отображения $\Psi : \overline{X} \rightarrow \overline{Y}$ символом $\mathfrak{B}_K(\Psi)$.

Очевидно, что в случае $m = l = 1$ определения 3.1 и 2.3 равносильны.

Свойство регулярности (также называемое накрыванием) отображений в произведениях метрических пространств, а также в более общих пространствах с векторными метриками было определено и исследовалось в [6, 8, 9, 11]. Используя множество регулярности соответствующих отображений, мы получим здесь утверждение о разрешимости систем уравнений, аналогичное результатам цитируемых работ, в несколько менее ограничительных предположениях.

Пусть задан вектор $y \in \overline{Y}$ и определено «векторное» отображение $F = (F_1, \dots, F_l) : \overline{X} \rightarrow \overline{Y}$. Рассмотрим систему уравнений $F_j(x_1, \dots, x_m) = y_j, j = \overline{1, l}$, которую будем записывать в виде

$$F(x) = y. \tag{24}$$

Теорема 3.1. Пусть метрические пространства X_k , $k = \overline{1, m}$, являются полными и заданы вектор $x_0 \in \overline{X}$ и матрицы $K_{m \times l}$, $B_{l \times m}$ с неотрицательными компонентами, произведение которых имеет спектральный радиус $\text{sr}(BK) < 1$. Положим

$$r = K(I_l - BK)^{-1} \overline{\rho}_{\overline{Y}}(F(x_0), y),$$

где I_l — единичная $(l \times l)$ -матрица.

Пусть отображение $F : \overline{X} \rightarrow \overline{Y}$ представимо в виде

$$\forall x \in \overline{X} \quad F(x) = \Upsilon(x, x),$$

где отображение $\Upsilon : \overline{X}^2 \rightarrow \overline{Y}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\forall x \in \overline{B}_{\overline{X}}(x_0, r) \quad (x, y) \in \mathfrak{B}_K(\Upsilon(\cdot, x)); \quad (25)$$

$$\forall x, \hat{x} \in \overline{B}_{\overline{X}}(x_0, r) \quad \Upsilon(\hat{x}, x) = y \Rightarrow \overline{\rho}_{\overline{Y}}(\Upsilon(\hat{x}, \hat{x}), y) \leq \beta \overline{\rho}_{\overline{X}}(\hat{x}, x); \quad (26)$$

$$\forall \{x_i\} \subset \overline{B}_{\overline{X}}(x_0, r) \quad \forall \xi \in X \quad x_i \rightarrow \xi, \quad \forall i = 1, 2, \dots \quad \Upsilon x_i, x_{i-1} = y \Rightarrow \Upsilon(\xi, \xi) = y. \quad (27)$$

Тогда в шаре $\overline{B}_{\overline{X}}(x_0, r)$ существует решение уравнения (24).

Доказательство. Вследствие предположения $\text{sr}(BK) < 1$ ряд $\sum_{i=0}^{\infty} (BK)^i$ сходится к матрице $(I_l - BK)^{-1}$. Так как элементы матриц B , K неотрицательны, то при любом l выполнено неравенство

$$\sum_{i=0}^l (BK)^i \leq (I_l - BK)^{-1}.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям, использованным при доказательстве теоремы 2.2. Предположения (25), (26) позволяют определить такую последовательность $\{x_i\} \subset \overline{X}$, что

$$\begin{aligned} \Upsilon(x_i, x_{i-1}) = y, \quad \overline{\rho}_{\overline{X}}(x_i, x_{i-1}) &\leq BK \overline{\rho}_{\overline{X}}(x_{i-1}, x_{i-2}), \\ \overline{\rho}_{\overline{X}}(x_i, x_0) &\leq K \sum_{n=0}^{i-1} (BK)^n \overline{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Upsilon(x_0, x_0)) \leq r. \end{aligned}$$

Поскольку $\text{sr}(BK) < 1$, последовательность $\{x_i\} \subset \overline{B}_{\overline{X}}(x_0, r)$ в полном пространстве $\overline{X}$ является фундаментальной. Согласно условию (27) эта последовательность сходится к искомому решению уравнения (24). $\square$

Из теоремы 3.1 выводятся условия корректности векторного уравнения (24). Пусть задана последовательность отображений $\Upsilon_i : \overline{X}^2 \rightarrow \overline{Y}$, $i = 1, 2, \dots$, и элементы $x_0 \in \overline{X}$, $y \in \overline{Y}$. Рассмотрим последовательность уравнений

$$F_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Upsilon_i(x, x) = y, \quad i = 1, 2, \dots \quad (28)$$

Следствие 3.1. Пусть метрические пространства X_k , $k = \overline{1, m}$, являются полными, для каждого $i = 1, 2, \dots$ отображение $\Upsilon_i : \overline{X}^2 \rightarrow \overline{Y}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1, т.е. заданы $(m \times l)$ - и $(l \times m)$ -матрицы K_i , B_i с неотрицательными компонентами, $\text{sr}(B_i K_i) < 1$, для которых выполнены соотношения (25), (26), (27), где

$$r_i = K(I_l - BK)^{-1} \overline{\rho}_{\overline{Y}}(F(x_0), y).$$

Если при $i \rightarrow \infty$ имеет место сходимость $r_i \rightarrow 0$, то при любом i существует такое решение $x = \xi_i$ уравнения (28), что $\xi_i \rightarrow x_0$.

3.2. *Регулярность оператора Немыцкого в произведениях пространств измеримых функций.* Сформулируем векторный аналог результатов пункта 2.2.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_m)$ — вектор в $\mathbb{R}^m$; введем обозначение $\mathcal{H}_m x = (|x_1|, \dots, |x_m|) \in \mathbb{R}_+^m$.

Пусть функция $f : [0, \tau] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, задана удовлетворяющая условиям Каратеодори. Определим оператор Немыцкого, ставящий в соответствие каждой измеримой функции $x : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$ измеримую функцию

$$[0, \tau] \ni t \mapsto (N_f x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t, x(t)) \in \mathbb{R}^l.$$

Следующее утверждение позволяет проверять справедливость соотношения (25) для функциональных уравнений.

Лемма 3.1. *Пусть функции*

$$u : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad y : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^l, \quad K : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}_+^{m \times l}$$

измеримы. Пусть при почти каждом $t \in [0, \tau]$ существует такой вектор $x \in \mathbb{R}^m$, что

$$f(t, x) = y(t), \quad \mathcal{H}_m(x - u(t)) \leq K(t) \mathcal{H}_l(y(t) - f(t, u(t))).$$

Тогда существует измеримая функция $\hat{x} : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$, удовлетворяющая соотношениям

$$(N_f \hat{x})(t) = y(t), \quad \mathcal{H}_m(\hat{x}(t) - u(t)) \leq K(t) \mathcal{H}_m(y(t) - (N_f u)(t))$$

почти всюду на $[0, \tau]$.

3.3. *Краевая задача для неявного дифференциального уравнения.* Рассмотрим краевую задачу для неявного дифференциального уравнения (10), т.е. задачу нахождения решения этого уравнения на некотором промежутке $[0, T]$, удовлетворяющего краевому условию. Для определенности рассмотрим двухточечную задачу с условием

$$Ax(0) + Dx(T) = \gamma, \quad (29)$$

где $A, D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\gamma \in \mathbb{R}^n$. Краевую задачу (10), (29) запишем в виде системы уравнений

$$N_f \left(\dot{x}, x(0) + \int_0^{(\cdot)} \dot{x}(s) ds \right) = \gamma, \quad (A + D)x(0) + D \int_0^T \dot{x}(s) ds = \gamma,$$

относительно неизвестного $(\dot{x}, x(0))$. К этой системе применимы полученные выше результаты о регулярных отображениях, действующих в произведениях метрических пространств.

Пусть задана абсолютно непрерывная функция $x_0 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Определим функцию (очевидно, измеримую)

$$y_0 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^l, \quad y_0(t) = f(t, x_0(t) \dot{x}_0(t)).$$

Пусть

$$R_j = \text{vrai sup}_{t \in [0, T]} |y_0(t) - y(t)| < \infty, \quad j = \overline{1, l}.$$

Определим векторы $R = (R_j)_{j=\overline{1, l}}$, $\gamma_0 = Ax_0(0) + Dx_0(T)$, $d = \mathcal{H}_n(\gamma_0 - \gamma)$.

Будем предполагать, что ранг матрицы $A + D$ равен n . В этом случае существует ее правая обратная матрица $(A + D)_+^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Положим

$$K^b = \mathcal{H}_{m \times n}((A + D)_+^{-1}).$$

Для отображения $A + D : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ множество K^b -регулярности совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Введем обозначение $|D| = \mathcal{H}_{n \times m} D$.

Пусть заданы $(m \times l)$ - и $(l \times m)$ -матрицы K^f , M с неотрицательными компонентами. Определим матрицы K , B размерностей $2m \times (l + n)$ и $(l + n) \times 2m$ и их произведение формулами

$$K = \begin{pmatrix} K^f & 0 \\ 0 & K^b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} TM & M \\ T|D| & 0 \end{pmatrix}, \quad BK = \begin{pmatrix} TMK^f & MK^b \\ T|D|K^f & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что $\text{sr}(BK) < 1$. Тогда существует матрица $G = K(I_{l+n} - BK)^{-1}$. Запишем эту матрицу в виде

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$$

и определим ее «составные части»: $(m \times l)$ -матрицы G_{11} , G_{21} и $(m \times n)$ -матрицы G_{12} , G_{22} . Определим множества

$$\begin{aligned} V(t) &= \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(\dot{x}_0(t), G_{11}R + G_{12}d), \\ U(t) &= \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(x_0(t), G_{21}R + G_{22}d + tG_{11}R + tG_{12}d). \end{aligned}$$

Теорема 3.2. Пусть для некоторой существенно ограниченной функции $\mathcal{M} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$ и произвольных $x, \hat{x} \in U(t)$, $v \in V(t)$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} (v, y(t)) &\in \mathfrak{B}_{K^f}(f(t, x, \cdot)) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l, \\ \mathcal{H}_l(f(t, x, v) - f(t, \hat{x}, v)) &\leq M\mathcal{H}_m(x - \hat{x}), \\ |f(t, x_0(t), v) - f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))| &\leq \mathcal{M}(t). \end{aligned}$$

Тогда существует решение x краевой задачи (10), (29), для которого выполнено $\dot{x}(t) \in V(t)$ и $x(0) \in \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(\gamma_0, G_{21}R + G_{22}d)$.

В заключение отметим, что методы, основанные на накрывающих (регулярных) отображениях, применимы также и к исследованию неявных функционально-дифференциальных уравнений. Так, в [12] с использованием утверждений о векторных накрывающих отображениях рассмотрено уравнение с отклоняющимся аргументом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аваков Е. Р., Арутюнов А. В., Жуковский Е. С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Диффер. уравн. — 2009. — 45, № 5. — С. 613–634.
2. Арутюнов А. В. Устойчивость точек совпадения и многозначные накрывающие отображения в метрических пространствах // Докл. РАН. — 2009. — 427, № 5. — С. 583–585.
3. Арутюнов А. В. Итерационный метод нахождения точек совпадения двух отображений // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — 52, № 11. — С. 1947–1950.
4. Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е. О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Диффер. уравн. — 2011. — 47, № 11. — С. 1523–1537.
5. Арутюнов А. В., Жуковский С. Е. Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Диффер. уравн. — 2010. — 46, № 11. — С. 1561–1570.
6. Арутюнов А. В., Жуковский С. Е. Точки совпадения отображений в пространствах с векторной метрикой и их приложения к дифференциальным уравнениям и управляемым системам // Диффер. уравн. — 2017. — 53, № 11. — С. 1473–1481.
7. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — М.: Либроком, 2011.
8. Жуковский Е. С. О точках совпадения векторных отображений // Изв. вузов. Мат. — 2016. — № 10. — С. 14–28.
9. Жуковский Е. С. О возмущениях векторно накрывающих отображений и системах уравнений в метрических пространствах // Сиб. мат. ж. — 2016. — 57, № 2. — С. 297–311.
10. Жуковская Т. В., Жуковский Е. С. Об итерационных методах решения уравнений с накрывающими отображениями // Сиб. ж. вычисл. мат. — 2016. — 19, № 4. — С. 357–369.
11. Жуковский Е. С., Плужникова Е. А. Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Диффер. уравн. — 2013. — 49, № 4. — С. 439–455.
12. Жуковский Е. С., Трещев В. С. Накрывающие отображения в теории неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — Тамбов: ТГУ им. Г. Р. Державина, 2016.
13. Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Point Theory Appl. — 2009. — 5, № 1. — P. 105–127.

14. *Zhukovskiy S.* On covering properties in variational analysis and optimization// Set-Valued Var. Anal. — 2015. — 23, № 3. — P. 415–424.

Бурлаков Евгений Олегович
Тюменский государственный университет
E-mail: eb_@bk.ru

Жуковская Татьяна Владимировна
Тамбовский государственный технический университет
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Жуковский Евгений Семенович
Тамбовский государственный университет
E-mail: zukovskys@mail.ru

Пучков Николай Петрович
Тамбовский государственный технический университет
E-mail: puchkov@nnn.tstu.ru