Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Т. Созаева, А. Х. Кагермазов, Применение метода регуляризации А. Н. Тихонова к восстановлению микроструктурных характеристик градовых облаков, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 165, 73–79

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-165-73-79>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 07:16:51

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 165 (2019). С. 73–79
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-165-73-79

УДК 517.958:551.501.8

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А. Н. ТИХОНОВА К ВОССТАНОВЛЕНИЮ МИКРОСТРУКТУРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАДОВЫХ ОБЛАКОВ

© 2019 г. Л. Т. СОЗАЕВА, А. Х. КАГЕРМАЗОВ

Аннотация. Данная работа посвящена решению обратной задачи восстановления функции распределения гидromеторов по данным радиолокационных измерений. Для решения этой задачи применяется алгоритм регуляризации Тихонова, основанный на минимизации функционала невязки методом сопряженных градиентов.

Ключевые слова: радиолокационная отражаемость, функция распределения гидromеторов, интегральное уравнение Фредгольма первого рода, метод регуляризации Тихонова, метод сопряженных градиентов.

APPLICATION OF THE A. N. TIKHONOV REGULARIZATION TO RESTORING MICROSTRUCTURAL CHARACTERISTICS OF HAIL CLOUDS

© 2019 L. T. SOZAEVA, A. KH. KAGERMAZOV

ABSTRACT. This paper is devoted to solving the inverse problem of restoring the hydrometeor distribution function from radar measurements. We use the Tikhonov regularization algorithm based on the minimization of the residual functional by the conjugate gradient method.

Keywords and phrases: radar reflectivity, hydrometeor distribution function, Fredholm integral equation of the first kind, Tikhonov regularization method, conjugate gradient method.

AMS Subject Classification: 86A22

1. Введение. Обнаружение таких опасных явлений погоды, как град, гроза, шквал, ливневый дождь, снегопад невозможны без применения радиолокационных методов исследования облаков и осадков. Невозможно также и развитие современных методов модификации погоды, применяемых для предотвращения града, рассеяния туманов, увеличения и вызывания осадков.

Одним из основных направлений радиолокационных исследований является получение информации о микроструктурных характеристиках облаков и осадков, в частности, информации о фазовом составе, размере и концентрации гидromеторов. Для получения такой информации необходимо решать обратную задачу восстановления функции распределения гидromеторов по измеренным значениям радиолокационной отражаемости на различных длинах волн. Эта задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма первого рода (уравнение радиолокации), для решения которого предлагается применить алгоритм, основанный на минимизации функционала невязки методом сопряженных градиентов. Эффективность данного метода продемонстрирована на примере восстановления функции распределения градин по размерам для случая модельного облака.

2. Постановка задачи. Допустим, что облако состоит из совокупности сферических обводненных градин. Тогда соотношение между функцией распределения градин по размерам и их радиолокационной отражаемостью можно записать в виде интегрального уравнения Фредгольма первого рода:

$$Az = \int_a^b \sigma(x, s) z(s) ds = u(x), \quad (1)$$

где $z(s)$ — функция распределения градин по размерам, $\sigma(x, s)$ — поперечные сечения обратного рассеяния, $u(x)$ — известная из эксперимента радиолокационная отражаемость, x — длина волны излучения радиолокатора, a, b — минимальный и максимальный радиусы градин.

Требуется восстановить функцию распределения $z(s)$ градин по размерам по известным отражаемостям $u(x)$.

Согласно теории рассеяния при взаимодействии падающей электромагнитной волны с гидрометеорами на них индуцируются осциллирующие электрические и магнитные дипольные, квадрупольные и др. моменты. Часть энергии осцилляции поглощается, часть рассеивается во все стороны в виде электромагнитной волны той же длины волны, что и падающая. Часть электромагнитной волны, распространяющейся в направлении, обратном направлению падающей волны, характеризуется поперечным сечением обратного рассеяния.

Выражения для расчета поперечных сечений обратного рассеяния имеют следующий вид (см. [7, 10]):

$$\sigma(x, s) = \frac{\lambda^2}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left[|a_n|^2 + |b_n|^2 \right],$$

где a_n и b_n — коэффициенты рассеяния по теории Ми:

$$a_n = \frac{\phi_n(m\rho)\phi_n(\rho) - m\phi_n(m\rho)\phi_n'(\rho)}{\phi_n'(m\rho)\xi_n(\rho) - m\phi_n(m\rho)\xi_n'(\rho)}, \quad b_n = \frac{m\phi_n'(m\rho)\phi_n(\rho) - \phi_n(m\rho)\phi_n'(\rho)}{m\phi_n'(m\rho)\xi_n'(\rho) - \phi_n(m\rho)\xi_n(\rho)};$$

здесь $\rho = 2\pi s/\lambda$ — параметр Ми, $\phi_n(\rho)$ — цилиндрические функции Бесселя первого рода, $\xi_n(\rho)$ — цилиндрические функции Ханкеля второго рода, m — комплексный показатель преломления.

В результате исследования большого экспериментального материала о градобитиях было обнаружено, что функция распределения градин по размерам хорошо описываются гамма-распределением (см. [1, 3]). В пользу этого распределения свидетельствуют и данные самолетных исследований (см. [8, 9]). Гамма-распределение имеет вид

$$z(s) = \frac{N}{(\mu+1)\beta^{\mu+1}} s^{\mu} e^{-\frac{s}{\beta}}, \quad (2)$$

где μ, β — параметры распределения, N — концентрация частиц, s — радиус градин.

Из экспериментальных данных известно, что в градовых облаках параметр μ принимает значения от 0 до 10, с наиболее часто повторяющимся значением 2. Параметр β принимает значения от 0,043 до 0,76 см. Концентрация градин в облаках варьируется в пределах от 0,1 до 10 м⁻³ при среднем значении 10 м⁻³.

Задача (1) является некорректно поставленной, так как нарушено третье условие определения корректно поставленной задачи, а именно, малые возмущения входной информации создают большие возмущения решения.

Для построения устойчивых методов решения задачи восстановления функции распределения градин необходима дополнительная информация о решении. Такую информацию доставляет физика изучаемого процесса: функция распределения градин по размерам является достаточно гладкой функцией размера градин. Процесс взаимодействия электромагнитных волн с микроструктурой облаков носит устойчивый характер (малые изменения микроструктурных характеристик облаков приводит к малым изменениям поля рассеиваемых волн), т.е. ядро тоже является достаточно гладкой функцией.

Для решения данной задачи восстановления функции распределения градин по размерам можно применить регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова (см. [4, 5]). В настоящей работе хорошо

известный метод сопряженных градиентов адаптирован для восстановления функции распределения гидрометеоров по радиолокационным измерениям; для нахождения параметра регуляризации применяется метод обобщенной невязки (см. [2, 6]).

3. Общая схема приближенного решения. Рассмотрим интегральное уравнение (1). Предположим, что ядро уравнения $\sigma(x, s)$ — функция, непрерывная в прямоугольнике $\Pi = \{a \leq s \leq b, c \leq x \leq d\}$, решение $z(s)$ — искомая функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$ ($Z = W_2^1[a, b]$), u — заданная функция, непрерывная на отрезке $[c, d]$ ($U = L_2[c, d]$). Ставится задача нахождения решения задачи $z(s)$ по заданной правой части $u(x)$.

Пусть вместо точно известной правой части уравнения $\bar{u} = A\bar{z}$ известно ее приближенное значение u_δ , удовлетворяющее условию $\|u_\delta - \bar{u}\|_{L_2} \leq \delta$, где δ — погрешность задания правой части уравнения (1). Вместо ядра уравнения $\sigma(x, s)$ известно такое приближенное ядро $\sigma_h(x, s)$, что $\|\sigma - \sigma_h\|_{L_2(P_i)} \leq h$. Тогда $\|A - A_h\|_{W_2^1 \rightarrow L_2} \leq h$ — интегральный оператор, соответствующий ядру $\sigma_h(x, s)$, а h — погрешность его задания.

Заменяя исходную задачу (1) на возмущенную, получим «приближенную» задачу:

$$A_h z = \int_a^b \sigma_h(x, s) z(s) ds = u_\delta(x). \quad (3)$$

В таком представлении исходная задача становится корректной, и для ее решения можно применить регуляризирующий алгоритм, основанный на минимизации функционала А. Н. Тихонова:

$$M^\alpha[z] = \Phi[z] + \alpha\Omega[z],$$

где $\Phi(z) = \|Az - u_\delta\|^2$ — невязка,

$$\Omega[z] = \int_a^b \{z^2(s) + [z'(s)]^2\} ds$$

— стабилизатор, α — параметр регуляризации. Применяя функционал А. Н. Тихонова к задаче (1), получим

$$M^\alpha[z] = \|A_h z - u_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|z\|_{W_2^1}^2 = \int_c^d \left[\int_a^b \sigma_h(x, s) z(s) ds - u_\delta(x) \right]^2 dx + \alpha \int_a^b \{z^2(s) + [z'(s)]^2\} ds. \quad (4)$$

Для выбора параметра регуляризации можно использовать обобщенный принцип невязки, а для минимизации функционала — метод сопряженных градиентов.

Для численного решения задачи введем сетки $\{s_j\}_{j=1}^n$ и $\{x_i\}_{i=1}^m$ с равномерными шагами h_s и h_x соответственно на отрезках $[a, b]$ и $[c, d]$. После этого, пользуясь квадратурными формулами, построим конечно-разностный аналог оператора интегрального уравнения (3) с матрицей $\{a_{ij}\}$:

$$a_{ij} = \begin{cases} h_s \sigma(x_i, s_j), & j = 2, 3, \dots, n-1, \\ \frac{1}{2} h_s \sigma(x_i, s_j), & j = 1, n, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где $h_s = (b - a)/(n - 1)$ — шаг равномерной сетки $\{s_j\}_{j=1}^n$ на отрезке $[a, b]$, n — число узлов.

Далее, аппроксимируя интегралы, входящие в квадраты норм в пространствах $Z = W_2^1[a, b]$ и $U = L_2[c, d]$ по формулам прямоугольников, получим:

$$\begin{aligned} \int_c^d \left[\int_a^b \sigma_h(x, s) z(s) ds - u_\delta(x) \right]^2 dx &\approx \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j h_s - u_i \right]^2 h_x; \\ \int_a^b [z(s)]^2 ds &\approx \sum_{j=1}^n z_j^2 h_s; \\ \int_a^b [z'(s)]^2 ds &\approx \sum_{j=1}^n \frac{(z_j - z_{j-1})^2}{h_s}. \end{aligned}$$

Тогда конечно-разностная аппроксимация функционала Тихонова примет вид

$$\hat{M}^\alpha[z] = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j h_s - u_i \right]^2 h_x + \alpha \left(\sum_{j=1}^n z_j^2 h_s + \sum_{j=1}^n \frac{(z_j - z_{j-1})^2}{h_s} \right). \quad (5)$$

Таким образом, исходная задача сводится к задаче минимизации (5).

Итерационный процесс минимизации функционала строится следующим образом: задается начальное приближение — вектор $Z^{(0)}$. Для заданной точки $Z^{(i)}$ минимизирующей последовательности вычисляется градиент $g^{(i)} = \text{grad } \hat{M}^\alpha[z^{(i)}]$, который равен

$$\text{grad } \hat{M}^\alpha = \frac{\partial \hat{M}^\alpha}{\partial z_j} = 2h_x \sum_{i=1}^m h_x a_{ij} \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j h_s - u_i \right] + 2\alpha h_s \sum_{j=1}^n z_j + \frac{2\alpha}{h_s} \sum_{j=1}^n (z_j - z_{j-1}).$$

По направлению градиента $g^{(i-1)}$ и направлению спуска $h^{(i-1)}$ на предыдущем шаге вычисляется новое направление спуска

$$h^{(i)} = g^{(i)} + \frac{(g^{(i)} - g^{(i-1)}, g^{(i)})}{(g^{(i-1)}, g^{(i-1)})}.$$

Затем строится множество, состоящее из элементов $z = z^{(i)} + h^{(i)}$, и после этого отыскивается точка минимума функционала $M^\alpha[z]$, которая на рассматриваемом множестве принимается за следующий элемент $z^{(i)}$ минимизирующей последовательности. За $N = nm$ шагов методом сопряженных градиентов определяется находится минимум функционала для фиксированного параметра регуляризации.

Выбор параметра регуляризации осуществляется в соответствии с принципом обобщенной невязки, т.е. из уравнения

$$\rho(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2 - \left(\delta + h \|z_\eta^\alpha\| \right)^2 - (\mu_\eta^2(u_\delta, A_h))^2 = 0,$$

где $\mu_\eta^2(u_\delta, A_h)$ — мера несовместности уравнения (3). Для решения уравнения невязки $\rho(\alpha) = 0$ используется модифицированный метод хорд.

В качестве величин ошибок задания оператора и правой части можно использовать соответственно величины

$$h^2 = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \xi_{ij}^2 \right) \frac{h_x}{h_s}, \quad \delta^2 = \left(\sum_{i=1}^m \eta_i^2 \right) h_x,$$

где ξ_{ij}, η_i — реализации соответствующих случайных величин.

Рис. 1. Восстановленные функции распределения градовых частиц по 15 длинам волн.
Кривая $\bar{z}$ — точное решение, $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$, $\tilde{z}_3$ — приближенные решения.

Рис. 2. Восстановленные функции распределения градовых частиц по 5 длинам волн.
Кривая $\bar{z}$ — точное решение, $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$, $\tilde{z}_3$ — приближенные решения.

4. Результаты численного эксперимента. Была найдена функция распределения градин в облаках по формуле (2) при следующих параметрах: $N = 1$, $\mu = 2$, $\beta = 0,4$. Эта функция распределения была принята за точное решение $\bar{z}$ исходного уравнения. Далее был смоделирован входной сигнал (радиолокационная отражаемость) по уравнению (3) для исследуемых длин волн, т.е. был найден вектор $\bar{u}$ правой части. Затем к полученному входному сигналу добавлялись ошибки и полученные данные использовались для восстановления функции распределения размеров градин $\tilde{z}(s)$ с помощью предложенного метода (рис. 1–3). При этом точность задания оператора принималась равной $h_2 = 10^{-10}$. Рассматривался и случай с погрешностью задания оператора.

Размеры градин меняются от 0,2 см до 4 см, значения длин волн — от 3,2 см до 10 см.

Были введены сетки с равномерными шагами на отрезках $[0,2; 4]$ и $[3,2; 10]$.

Рис. 3. Восстановленные функции распределения градовых частиц по 3 длинам волн. Кривая $\bar{z}$ — точное решение, $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$, $\tilde{z}_3$ — приближенные решения.

Эксперимент № 1. Пусть число узлов равно $n = 15$ (рис. 1). Рассмотрим задачу восстановления функции распределения градин, когда правая часть уравнения (3) известна для пятнадцати длин волн $x = 3,2-10$. Функция распределения градин ищется в узлах (точки радиусов) $s = 0,2-4$.

При задании погрешности правой части уравнения $\delta^2 = 0,01$, что соответствует 1% изменения элементов вектора правой части, найдено решение задачи $\tilde{z}_1$ при значении параметра регуляризации 0,15 (значение невязки равно 0,01).

В случае, когда погрешность правой части равна $\delta^2 = 0,1$ (10%), найдено решение задачи $\tilde{z}_2$, соответствующее значению параметра регуляризации 0,63 (значение невязки равно 0,1).

При погрешности задания правой части уравнения $\delta^2 = 0,1$ и погрешности задания оператора $h^2 = 0,001$ найдено решение задачи $\tilde{z}_3$ при значении параметра регуляризации 0,72 (значение невязки равно 0,137).

Эксперимент № 2. Пусть число узлов равно $n = 5$ (рис. 2). Рассмотрим задачу восстановления функции распределения градин с известной правой частью для пяти длин волн $x = \{3,2; 4,75; 6,5; 8,25; 10\}$. Функция распределения градин ищется в узлах $s = \{0,3; 0,74; 1,1; 1,46; 1,82\}$.

Найдено решение $\tilde{z}_1$ при задании погрешности правой части уравнения (3), равное 1%. В этом случае параметр регуляризации равен 0,008 (значение невязки равно 0,0092).

Найдено решение $\tilde{z}_2$ при задании погрешности правой части уравнения (3), равное 10%, значение невязки на этом решении равно 0,00004. В этом случае параметра регуляризации равен 0,35.

Найдено решение $\tilde{z}_3$ при задании значении погрешности 20% изменения элементов вектора правой части и погрешности задания оператора $h^2 = 0,001$; значение невязки при этом решении равно 0,6, а значение параметра регуляризации — 0,2.

Эксперимент № 3. Пусть число узлов равно $n = 3$ (рис. 3). Правая часть уравнения известна для трех длин волн: 3,2; 6,6 и 10 см. Требуется восстановить функцию распределения градовых частиц по размерам в узлах сетки по радиусам: $s_1 = 0,43$ см, $s_2 = 0,9$ см, $s_3 = 1,37$ см.

При погрешностях задания правой части уравнения $\delta^2 = 0,01$, $\delta^2 = 0,01$ и $\delta^2 = 0,2$ (и погрешности задания оператора $h^2 = 0,001$) что соответствует 1, 10 и 20% изменения элементов вектора правой части найдены решения $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$, $\tilde{z}_3$; значения невязок на этих решениях: 0,001, 0,0057, 0,0059. Значения соответствующих параметров регуляризации равны 0,0024, 0,00207, 0,00205.

Численные эксперименты показали, что при заданных возмущениях правой части уравнения (3), равных 1–20%, функция распределения градовых частиц восстанавливается с хорошей точностью.

5. Заключение. Алгоритм восстановления микроструктуры градовых облаков на основе метода регуляризации Тихонова можно применять в радиолокации для восстановления микроструктурных характеристик облаков, осадков и атмосферных аэрозолей. По модельной задаче видно, что для достаточно хорошего восстановления микроструктурных характеристик градовых облаков желательно иметь радиолокатор на 3–5 длинах волн, что на практике трудно реализовать. Поэтому остается открытым вопрос об оптимальном количестве длин волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абшаев М. Т., Чеповская О. И. О функции распределения града// Метеорология и гидрология. — 1967. — № 6. — С. 36–40.
2. Иванов В. К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1966. — 6, № 6. — С. 1089–1094.
3. Левин Л. М. Исследование по физике грубодисперсных аэрозолей. — М.: Изд-во АН СССР, 1961.
4. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации// Докл. АН СССР. — 1963. — 151, № 3. — С. 501–504.
5. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач// Докл. АН СССР. — 1963. — 153, № 1. — С. 49–52.
6. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1990.
7. Bohren C. F., Huffman D. R. Absorption and Scattering of Light by Small Particles. — New York: Wiley, 1983.
8. Smith P. L. at al. Raindrop and hailstone size distributions inside hailstorms// in: Proc. Int. Conf. on Cloud Physics, July 26–30, 1976, Boulder, Colorado, U.S.A. — Boston, Massachusetts: Am. Meteorolog. Soc., 1976. — P. 252–257.
9. Smith P. L. Some recent development in the detection and measurement of hail// in: Papers Pres. at the II Int. Conf. on Hailstorms and Hail Prevention Sofia, 1984. — P. 75–93.
10. Van de Hulst H. C. Light Scattering by Small Particles. — New York: Wiley, 1957.

Созаева Лежинка Танашевна

Высокогорный геофизический институт, Нальчик, Россия

E-mail: ljk_62@rambler.ru

Кагермазов Артур Хасанбиевич

Высокогорный геофизический институт, Нальчик, Россия

E-mail: ka5408@mail.ru