Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Духновский, О скорости стабилизации решений задачи Коши для системы уравнений Годунова—Султангазина с периодическими начальными данными, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 165, 88–113

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-165-88-113>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:40:24

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 165 (2019). С. 88–113
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-165-88-113

УДК 517.958:531.332

О СКОРОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГОДУНОВА—СУЛТАНГАЗИНА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

© 2019 г. С. А. ДУХНОВСКИЙ

Аннотация. Исследуется одномерная система уравнений для дискретной модели газа (система уравнений Годунова—Султангазина). Система Годунова—Султангазина является кинетическим уравнением Больцмана модельного одномерного газа, состоящего из трех групп частиц. Для этой модели сохраняются импульс, а энергия нет. Доказывается существование единственного глобального решения задачи Коши для возмущения состояния равновесия с периодическими начальными данными. Впервые устанавливается скорость стабилизации к состоянию равновесия (экспоненциальная стабилизация).

Ключевые слова: система Годунова—Султангазина, теорема существования, слабое решение, число Кнудсена.

ON THE RATE OF STABILIZATION OF SOLUTIONS TO THE CAUCHY PROBLEM FOR THE GODUNOV–SULTANGAZIN SYSTEM WITH PERIODIC INITIAL DATA

© 2019 S. A. DUKHNOVSKY

ABSTRACT. In this paper, we examine a one-dimensional system of equations for a discrete gas model (the Godunov–Sultangazin system). The Godunov–Sultangazin system is the Boltzmann kinetic equation for a model one-dimensional gas consisting of three groups of particles. In this model, the momentum is preserved whereas the energy is not. We prove the existence of a unique global solution to the Cauchy problem for a perturbation of the equilibrium state with periodic initial data. For the first time, we find the rate of stabilization to the equilibrium state (exponential stabilization).

Keywords and phrases: Godunov–Sultangazin system, existence theorem, weak solution, Knudsen number.

AMS Subject Classification: 35L45, 35L60, 35Q20

1. Введение. В настоящей работе мы продолжаем изучение дискретной кинетической модели Годунова—Султангазина (см. [4, 12]), описывающей одноатомный разреженный газ, состоящий из трех групп частиц. Исследование данной системы началось в 1970-х гг. в работах С. К. Годунова и У. М. Султангазина (см. [4]). При этом доказательство глобальной теоремы существования решения в пространстве Соболева не приводилось. В более поздних работах обзор кинетических уравнений рассматривался В. В. Веденяпиным [3], О. А. Васильевой [1], Е. В. Радкевичем [7, 8], О. В. Ильиным [6] и многими другими авторами.

Рассмотрим систему Годунова—Султангазина

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x u &= \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t v &= -\frac{2}{\varepsilon}(v^2 - uw), & 0 < \varepsilon < 1, \\ \partial_t w - \partial_x w &= \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw), \\ u|_{t=0} &= u^0, \quad v|_{t=0} = v^0, \quad w|_{t=0} = w^0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$, $w = w(x, t)$ — плотности групп частиц со скоростями $c = 1, 0, -1$, ε — параметр Кнудсена из кинетической теории газов, $u^0(x) = u^0(x + 2\pi)$, $v^0(x) = v^0(x + 2\pi)$, $w^0(x) = w^0(x + 2\pi)$ — периодические начальные данные. Приведенное в данной статье доказательство глобальной разрешимости задачи Коши для одномерной системы уравнений (1) позволяет исследовать природу локального равновесия и установить скорость стабилизации к состоянию равновесия решений задачи Коши с ограниченной энергией и периодическими начальными данными.

2. Фурье-решение. Мы исследуем задачу Коши (1) для малых возмущений состояния равновесия $v_e^2 = w_e u_e$, $u_e, v_e, w_e > 0$. Введем обозначение $\mathbb{Z}_0 = \{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}$ и положим

$$u = u_e + u_e^{1/2} \varepsilon^2 \hat{u}, \quad v = v_e + v_e^{1/2} \varepsilon^2 \hat{v}, \quad w = w_e + w_e^{1/2} \varepsilon^2 \hat{w}, \quad (2)$$

где

$$\hat{u}(t, x) = u_0(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} u_k(t) e^{ikx}, \quad \hat{v}(t, x) = v_0(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} v_k(t) e^{ikx}, \quad \hat{w}(t, x) = w_0(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} w_k(t) e^{ikx},$$

Тогда

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{u} + \partial_x \hat{u} - \frac{1}{\varepsilon} w_e^{1/2} (2v_e^{1/2} \hat{v} - u_e^{1/2} \hat{w} - w_e^{1/2} \hat{u}) &= \varepsilon w_e^{1/2} (\hat{v}^2 - \hat{u} \hat{w}), \\ \partial_t \hat{v} + \frac{2}{\varepsilon} v_e^{1/2} (2v_e^{1/2} \hat{v} - u_e^{1/2} \hat{w} - w_e^{1/2} \hat{u}) &= -2\varepsilon v_e^{1/2} (\hat{v}^2 - \hat{u} \hat{w}), \\ \partial_t \hat{w} - \partial_x \hat{w} - \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} (2v_e^{1/2} \hat{v} - u_e^{1/2} \hat{w} - w_e^{1/2} \hat{u}) &= \varepsilon u_e^{1/2} (\hat{v}^2 - \hat{u} \hat{w}), \\ \hat{u}|_{t=0} &= \hat{u}^0, \quad \hat{v}|_{t=0} = \hat{v}^0, \quad \hat{w}|_{t=0} = \hat{w}^0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для периодических возмущений с нулевыми средними введем весовое пространство $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)$:

$$\|\hat{u}\|_{W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)} = \left\| \frac{d}{dt} \hat{u} \right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)} + \|\hat{u}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)},$$

где

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)}^2 &= \int_0^\infty e^{2\gamma t} |u_0(t)|^2 dt + \int_0^\infty e^{2\gamma t} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} |k|^{2\sigma} |u_k(t)|^2 dt < \infty, \\ \|\hat{u}|_{t=0}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 &= |u_0^0|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} |k|^{2\sigma} |u_k^0|^2. \end{aligned}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. Для любых $v_e^2 = u_e w_e > 0$ существуют такие не зависящие от ε константы $\mu_0, q \in (0, 1)$, что для малых $0 < \varepsilon < 1$ и периодических начальных данных $(\hat{u}^0, \hat{v}^0, \hat{w}^0)$ с нулевыми средними, для которых выполняется неравенство

$$\|\hat{u}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\hat{v}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\hat{w}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq \varepsilon^{3/4} q,$$

для всех $\sigma > 2$ существует единственное глобальное решение $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \in W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)$, где $\gamma = \varepsilon \mu_0 > 0$, задачи Коши (3).

Отсюда следует теорема об экспоненциальной устойчивости.

Теорема 2. Пусть $\sigma > 2$ и выполнены условия теоремы 1. Тогда положительное состояние равновесия ($u_e = \text{const} > 0$, $v_e = \text{const} > 0$, $w_e = \text{const} > 0$, $v_e^2 = u_e w_e$) является экспоненциально устойчивым:

$$\begin{aligned} \|u(x, t) - u_e\|_{\mathcal{H}_\sigma} &\leq c_1 \left(\|\hat{u}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\hat{v}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\hat{w}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} \right) e^{-2\gamma_1 t}, \\ \|v(x, t) - v_e\|_{\mathcal{H}_\sigma} &\leq c_2 \left(\|\hat{u}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\hat{v}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\hat{w}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} \right) e^{-2\gamma_1 t}, \\ \|w(x, t) - w_e\|_{\mathcal{H}_\sigma} &\leq c_3 \left(\|\hat{u}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\hat{v}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\hat{w}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} \right) e^{-2\gamma_1 t}, \end{aligned}$$

где $c_1, c_2, c_3 > 0$, $\gamma_1 > \gamma > 0$.

Из данной теоремы 2 вытекает асимптотическая устойчивость. В [12] получена система для коэффициентов Фурье $\{u_0, v_0, w_0, u_k, v_k, w_k, k \in \mathbb{Z}_0\}$:

$$\begin{aligned} u_k &= \left(u_k^0 + \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_k^0 \right) e^{-ikt} - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_k + ik \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int_0^t e^{ik(s-t)} v_k ds, \\ w_k &= \left(w_k^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_k^0 \right) e^{ikt} - \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_k - ik \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int_0^t e^{-ik(s-t)} v_k ds, \\ v_k &= v_k^0 e^{-L_e t/\varepsilon} + y_k, \quad k \in \mathbb{Z}_0. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы средние

$$u_0^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u}^0(x) dx = v_0^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{v}^0(x) dx = w_0^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{w}^0(x) dx = 0.$$

Тогда

$$u_0(t) = -\frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_0(t), \quad w_0(t) = -\frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_0(t).$$

В [12] доказано, что для y_k имеет место бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_k + \frac{1}{\varepsilon} L_e y_k + \frac{1}{\varepsilon} ik \int_0^t \left(u_e e^{-ik(s-t)} - w_e e^{ik(s-t)} \right) y_k ds &= 2 \frac{1}{\varepsilon} v_e^{1/2} \mathcal{D}_k^+ e^{ikt} + 2 \frac{1}{\varepsilon} v_e^{1/2} \mathcal{D}_k^- e^{-ikt} + \\ &+ e^{-L_e t/\varepsilon} \left(f_{k,L}(t) + f_{k,B}(t) \right) - \varepsilon v_e^{1/2} T_k^{\text{add}}(y) - \varepsilon v_e^{1/2} \left(\mathcal{L}_k(y) + B_k(y, y) \right), \quad (4) \end{aligned}$$

$$y_k|_{t=0} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Здесь $T_k^{\text{add}}(y)$ — оператор возмущения базовой системы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_k + \frac{1}{\varepsilon} L_e y_k + \frac{1}{\varepsilon} ik \int_0^t \left(u_e e^{-ik(s-t)} - w_e e^{ik(s-t)} \right) y_k ds &= 2 \frac{1}{\varepsilon} v_e^{1/2} \mathcal{D}_k^+ e^{ikt} + 2 \frac{1}{\varepsilon} v_e^{1/2} \mathcal{D}_k^- e^{-ikt} + \\ &+ e^{-L_e t/\varepsilon} \left(f_{k,L}(t) + f_{k,B}(t) \right) - \varepsilon v_e^{1/2} \left(\mathcal{L}_k(y) + B_k(y, y) \right), \quad (5) \end{aligned}$$

$$y_k|_{t=0} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Выражения $\mathcal{D}_k^+$, $\mathcal{D}_k^-$, $f_{k,L}(t)$, $f_{k,B}(t)$, $\mathcal{L}_k(y)$, $B_k(y, y)$ определены в [12]. Далее будет рассматриваться невозмущенная система (5). Системе (4) с оператором возмущения будет посвящена другая публикация.

3. Конечная аппроксимация. Для построения аппроксимационного решения задачи Коши (3) в [12] введена конечная аппроксимация бесконечной системы (5):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_k^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon} L_e y_k^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon} i k \int_0^t \left(u_e e^{-ik(s-t)} - w_e e^{ik(s-t)} \right) y_k^{(m)} ds = 2 \frac{1}{\varepsilon} v_e^{1/2} \mathcal{D}_{k,m}^+ e^{ikt} + \\ + 2 \frac{1}{\varepsilon} v_e^{1/2} \mathcal{D}_{k,m}^- e^{-ikt} + e^{-L_e t/\varepsilon} \left(f_{k,L}^{(m)}(t) + f_{k,B}^{(m)}(t) \right) - \varepsilon v_e^{1/2} \left(\mathcal{L}_k^{(m)}(y^{(m)}) + B_k^{(m)}(y^{(m)}, y^{(m)}) \right), \quad (6) \\ y_k^{(m)}|_{t=0} = 0, \quad |k| = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

В правой части (6) появляются секулярные члены $\frac{2}{\varepsilon} v_e^{1/2} \mathcal{D}_{k,m}^+ e^{ikt}$, $\frac{2}{\varepsilon} v_e^{1/2} \mathcal{D}_{k,m}^- e^{-ikt}$, не принадлежащие $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$. Введем векторное пространство $Q^{(m)} = (Q_k^{(m)}, |k| \leq m, k \neq 0) \in \mathcal{H}_\sigma^{(m)}$ с нормой

$$\|Q^{(m)}\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}^2 = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} |k|^{2\sigma} |Q_k^{(m)}|^2.$$

Решение системы (6) будем искать в виде

$$\begin{aligned} y_k^{(m)} = Q_{k,m}^+ T_k^{-1}(e^{ikt}) + Q_{k,m}^- T_k^{-1}(e^{-ikt}) + T_k^{-1}(z_k^{(m)}), \quad z_k^{(m)}|_{t=0} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_0, \\ Q_{k,m}^+, Q_{k,m}^- \in \mathcal{H}_\sigma^{(m)}, \quad Z^{(m)} = \{z_k^{(m)}, |k| \leq m\} \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)}). \end{aligned}$$

В переменных $(z_k^{(m)}, Q_{k,m}^+, Q_{k,m}^-)$ (см. [12]) система (6) при выполнении условий секулярности

$$Q_{k,m}^+ = \frac{2}{\varepsilon} v_e^{1/2} \mathcal{D}_{k,m}^+ - \varepsilon v_e^{1/2} S^+(Q_m^-, Q_m^+), \quad (7)$$

$$Q_{k,m}^- = \frac{2}{\varepsilon} v_e^{1/2} \mathcal{D}_{k,m}^- - \varepsilon v_e^{1/2} S^-(Q_m^-, Q_m^+), \quad |k| = 1, \dots, m, \quad (8)$$

запишется в виде:

$$\begin{aligned} z_k^{(m)} = e^{-L_e t/\varepsilon} \left(F_{k,L}^{(m)}(t) + F_{k,B}^{(m)}(t) \right) - \varepsilon v_e^{1/2} \left(H_{k,L}^{(m)}(t) + H_{k,B}^{(m)}(t) \right) - \\ - \varepsilon v_e^{1/2} \left(\mathcal{U}_k^{(m)}(T^{-1}(Z^{(m)})) + B_k^{(m)}(T^{-1}(Z^{(m)}), T^{-1}(Z^{(m)})) \right), \quad (9) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} 2v_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{D}_{k,m}^- = 2v_e^{1/2} w_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} \left(u_k^0 - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik - L_e/\varepsilon)} v_k^0 \right) + \\ + \varepsilon v_e^{1/2} \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \overline{\left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} v_{k_2}^0 \right)} \left(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_1 - L_e/\varepsilon)} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_1}^0 \right), \\ 2v_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{D}_{k,m}^+ = 2v_e^{1/2} u_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} \left(w_k^0 + \frac{1}{2} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik + L_e/\varepsilon)} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_k^0 \right) + \\ + \varepsilon v_e^{1/2} \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_2}^0 \right) \overline{\left(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_1 - L_e/\varepsilon)} v_{k_1}^0 \right)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^+(Q_m^-, Q_m^+) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \left\{ \left(\overline{\left(u_{k_1}^0 + \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{v_{k_1}^0} \right)} \frac{\varepsilon}{u_e} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} Q_{k_2,m}^+ + \left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_2}^0 \right) \frac{\varepsilon}{w_e} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{Q_{k_1,m}^-} \right) - \right. \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{ik_2}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} v_{k_2}^0 \frac{\varepsilon}{w_e} \overline{Q_{k_1,m}^-} + \frac{\varepsilon}{u_e} Q_{k_2,m}^+ \frac{ik_1}{(ik_1 + L_e/\varepsilon)} \overline{v_{k_1}^0} \right) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{w_e} \frac{\varepsilon}{u_e} Q_{k_2,m}^+ \overline{Q_{k_1,m}^-} \Bigg\},$$

$$S^-(Q_m^-, Q_m^+) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \left\{ \left(\left(\overline{w_{k_2}^0} + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{v_{k_2}^0} \right) \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{\varepsilon}{w_e} Q_{k_1,m}^- + \left(u_{k_1}^0 + \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_1}^0 \right) \frac{\varepsilon}{u_e} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{Q_{k_2,m}^+} \right) + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{ik_1}{(ik_1 - L_e/\varepsilon)} v_{k_1}^0 \frac{\varepsilon}{u_e} \overline{Q_{k_2,m}^+} + \frac{\varepsilon}{w_e} Q_{k_1,m}^- \frac{ik_2}{(ik_2 - L_e/\varepsilon)} \overline{v_{k_2}^0} \right) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{w_e} \frac{\varepsilon}{u_e} Q_{k_1,m}^- \overline{Q_{k_2,m}^+} \right\},$$

$$\mathcal{U}_k^{(m)} \left(T^{-1}(Z^{(m)}) \right) = L_k^{(m)} \left(T^{-1}(Z^{(m)}) \right) + \\ + B_k^{(m)} \left(T^{-1}(D^{(m)}), T^{-1}(Z^{(m)}) \right) + B_k^{(m)} \left(T^{-1}(Z^{(m)}), T^{-1}(D^{(m)}) \right),$$

$$D^{(m)} = \left(D_k^{(m)}, k \in \mathbb{Z}_0, |k| \leq m \right), \quad D_k^{(m)} = Q_{k,m}^- e^{-ikt} + Q_{k,m}^+ e^{ikt}, \\ F_{k,B}^{(m)}(t) = f_{k,B}^{(m)}(t) + F_k^{B,2}(t) + F_k^{B,1}(t), \quad F_{k,L}^{(m)}(t) = f_{k,L}^{(m)}(t).$$

Уравнение для нулевой моды в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, при выполнении условия секулярности

$$\mathcal{D}_0(Q_m^+, Q_m^-) = D_0 - D_0^{(1)} = 0, \quad (10)$$

имеет следующий вид:

$$z_0^{(m)} = -\frac{3}{2} \varepsilon v_e^{1/2} \int_0^t e^{L_e(s-t)/\varepsilon} \left[z_0^{(m)} \overline{z_0^{(m)}} + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \left(\mathcal{L}_0^{(1)} \left(T^{-1}(Z^{(m)}) \right) + B_0^{(m)} \left(T^{-1}(Z^{(m)}), T^{-1}(Z^{(m)}) \right) + f_0(s)^{(m)} e^{-L_e s/\varepsilon} + h_0^{(m)}(s) \right) \right] ds, \quad (11)$$

где

$$D_0^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k_1+k_2=0, \\ k_1, k_2 \neq 0}} \left\{ \left(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_1 - L_e/\varepsilon)} v_{k_1}^0 \right) \frac{\varepsilon}{u_e} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{Q_{k_2,m}^+} + \right. \\ \left. + \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{\varepsilon}{u_e} Q_{k_2,m}^+ \overline{\left(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_1 - L_e/\varepsilon)} v_{k_1}^0 \right)} + \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{\varepsilon}{w_e} Q_{k_1,m}^- \overline{\left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} v_{k_2}^0 \right)} + \right. \\ \left. + \left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} v_{k_2}^0 \right) \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{\varepsilon}{w_e} \overline{Q_{k_1,m}^-} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{w_e u_e} \left(Q_{k_1,m}^- \overline{Q_{k_2,m}^+} + Q_{k_2,m}^+ \overline{Q_{k_1,m}^-} \right) \right\},$$

$$\mathcal{L}_0^{(1)} \left(T^{-1}(Z^{(m)}) \right) = B_0^{(m)} \left(T^{-1}(D^{(m)}), T^{-1}(Z^{(m)}) \right) + \\ + B_0^{(m)} \left(T^{-1}(Z^{(m)}), T^{-1}(D^{(m)}) \right) + \mathcal{L}_0 \left(T^{-1}(Z^{(m)}) \right).$$

4. Проверка условий секулярности. Проверим уравнения секулярности для нулевой и ненулевой моды. Решение уравнений секулярности (см. [12]) имеет вид

$$Q_{k,m}^+ = 2v_e^{1/2}u_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}\left(w_k^0 + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\varepsilon}L_e}{(ik + L_e/\varepsilon)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0\right), \quad (12)$$

$$Q_{k,m}^- = 2v_e^{1/2}w_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}\left(u_k^0 - \frac{1}{2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\frac{L_e/\varepsilon}{(ik - L_e/\varepsilon)}v_k^0\right). \quad (13)$$

Имеем для $S^+(Q_m^-, Q_m^+)$:

$$\begin{aligned} S^+(Q_m^-, Q_m^+) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \left\{ \left(\left(\overline{u_{k_1}^0} + \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{v_{k_1}^0} \right) \frac{\varepsilon}{u_e} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} Q_{k_2,m}^+ + \left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_2}^0 \right) \frac{\varepsilon}{w_e} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{Q_{k_1,m}^-} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{ik_2}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} v_{k_2}^0 \frac{\varepsilon}{w_e} \overline{Q_{k_1,m}^-} + \frac{\varepsilon}{u_e} Q_{k_2,m}^+ \frac{ik_1}{(ik_1 + L_e/\varepsilon)} \overline{v_{k_1}^0} \right) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{w_e} \frac{\varepsilon}{u_e} Q_{k_2,m}^+ \overline{Q_{k_1,m}^-} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \left\{ \left(\left(\overline{u_{k_1}^0} + \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \overline{v_{k_1}^0} \right) \frac{\varepsilon}{u_e} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} 2 \frac{u_e^{1/2} v_e^{1/2}}{\varepsilon} \left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} v_{k_2}^0 \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_2}^0 \right) \frac{\varepsilon}{w_e} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} 2 \frac{w_e^{1/2} v_e^{1/2}}{\varepsilon} \overline{\left(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{ik_1 - L_e/\varepsilon} v_{k_1}^0 \right)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{ik_2}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} v_{k_2}^0 \frac{\varepsilon}{w_e} 2 \frac{w_e^{1/2} v_e^{1/2}}{\varepsilon} \overline{\left(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{ik_1 - L_e/\varepsilon} v_{k_1}^0 \right)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\varepsilon}{u_e} 2 \frac{u_e^{1/2} v_e^{1/2}}{\varepsilon} \overline{\left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} v_{k_2}^0 \right)} \frac{ik_1}{(ik_1 + L_e/\varepsilon)} \overline{v_{k_1}^0} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{w_e} \frac{\varepsilon}{u_e} 2 \frac{u_e^{1/2} v_e^{1/2}}{\varepsilon} \overline{\left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} v_{k_2}^0 \right)} 2 \frac{w_e^{1/2} v_e^{1/2}}{\varepsilon} \overline{\left(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{ik_1 - L_e/\varepsilon} v_{k_1}^0 \right)} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \left\{ 4 \left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} v_{k_2}^0 \right) \overline{\left(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{ik_1 - L_e/\varepsilon} v_{k_1}^0 \right)} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} v_{k_2}^0 \right) \overline{\left(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{ik_1 - L_e/\varepsilon} v_{k_1}^0 \right)} \right\} = \\ &= \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} v_{k_2}^0 \right) \overline{\left(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{ik_1 - L_e/\varepsilon} v_{k_1}^0 \right)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2v_e^{1/2}u_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}\left(w_k^0 + \frac{1}{2}\frac{L_e/\varepsilon}{(ik + L_e/\varepsilon)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0\right) &= 2v_e^{1/2}u_e^{1/2}\frac{1}{\varepsilon}\left(w_k^0 + \frac{1}{2}\frac{L_e/\varepsilon}{(ik + L_e/\varepsilon)}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}v_k^0\right) + \\ &+ \varepsilon v_e^{1/2} \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_2}^0 \right) \overline{\left(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_1 - L_e/\varepsilon)} v_{k_1}^0 \right)} - \end{aligned}$$

$$- \varepsilon v_e^{1/2} \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} v_{k_2}^0 \right) \overline{\left(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{ik_1 - L_e/\varepsilon} v_{k_1}^0 \right)}.$$

Отсюда получаем, что

$$2v_e^{1/2} u_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} \left(w_k^0 + \frac{1}{2} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik + L_e/\varepsilon)} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_k^0 \right) - 2v_e^{1/2} u_e^{1/2} \frac{1}{\varepsilon} \left(w_k^0 + \frac{1}{2} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik + L_e/\varepsilon)} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_k^0 \right) = 0,$$

что соответствует выполнению уравнения секулярности (7) невозмущенной задачи (6). Аналогично проводится проверка для (8).

Проверим выполнение условия секулярности $\mathcal{D}_0(Q_m^+, Q_m^-) = 0$ для нулевой моды. А именно, подставим найденное в [12] решение Q_m^+ и Q_m^- в $\mathcal{D}_0(Q_m^+, Q_m^-)$. Преобразуем $D_0^{(1)}$:

$$\begin{aligned} D_0^{(1)}(Q_m^+, Q_m^-) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{k_1+k_2=0, \\ k_1, k_2 \neq 0}} \left\{ \left(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_1 - L_e/\varepsilon)} v_{k_1}^0 \right) \frac{\varepsilon}{u_e} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} 2 \frac{u_e^{1/2} v_e^{1/2}}{\varepsilon} \overline{\left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} v_{k_2}^0 \right)} + \right. \\ &\quad + \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{\varepsilon}{u_e} 2 \frac{u_e^{1/2} v_e^{1/2}}{\varepsilon} \left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} v_{k_2}^0 \right) \overline{\left(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_1 - L_e/\varepsilon)} v_{k_1}^0 \right)} + \\ &\quad + \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{\varepsilon}{w_e} 2 \frac{w_e^{1/2} v_e^{1/2}}{\varepsilon} \left(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{ik_1 - L_e/\varepsilon} v_{k_1}^0 \right) \overline{\left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} v_{k_2}^0 \right)} + \\ &\quad + \left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} v_{k_2}^0 \right) \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{\varepsilon}{w_e} 2 \frac{w_e^{1/2} v_e^{1/2}}{\varepsilon} \overline{\left(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{ik_1 - L_e/\varepsilon} v_{k_1}^0 \right)} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{w_e u_e} \left\{ 2 \frac{w_e^{1/2} v_e^{1/2}}{\varepsilon} \left(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{ik_1 - L_e/\varepsilon} v_{k_1}^0 \right) \overline{2 \frac{u_e^{1/2} v_e^{1/2}}{\varepsilon} \left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} v_{k_2}^0 \right)} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{u_e^{1/2} v_e^{1/2}}{\varepsilon} \left(w_{k_2}^0 + \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} v_{k_2}^0 \right) \overline{2 \frac{w_e^{1/2} v_e^{1/2}}{\varepsilon} \left(u_{k_1}^0 - \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \frac{L_e/\varepsilon}{ik_1 - L_e/\varepsilon} v_{k_1}^0 \right)} \right\} = \\ &= \sum_{\substack{k_1+k_2=0, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} \left\{ \overline{\left(w_{k_2}^0 + \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_2}^0 \right)} \left(u_{k_1}^0 - \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_1 - L_e/\varepsilon)} \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_1}^0 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \overline{\left(u_{k_1}^0 - \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_1 - L_e/\varepsilon)} \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_1}^0 \right)} \left(w_{k_2}^0 + \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_2}^0 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Вычитаем из D_0 :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0(Q_m^+, Q_m^-) &= D_0 - D_0^{(1)} = \\ &= \sum_{\substack{k_1+k_2=0, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} \left\{ \overline{\left(w_{k_2}^0 + \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_2}^0 \right)} \left(u_{k_1}^0 - \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_1 - L_e/\varepsilon)} \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_1}^0 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \overline{\left(u_{k_1}^0 - \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_1 - L_e/\varepsilon)} \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_1}^0 \right)} \left(w_{k_2}^0 + \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_2}^0 \right) \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{k_1+k_2=0, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} \left\{ \overline{\left(w_{k_2}^0 + \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_2}^0 \right)} \left(u_{k_1}^0 - \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_1 - L_e/\varepsilon)} \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_1}^0 \right) - \right. \\
& \quad \left. - \overline{\left(u_{k_1}^0 - \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_1 - L_e/\varepsilon)} \frac{1}{2} \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_1}^0 \right)} \left(w_{k_2}^0 + \frac{L_e/\varepsilon}{(ik_2 + L_e/\varepsilon)} \frac{1}{2} \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} v_{k_2}^0 \right) \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, Q_m^+ и Q_m^- есть решение уравнения секулярности нулевой моды:

$$\mathcal{D}_0(Q_m^+, Q_m^-) = 0.$$

5. Оценки линейризованного оператора в банаховом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})$. Для доказательства теоремы существования и единственности решения системы нелинейных уравнений (9) нам понадобятся следующие оценки линейризованного оператора $T_k^{-1}(z_k^{(m)})$ в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})$ (доказательства см. в [12]).

Лемма 1. Пусть $0 < \mu_0 < 1$. Тогда существует такая константа $c_0 > 0$, не зависящая от ε, t , что для любых $k \in \mathbb{Z}_0$ имеем

$$\|T^{-1}(Z^{(m)})\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leq c_0 \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}. \quad (14)$$

Более того, для $c_1 > 0$ имеем

$$\left\| \frac{d}{dt} T^{-1}(Z^{(m)}) \right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leq c_1 \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}. \quad (15)$$

Теперь положим

$$I_k^1(T_k^{-1}(z_k)) = -i \int_0^t e^{ik(s-t)} T_k^{-1}(z_k) ds, \quad I_k^2(T_k^{-1}(z_k)) = i \int_0^t e^{-ik(s-t)} T_k^{-1}(z_k) ds,$$

$$I^j(T^{-1}(Z)) = \{I_k^j(T_k^{-1}(z_k)), k \in \mathbb{Z}_0\}, \quad \mathcal{I}^j(T^{-1}(Z)) = \{k I_k^j(T_k^{-1}(z_k)), k \in \mathbb{Z}_0\}, \quad j = 1, 2.$$

Лемма 2. Существует такая константа $c_2 > 0$ не зависящая от ε, t , что для любых $k \in \mathbb{Z}_0$ и $\gamma = \varepsilon\mu_0 > 0$ имеем

$$\|\mathcal{I}^j(T^{-1}(Z^{(m)}))\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leq c_2 \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}. \quad (16)$$

В то же время

$$\|I^j(T^{-1}(Z^{(m)}))\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leq c_3 \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}. \quad (17)$$

Далее, определим класс решений следующей задачи Коши:

$$T_k(z_k^{(m)}) = \frac{d}{dt} z_k^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon} L_e z_k^{(m)} + \frac{ik}{\varepsilon} \int_0^t \left(u_e e^{-ik(s-t)} - w_e e^{ik(s-t)} \right) z_k^{(m)} ds = e^{-ikt}, \quad z_k^{(m)}|_{t=0} = 0. \quad (18)$$

Лемма 3. Существует такая константа $c_4 > 0$, не зависящая от ε, t , что для любых $k \in \mathbb{Z}_0$ и $\gamma = \varepsilon\mu_0, \mu_0 > 0$, решение задачи Коши (18) $Z_{\text{sol}}^{-(m)} = \{T_k^{-1}(e^{-ikt}), k \in \mathbb{Z}_0, |k| \leq m\}$ удовлетворяет условиям

$$Z_{\text{sol}}^{-(m)} \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+), \quad \gamma = \varepsilon\mu_0, \quad \|Z_{\text{sol}}^{-(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leq c_4 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0.$$

Более того, для любой $Q_m^- = \{Q_{k,m}^-, k \in \mathbb{Z}_0, |k| \leq m\} \in \mathcal{H}_\sigma^{(m)}$ имеют место следующие оценки:

$$\|Q_m^- Z_{\text{sol}}^{-(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leq c_5 \|Q_m^-\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}, \quad \left\| \frac{d}{dt} Q_m^- Z_{\text{sol}}^{-(m)} \right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leq c_6 \|Q_m^-\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}.$$

Аналогично определяем решение задачи Коши

$$T_k(z_k^{(m)}) = \frac{d}{dt} z_k^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon} L_e z_k^{(m)} + \frac{ik}{\varepsilon} \int_0^t (u_e e^{-ik(s-t)} - w_e e^{ik(s-t)}) z_k^{(m)} ds = e^{ikt}, \quad z_k^{(m)}|_{t=0} = 0. \quad (19)$$

Лемма 4. *Существует такая константа $c_7 > 0$, не зависящая от ε , m , что для любых $k \in \mathbb{Z}_0$ и $\gamma = \varepsilon\mu_0$, $\mu_0 > 0$, решение задачи Коши (19) $Z_{\text{sol}}^{+, (m)} = \{T_k^{-1}(e^{ikt}), k \in \mathbb{Z}_0, |k| \leq m\}$ удовлетворяет условиям*

$$Z_{\text{sol}}^{+, (m)} \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+), \quad \gamma = \varepsilon\mu_0, \quad \|Z_{\text{sol}}^{+, (m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leq c_7 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0.$$

Более того, для любой $Q_m^+ = \{Q_{k,m}^+, k \in \mathbb{Z}_0, |k| \leq m\} \in \mathcal{H}_\sigma^{(m)}$ имеют место следующие оценки:

$$\|Q_m^+ Z_{\text{sol}}^{+, (m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leq c_8 \|Q_m^+\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}, \quad \left\| \frac{d}{dt} Q_m^+ Z_{\text{sol}}^{+, (m)} \right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leq c_9 \|Q_m^+\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}}.$$

6. Оценки правой части нелинейного уравнения.

Лемма 5. *Для $\sigma > 2$ справедливы следующие оценки:*

$$\varepsilon w_e^{1/2} \|B^{(m)}(T^{-1}(Z^{(m)}), T^{-1}(Z^{(m)}))\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leq c_{1,\sigma} \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^2,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon w_e^{1/2} \|L^{(m)}(T^{-1}(Z^{(m)}))\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^2 &\leq \\ &\leq \left(\|u^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|v^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|w^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} \right) c_{2,\sigma} \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon w_e^{1/2} \|B^{(m)}(T^{-1}(Z^{(m)}), T^{-1}(D^{(m)}))\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} &\leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\|u^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|v^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|w^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} \right) c_{3,\sigma} \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon w_e^{1/2} \|B^{(m)}(T^{-1}(D^{(m)}), T^{-1}(Z^{(m)}))\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} &\leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\|u^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|v^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|w^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} \right) c_{4,\sigma} \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}, \end{aligned}$$

$$\|Q_m^-\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} \leq \frac{c_1}{\varepsilon} \left(\|u^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|v^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|w^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} \right),$$

$$\|Q_m^+\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} \leq \frac{c_2}{\varepsilon} \left(\|u^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|v^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|w^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} \right),$$

где

$$D^{(m)} = \left(D_k^{(m)}, k \in \mathbb{Z}_0, |k| \leq m \right), \quad D_k^{(m)} = Q_{k,m}^- e^{-ikt} + Q_{k,m}^+ e^{ikt}.$$

Доказательство. Для билинейной формы имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 v_e \|B^{(m)}(T^{-1}(Z^{(m)}), T^{-1}(Z^{(m)}))\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^2 &\leq \\ &\leq \varepsilon^2 v_e \left\| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \left\{ T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) \overline{T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)})} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} \left(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) + ik_1 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) ds \right) \times \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) - ik_2 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int_0^t e^{-ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) ds \right) \Bigg\} \Bigg\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^2 + \\
& + \varepsilon^2 v_e \Bigg\| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \left\{ T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) \overline{T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)})} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4} \left(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) - ik_2 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int_0^t e^{-ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) ds \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times \overline{\left(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) + ik_1 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) ds \right)} \right\} \Bigg\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^2 = B_1 + B_2.
\end{aligned}$$

Переходя к оценке для B_1 , имеем

$$\begin{aligned}
B_1 = \varepsilon^2 v_e \int_0^\infty e^{2\gamma t} \sup_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} |k|^{2\sigma} \Bigg| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \left\{ T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) \overline{T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)})} - \right. \\
\quad \left. - \frac{1}{4} \left(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) + ik_1 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) ds \right) \times \right. \\
\quad \left. \times \overline{\left(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) - ik_2 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int_0^t e^{-ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) ds \right)} \right\} \Bigg|^2 dt.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством

$$(|k_1| + |k_2|)^\sigma \leq c_\sigma (|k_1|^\sigma + |k_2|^\sigma), \quad c_\sigma = 2^{\sigma-1},$$

вносим супремум под знак суммы:

$$\begin{aligned}
B_1 \leq \varepsilon^2 v_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \Bigg| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \left\{ \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m}} |k_1|^\sigma T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) |k_2|^\sigma \frac{1}{|k_2|^\sigma} \overline{T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)})} - \right. \\
\quad \left. - \frac{1}{4} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m}} |k_1|^\sigma \left(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) + ik_1 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) ds \right) \times \right. \\
\quad \left. \times \frac{1}{|k_2|^\sigma} \overline{\left(-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} |k_2|^\sigma T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) - ik_2 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int_0^t e^{-ik_2(s-t)} |k_2|^\sigma T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) ds \right)} \right\} \Bigg|^2 dt + \\
\quad + \varepsilon^2 v_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \Bigg| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \left\{ \frac{|k_1|^\sigma}{|k_1|^\sigma} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} |k_2|^\sigma \overline{T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)})} - \right. \\
\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{1}{|k_1|^\sigma} \left(-\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} |k_1|^\sigma T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) + ik_1 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int_0^t e^{ik_1(s-t)} |k_1|^\sigma T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) ds \right) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} \left(\overline{-\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} |k_2|^\sigma T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) - ik_2 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} \int_0^t e^{-ik_2(s-t)} |k_2|^\sigma T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) ds} \right) \Big|^2 dt.$$

Введем обозначения

$$A_1 = T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) \overline{T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)})}, \quad A_2 = -T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) + ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) ds,$$

$$A_3 = \overline{-T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) - ik_2 \int_0^t e^{-ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) ds}.$$

С учетом этих обозначений B_1 примет вид

$$B_1 \leq \varepsilon^2 v_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \left\{ \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m}} |k_1|^\sigma |k_2|^\sigma \frac{1}{|k_2|^\sigma} A_1 - \frac{1}{4} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m}} |k_1|^\sigma \frac{1}{|k_2|^\sigma} |k_2|^\sigma A_2 A_3 \right\} \right|^2 dt +$$

$$+ \varepsilon^2 v_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \left\{ |k_1|^\sigma \frac{1}{|k_1|^\sigma} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} |k_2|^\sigma A_1 - \frac{1}{4} \frac{1}{|k_1|^\sigma} |k_1|^\sigma \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} |k_2|^\sigma A_2 A_3 \right\} \right|^2 dt. \quad (20)$$

Имеем

$$R = \varepsilon^2 v_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m}} |k_1|^\sigma |k_2|^\sigma \frac{1}{|k_2|^\sigma} A_1 \right|^2 =$$

$$= \varepsilon^2 v_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m}} |k_1|^\sigma |k_2|^\sigma \frac{1}{|k_2|^\sigma} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) \overline{T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)})} \right|^2 \leq$$

$$\leq c_\sigma^2 \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} |k_2|^{2\sigma} \left| \overline{T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)})} \right|^2 \varepsilon^2 v_e \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left| \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m}} |k_1|^\sigma T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) \right|^2 \left(\sum_{k_2=1}^\infty \frac{1}{|k_2|^\sigma} \right)^2.$$

Для супремума имеем оценку

$$N = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} \left| T_{k_2}^{-1}(|k_2|^\sigma z_{k_2}^{(m)}) \right|^2 = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} \int_0^t \frac{d}{ds} \left| T_{k_2}^{-1}(|k_2|^\sigma z_{k_2}^{(m)}) \right|^2 ds \leq$$

$$\leq 2 \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} \int_0^t \left| T_{k_2}^{-1}(|k_2|^\sigma z_{k_2}^{(m)}) \right| \cdot \left| \frac{d}{ds} T_{k_2}^{-1}(|k_2|^\sigma z_{k_2}^{(m)}) \right| ds. \quad (21)$$

Используя неравенство Гельдера, получим

$$N \leq 2 \left(\int_0^\infty \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} \left| T_{k_2}^{-1}(|k_2|^\sigma z_{k_2}^{(m)}) \right|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} \left| \frac{d}{ds} T_{k_2}^{-1}(|k_2|^\sigma z_{k_2}^{(m)}) \right|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Заметим, что $1 \leq e^{2\gamma t}$, $t \geq 0$. Значит, можно переписать неравенство в виде

$$\begin{aligned}
N &\leq 2 \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} \left(\int_0^\infty e^{2\gamma s} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} \left| T_{k_2}^{-1}(|k_2|^\sigma z_{k_2}^{(m)}) \right|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty e^{2\gamma s} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} \left| \frac{d}{ds} T_{k_2}^{-1}(|k_2|^\sigma z_{k_2}^{(m)}) \right|^2 ds \right)^{1/2} = \\
&= 2 \|X_2^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \left\| \frac{d}{dt} X_2^{(m)} \right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} |k_2|^{2\sigma} \left| \overline{T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)})} \right|^2 \leq c_1 \|X_2^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \left\| \frac{d}{dt} X_2^{(m)} \right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})},$$

где

$$X_2^{(m)} = \left\{ T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}), \quad |k_2| \leq m, \quad k_2 \in \mathbb{Z}_0 \right\}.$$

После этого воспользуемся неравенствами (14), (15), в силу которых имеем

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} |k_2|^{2\sigma} \left| \overline{T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)})} \right|^2 \leq c_2 \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^2.$$

Далее,

$$\int_0^\infty e^{2\gamma t} \left| \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m}} |k_1|^\sigma T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) \right|^2 dt = \|X_1^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^2 \leq c_3^2 \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^2,$$

где

$$X_1^{(m)} = \left\{ T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}), \quad |k_1| \leq m, \quad k_1 \in \mathbb{Z}_0 \right\}.$$

В итоге получаем

$$R \leq c_{4,\sigma}^2 \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^4. \quad (22)$$

Переходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2 v_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \frac{1}{4} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m}} \frac{|k_1|^\sigma}{|k_2|^\sigma} |k_2|^\sigma A_2 A_3 \right|^2 dt = \\
&= \varepsilon^2 v_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \frac{1}{4} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m}} \frac{|k_1|^\sigma}{|k_2|^\sigma} |k_2|^\sigma \left(-T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) + ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) ds \right) \times \right. \\
&\quad \times \left. \left(-T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) - ik_2 \int_0^t e^{-ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) ds \right) \right|^2 dt \leq \\
&\leq \varepsilon^2 v_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \frac{1}{4} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m}} \frac{|k_1|^\sigma}{|k_2|^\sigma} |k_2|^\sigma T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) \overline{T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)})} \right|^2 dt + \\
&+ \varepsilon^2 v_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \frac{1}{4} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m}} \frac{|k_1|^\sigma}{|k_2|^\sigma} |k_2|^\sigma T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) ik_2 \int_0^t e^{-ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) ds \right|^2 dt + \\
&+ \varepsilon^2 v_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \frac{1}{4} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m}} \frac{|k_1|^\sigma}{|k_2|^\sigma} |k_2|^\sigma \overline{T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)})} ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) ds \right|^2 dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon^2 v_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \frac{1}{4} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m}} \frac{|k_1|^\sigma}{|k_2|^\sigma} |k_2|^\sigma i k_1 \int_0^t e^{i k_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) ds \times \right. \\
& \quad \left. \times \overline{\left(-i k_2 \int_0^t e^{-i k_2(s-t)} T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) ds \right)} \right|^2 dt = R_1 + R_2 + R_3 + R_4.
\end{aligned}$$

Первое слагаемое оценивается, как было сделано выше в (22):

$$R_1 \leq c_{2,\sigma}^2 \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^4.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
R_2 &= \varepsilon^2 v_e c_\sigma^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2|=1, \dots, m}} \frac{1}{4} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m}} \frac{|k_1|^\sigma}{|k_2|^\sigma} |k_2|^\sigma T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) i k_2 \int_0^t e^{-i k_2(s-t)} T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) ds \right|^2 dt \leq \\
&\leq \varepsilon^2 c_1 \sup_t \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} \left| i \int_0^t e^{-i k_2(s-t)} |k_2|^\sigma T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) ds \right|^2 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left| \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m}} |k_1|^\sigma T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m)}) \right|^2 dt \left(\sum_{k_2=1}^\infty \frac{k_2}{|k_2|^\sigma} \right)^2.
\end{aligned}$$

Здесь для вычисления супремума применяем неравенство Гельдера и оценку (14):

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} \left| i \int_0^t e^{-i k_2(s-t)} |k_2|^\sigma T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m)}) ds \right|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} c_0^2 \|X_2^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} c_1^2 \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^2.$$

Отсюда получаем неравенство

$$R_2 \leq \varepsilon c_{3,\sigma}^2 \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^4.$$

Аналогично находим оценки для R_3, R_4 :

$$R_3 \leq \varepsilon c_{4,\sigma}^2 \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^4, \quad R_4 \leq \varepsilon c_{5,\sigma}^2 \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^4.$$

Применяя полученные оценки к (20), приходим к неравенству

$$B_1 \leq c_{6,\sigma}^2 \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^4.$$

Также получим

$$B_2 \leq c_{7,\sigma}^2 \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^4.$$

Таким образом, имеем

$$\varepsilon^2 v_e \left\| B^{(m)}(T^{-1}(Z^{(m)}), T^{-1}(Z^{(m)})) \right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^2 \leq c_{8,\sigma}^2 \|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^4.$$

Остальные оценки доказываются аналогично. $\square$

7. Существование решения нелинейного уравнения. Решение нелинейного уравнения (9) найдем последовательностью итераций $X^{(j)} = (X_k^{(j)}, 1 \leq k \leq m)$:

$$\begin{aligned}
X_k^{(j)} &= e^{-L_e t / \varepsilon} \mathcal{F}_k^{(m)}(t) - \varepsilon v_e^{1/2} \mathcal{H}_k^{(m)}(t) - \\
&\quad - \varepsilon v_e^{1/2} \left(\mathcal{U}_k^{(m)}(T^{-1}(X^{(j-1)})) + B_k^{(m)}(T^{-1}(X^{(j-1)}), T^{-1}(X^{(j-1)})) \right), \quad j \geq 1, \quad (23) \\
X_k^{(0)} &= e^{-4w_e t / \varepsilon} \mathcal{F}_k^{(m)}(t) - \varepsilon v_e^{1/2} \mathcal{H}_k^{(m)}(t).
\end{aligned}$$

Здесь

$$\mathcal{F}_k^{(m)}(t) = F_{k,L}^{(m)}(t) + F_{k,B}^{(m)}(t), \quad \mathcal{H}_k^{(m)}(t) = H_{k,L}^{(m)}(t) + H_{k,B}^{(m)}(t).$$

Введем обозначения

$$\widehat{\mathcal{F}^{(m)}} = e^{-L_e t/\varepsilon} \mathcal{F}_k^{(m)}(t) - \varepsilon v_e^{1/2} \mathcal{H}_k^{(m)}(t), \quad \widehat{\mathcal{F}^{(m)}} = \left(\widehat{\mathcal{F}_k^{(m)}}, |k| \leq m, k \in \mathbb{Z}_0 \right).$$

Сформулируем теоремы ограниченности и фундаментальности последовательности итераций. Отсюда будет следовать теорема существования решения нелинейного уравнения.

Теорема 3. Пусть $\sigma > 2$ и существует такое $q \in (0, 1)$, не зависящее от m, ε , что

$$\frac{1}{1-q} c_{1,\sigma} \|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} c_{4,\sigma} \left(\|\widehat{u}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|\widehat{v}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|\widehat{w}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} \right) \leq q, \quad q \in (0, 1).$$

Тогда для любого $j \geq 1$ справедлива оценка

$$\|X^{(j)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leq \frac{1}{1-q} \|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}.$$

Теорема 4. Последовательность $X^{(j)}$ является фундаментальной в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})$, если

$$\frac{2}{1-q} c_{1,\sigma} \|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} c_{4,\sigma} \left(\|\widehat{u}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|\widehat{v}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|\widehat{w}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} \right) \leq q_1, \quad q_1 \in (0, 1).$$

Теорема 5. Пусть $\sigma > 2$. Тогда существует единственное решение $Z^{(m)} \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})$ нелинейного уравнения (9), если

$$\frac{2}{1-q} c_{1,\sigma} \|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} + c_{4,\sigma} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\|\widehat{u}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|\widehat{v}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|\widehat{w}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} \right) \leq q_2, \quad q_2 \in (0, 1),$$

для которого выполняется неравенство

$$\|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leq \frac{1}{1-q} \|\widehat{\mathcal{F}^{(m)}}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}.$$

Здесь q определяется теоремой ограниченности последовательности итераций. Перепишем теорему существования решения через начальные данные.

Теорема 6. Пусть $\sigma > 2$. Тогда существует единственное решение $Z^{(m)} \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})$ нелинейного уравнения (9), если

$$\left(\|\widehat{u}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|\widehat{v}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|\widehat{w}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} \right) \leq \varepsilon^{3/4} q_3, \quad q_3 \in (0, 1), \quad (24)$$

для которого выполняется неравенство

$$\|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \leq \frac{Q_{2,\sigma}}{\varepsilon} \left(\|\widehat{u}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|\widehat{v}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} + \|\widehat{w}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{(m)}} \right),$$

где

$$Q_{2,\sigma} = \frac{1}{1-q} \left(c_2 \sqrt{\varepsilon} + c_{2,\sigma} \varepsilon^{1/4} q_4 \right).$$

8. Аппроксимационное решение возмущенной системы Годунова—Султангазина. Рассмотрим последовательность аппроксимационных решений

$$\begin{aligned} \widehat{u}^{(m)}(x, t) &= u_0^{(m)}(t) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} u_k^{(m)}(t) e^{ikx}, \quad \widehat{v}^{(m)}(x, t) = v_0^{(m)}(t) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} v_k^{(m)}(t) e^{ikx}, \\ \widehat{w}^{(m)}(x, t) &= w_0^{(m)}(t) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} w_k^{(m)}(t) e^{ikx}. \end{aligned} \quad (25)$$

Теорема 7. Последовательность аппроксимационных решений фундаментальна по норме гильбертова пространства $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)$. Более того, она сходится к слабому решению $\{\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{w}\}$ задачи Коши (3):

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\widehat{u}(\partial_t + \partial_x) + \frac{1}{\varepsilon} w_e^{1/2} \left(2v_e^{1/2} \widehat{v} - u_e^{1/2} \widehat{w} - w_e^{1/2} \widehat{u} \right) + \varepsilon w_e^{1/2} (\widehat{v}^2 - \widehat{u} \widehat{w}) \right) \varphi(x, t) dx dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^\infty \widehat{u}^0 \varphi(x, t) \Big|_{t=0} dx = 0, \quad (26)$$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\widehat{v} \partial_t - \frac{2}{\varepsilon} v_e^{1/2} \left(2v_e^{1/2} \widehat{v} - u_e^{1/2} \widehat{w} - w_e^{1/2} \widehat{u} \right) - 2\varepsilon v_e^{1/2} (\widehat{v}^2 - \widehat{u} \widehat{w}) \right) \psi(x, t) dx dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^\infty \widehat{v}^0 \psi(x, t) \Big|_{t=0} dx = 0,$$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\widehat{w}(\partial_t - \partial_x) + \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \left(2v_e^{1/2} \widehat{v} - u_e^{1/2} \widehat{w} - w_e^{1/2} \widehat{u} \right) + \varepsilon u_e^{1/2} (\widehat{v}^2 - \widehat{u} \widehat{w}) \right) \eta(x, t) dx dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^\infty \widehat{w}^0 \eta(x, t) \Big|_{t=0} dx = 0$$

для любых тестовых функций $\varphi, \psi, \eta \in C^\infty(\mathbb{R}_+; C_0^\infty(R^1))$ и существует такое T , что $\varphi(x, T) = \psi(x, T) = \eta(x, T) = 0$.

Доказательство. Докажем, что предел

$$\widehat{u}(t, x) = u_0(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} u_k(t) e^{ikx}, \quad \widehat{v}(t, x) = v_0(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} v_k(t) e^{ikx}, \quad \widehat{w}(t, x) = w_0(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} w_k(t) e^{ikx}$$

в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)$ аппроксимационных решений (25) есть слабое решение задачи Коши (3). Докажем справедливость первого интегрального тождества (26). Для этого добавим и вычтем интегральное тождество для $\widehat{u}^{(m)}$ в левой части (26). Имеем

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(-\widehat{u}(\partial_t + \partial_x) \varphi(x, t) - \frac{1}{\varepsilon} w_e^{1/2} \left(2v_e^{1/2} \widehat{v} - u_e^{1/2} \widehat{w} - w_e^{1/2} \widehat{u} \right) \varphi(x, t) - \right.$$

$$\left. - \varepsilon w_e^{1/2} (\widehat{v}^2 - \widehat{u} \widehat{w}) \varphi(x, t) \right) dx dt - \int_{-\infty}^\infty \widehat{u}^0 \varphi(x, t) \Big|_{t=0} dx =$$

$$= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(-\widehat{u}^{(m)}(\partial_t + \partial_x) \varphi(x, t) - \frac{1}{\varepsilon} w_e^{1/2} \left(2v_e^{1/2} \widehat{v}^{(m)} - u_e^{1/2} \widehat{w}^{(m)} - w_e^{1/2} \widehat{u}^{(m)} \right) \varphi(x, t) - \right.$$

$$\left. - \varepsilon w_e^{1/2} \left((\widehat{v}^{(m)})^2 - \widehat{u}^{(m)} \widehat{w}^{(m)} \right) \varphi(x, t) \right) dx dt - \int_{-\infty}^\infty \widehat{u}^{(m)} \Big|_{t=0} \varphi(x, t) \Big|_{t=0} dx -$$

$$- \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left((\widehat{u} - \widehat{u}^{(m)}) \partial_t \varphi(x, t) + (\widehat{u} - \widehat{u}^{(m)}) \partial_x \varphi(x, t) \right) dx dt +$$

$$+ \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(-\frac{1}{\varepsilon} w_e^{1/2} \left(2v_e^{1/2} (\widehat{v} - \widehat{v}^{(m)}) - u_e^{1/2} (\widehat{w} - \widehat{w}^{(m)}) - w_e^{1/2} (\widehat{u} - \widehat{u}^{(m)}) \right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon w_e^{1/2} \left((\widehat{v})^2 - (\widehat{v}^{(m)})^2 - (\widehat{u}\widehat{w} - \widehat{u}^{(m)}\widehat{w}^{(m)}) \right) \varphi(x, t) dx dt - \\
& - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\widehat{u}(x, 0) - \widehat{u}^{(m)}(x, 0) \right) \varphi(x, 0) dx = I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
I_1 = & \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\widehat{u}^{(m)} (\partial_t + \partial_x) \varphi(x, t) - \frac{1}{\varepsilon} w_e^{1/2} \left(2v_e^{1/2} \widehat{v}^{(m)} - u_e^{1/2} \widehat{w}^{(m)} - w_e^{1/2} \widehat{u}^{(m)} \right) \varphi(x, t) - \right. \\
& \left. - \varepsilon w_e^{1/2} \left((\widehat{v}^{(m)})^2 - \widehat{u}^{(m)} \widehat{w}^{(m)} \right) \varphi(x, t) \right) dx dt - \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}^{(m)} \Big|_{t=0} \varphi(x, t) \Big|_{t=0} dx, \\
& - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left((\widehat{u} - \widehat{u}^{(m)}) \partial_t \varphi(x, t) + (\widehat{u} - \widehat{u}^{(m)}) \partial_x \varphi(x, t) \right) dx dt + \\
& + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{\varepsilon} w_e^{1/2} \left(2v_e^{1/2} (\widehat{v} - \widehat{v}^{(m)}) - u_e^{1/2} (\widehat{w} - \widehat{w}^{(m)}) - w_e^{1/2} (\widehat{u} - \widehat{u}^{(m)}) \right) - \right. \\
& \left. - \varepsilon w_e^{1/2} \left((\widehat{v})^2 - (\widehat{v}^{(m)})^2 - (\widehat{u}\widehat{w} - \widehat{u}^{(m)}\widehat{w}^{(m)}) \right) \varphi(x, t) \right) dx dt - \\
& - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\widehat{u}(x, 0) - \widehat{u}^{(m)}(x, 0) \right) \varphi(x, 0) dx = I_2 + I_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 = & \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(- \left(u_0(t) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} u_k(t) e^{ikx} - u_0^{(m)}(t) - \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} u_k^{(m)}(t) e^{ikx} \right) (\partial_t + \partial_x) \varphi(x, t) - \right. \\
& - \frac{1}{\varepsilon} w_e^{1/2} \left(2v_e^{1/2} \left(v_0(t) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} v_k(t) e^{ikx} - v_0^{(m)}(t) - \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} v_k^{(m)}(t) e^{ikx} \right) - \right. \\
& - u_e^{1/2} \left(w_0(t) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} w_k(t) e^{ikx} - w_0^{(m)}(t) - \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} w_k^{(m)}(t) e^{ikx} \right) - \\
& \left. - w_e^{1/2} \left(u_0(t) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} u_k(t) e^{ikx} - u_0^{(m)}(t) - \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} u_k^{(m)}(t) e^{ikx} \right) \right) \varphi(x, t) - \\
& - \varepsilon w_e^{1/2} \left(\left(v_0(t) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} v_k(t) e^{ikx} \right)^2 - \left(v_0^{(m)}(t) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} v_k^{(m)}(t) e^{ikx} \right)^2 - \right. \\
& \left. - \left(\left(u_0(t) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} u_k(t) e^{ikx} \right) \left(w_0(t) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} w_k(t) e^{ikx} \right) - \right.
\end{aligned}$$

$$- \left(u_0^{(m)}(t) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} u_k^{(m)}(t) e^{ikx} \right) \left(w_0^{(m)}(t) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} w_k^{(m)}(t) e^{ikx} \right) \varphi(x, t) dx dt.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $u_k(t)|_{t=0} = u_k^{(m)}(t)|_{t=0}$ для любого $|k| \leq m$, $k \in \mathbb{Z}$, т.е.

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \left(u_0(t) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} u_k(t) e^{ikx} - u_0^{(m)}(t) - \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} u_k^{(m)}(t) e^{ikx} \right) \Big|_{t=0} \varphi(x, t) \Big|_{t=0} dx = 0.$$

В то же время

$$\begin{aligned} I_3 = & \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[- \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| > m}} u_k(t) e^{ikx} (\partial_t + \partial_x) - \right. \\ & - \frac{1}{\varepsilon} w_e^{1/2} \left(2v_e^{1/2} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| > m}} v_k(t) e^{ikx} - u_e^{1/2} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| > m}} w_k(t) e^{ikx} - w_e^{1/2} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| > m}} u_k(t) e^{ikx} \right) - \\ & - \varepsilon w_e^{1/2} \left(\left(\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| > m}} v_k(t) e^{ikx} \right)^2 - \left(\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| > m}} u_k(t) e^{ikx} \right) \left(\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| > m}} w_k(t) e^{ikx} \right) \right) - \\ & - \varepsilon w_e^{1/2} \left(2 \left(\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| > m}} v_k(t) e^{ikx} \right) \left(v_0(t) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} v_k(t) e^{ikx} \right) - \left(\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| > m}} u_k(t) e^{ikx} \right) \left(w_0(t) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} w_k(t) e^{ikx} \right) \right) - \\ & \left. - \left(u_0(t) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} u_k(t) e^{ikx} \right) \left(\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| > m}} w_k(t) e^{ikx} \right) \right] \varphi(x, t) dx dt - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| > m}} u_k(0) e^{ikx} \varphi(x, t) \Big|_{t=0} dx. \end{aligned}$$

Далее, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} I_1 = & \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left((\partial_t + \partial_x) \hat{u}^{(m)} - \frac{1}{\varepsilon} w_e^{1/2} \left(2v_e^{1/2} \hat{v}^{(m)} - u_e^{1/2} \hat{w}^{(m)} - w_e^{1/2} \hat{u}^{(m)} \right) - \right. \\ & \left. - \varepsilon w_e^{1/2} \left((\hat{v}^{(m)})^2 - \hat{u}^{(m)} \hat{w}^{(m)} \right) \right) \varphi(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} |I_0| &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| (\hat{u} - \hat{u}^{(m)}) \partial_t \varphi(x, t) \right| dx dt \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} (u_k - u_k^{(m)}) e^{ikx} \partial_t \varphi(x, t) \right| dx dt + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{|k| > m} u_k e^{ikx} \partial_t \varphi(x, t) \right| dx dt = |J_1| + |J_2|. \quad (27) \end{aligned}$$

Применяем неравенство Гельдера и пользуемся тем, что носитель по переменной x изменяется от $[-R; R]$, получим

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq \left(\int_0^\infty \int_{-R}^R \left| \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} \frac{|k|^{2\sigma}}{|k|^{2\sigma}} (u_k - u_k^{(m)}) e^{ikx} \right|^2 dx dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \partial_t \varphi(x, t) \right|^2 dx dt \right)^{1/2} \leq \\
&\leq c_1 \left(\int_0^\infty e^{2\gamma t} \sup_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0, \\ |k| \leq m}} |k|^{2\sigma} \left| (u_k - u_k^{(m)}) \right|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \partial_t \varphi(x, t) \right|^2 dx dt \right)^{1/2} \leq \\
&\leq c_1 \|\hat{u} - \hat{u}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \partial_t \varphi(x, t) \right|^2 dx dt \right)^{1/2} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

в силу фундаментальности $\hat{u}^{(m)}$. Далее,

$$\begin{aligned}
|J_2|^2 &= \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \sum_{|k| > m} u_k e^{ikx} \partial_t \varphi(x, t) \right| dx dt \right)^2 \leq \\
&\leq \int_0^\infty \int_{-R}^R \left| \sum_{|k| > m} u_k e^{ikx} \right|^2 dx dt \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \partial_t \varphi(x, t) \right|^2 dx dt \leq \\
&\leq c_2 \|\hat{u}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)}^2 \sum_{|k| > m} \frac{1}{|k|^{2\sigma}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \partial_t \varphi(x, t) \right|^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Для оценки суммы воспользуемся следующим неравенством (доказательство см. в [5])

$$\sum_{|k| > m} \frac{1}{|k|^{2\sigma}} \leq c_\sigma^{\text{sum}} \frac{1}{m^{2\sigma-1}}.$$

Тогда

$$|J_2|^2 \leq \|\hat{u}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)}^2 c_\sigma^{\text{sum}} \frac{1}{m^{2\sigma-1}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \partial_t \varphi(x, t) \right|^2 dx dt \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Аналогично доказывается, что при $m \rightarrow \infty$

$$|U_1| = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| (\hat{u} - \hat{u}^{(m)}) \partial_x \varphi(x, t) \right| dx dt \rightarrow 0,$$

$$|U_2| = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \frac{1}{\varepsilon} w_e^{1/2} \left(2v_e^{1/2} (\hat{v} - \hat{v}^{(m)}) - u_e^{1/2} (\hat{w} - \hat{w}^{(m)}) - w_e^{1/2} (\hat{u} - \hat{u}^{(m)}) \right) \varphi(x, t) \right| dx dt \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(-(\hat{u} - \hat{u}^{(m)}) \partial_t - (\hat{u} - \hat{u}^{(m)}) \partial_x - \frac{1}{\varepsilon} w_e^{1/2} \left(2v_e^{1/2} (\hat{v} - \hat{v}^{(m)}) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - u_e^{1/2} (\hat{w} - \hat{w}^{(m)}) - w_e^{1/2} (\hat{u} - \hat{u}^{(m)}) \right) \right) \varphi(x, t) dx dt \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Теперь покажем, что

$$\varepsilon w_e^{1/2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left((\hat{v})^2 - (\hat{v}^{(m)})^2 - (\hat{u} \hat{w} - \hat{u}^{(m)} \hat{w}^{(m)}) \right) \varphi(x, t) dx dt \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} |U_3| &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| ((\widehat{v})^2 - (\widehat{v}^{(m)})^2) \varphi(x, t) \right| dx dt = \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \left(\sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} v_{k_1} v_{k_2} - \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2| \leq m, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} v_{k_1}^{(m)} v_{k_2}^{(m)} \right) e^{ikx} \varphi(x, t) \right| dx dt. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$v_{k_1} v_{k_2} - v_{k_1}^{(m)} v_{k_2}^{(m)} = (v_{k_1} - v_{k_1}^{(m)}) v_{k_2} + (v_{k_2} - v_{k_2}^{(m)}) v_{k_1}^{(m)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |U_3| &\leq \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2| \leq m, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} \left((v_{k_1} - v_{k_1}^{(m)}) v_{k_2} + (v_{k_2} - v_{k_2}^{(m)}) v_{k_1}^{(m)} \right) e^{ikx} \varphi(x, t) \right| dx dt + \\ &\quad + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2| > m, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} v_{k_1} v_{k_2} e^{ikx} \varphi(x, t) \right| dx dt = |U_4| + |U_5|. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} |U_4| &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2| \leq m, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} \left((v_{k_1} - v_{k_1}^{(m)}) v_{k_2} + (v_{k_2} - v_{k_2}^{(m)}) v_{k_1}^{(m)} \right) e^{ikx} \varphi(x, t) \right| dx dt \leq \\ &\leq \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2| \leq m, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} \frac{|k_1|^\sigma |k_2|^\sigma}{|k_1|^\sigma |k_2|^\sigma} \left| (v_{k_1} - v_{k_1}^{(m)}) v_{k_2} e^{ikx} \varphi(x, t) \right| dx dt + \\ &\quad + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2| \leq m, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} \frac{|k_1|^\sigma |k_2|^\sigma}{|k_1|^\sigma |k_2|^\sigma} \left| (v_{k_2} - v_{k_2}^{(m)}) v_{k_1}^{(m)} e^{ikx} \varphi(x, t) \right| dx dt = |I_5| + |I_6|. \end{aligned}$$

Рассмотрим I_5 :

$$\begin{aligned} |I_5|^2 &= \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1|, |k_2| \leq m, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} \frac{|k_1|^\sigma |k_2|^\sigma}{|k_1|^\sigma |k_2|^\sigma} \left| (v_{k_1} - v_{k_1}^{(m)}) v_{k_2} e^{ikx} \varphi(x, t) \right| dx dt \right)^2 \leq \\ &\leq 2 \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} |k_2|^{2\sigma} |v_{k_2}|^2 \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m}} |k_1|^\sigma \left| (v_{k_1} - v_{k_1}^{(m)}) \varphi(x, t) \right| dx dt \right)^2 \left(\sum_{\substack{|k_1|, |k_2| \leq m, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} \frac{1}{|k_1|^\sigma |k_2|^\sigma} \right)^2. \end{aligned} \tag{28}$$

Оценим множители по отдельности. Во-первых,

$$\begin{aligned}
L &= \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} |k_2|^{2\sigma} |v_{k_2}(t)|^2 = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} \int_0^t \frac{d}{ds} \left| |k_2|^\sigma v_{k_2}(s) \right|^2 ds \leq \\
&\leq 2 \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} \int_0^t \left| |k_2|^\sigma v_{k_2} \right| \left| \frac{d}{ds} |k_2|^\sigma v_{k_2} \right| ds.
\end{aligned}$$

Используя неравенство Гельдера, получим

$$L \leq 2 \left(\int_0^\infty \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} \left| |k_2|^\sigma v_{k_2} \right|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} \left| \frac{d}{ds} |k_2|^\sigma v_{k_2} \right|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Заметим, что $1 \leq e^{2\gamma s}$ для всех $s \geq 0$. Значит, можно переписать неравенство в виде

$$\begin{aligned}
L &\leq 2 \left(\int_0^\infty e^{2\gamma s} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} \left| |k_2|^\sigma v_{k_2} \right|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty e^{2\gamma s} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m}} \left| \frac{d}{ds} |k_2|^\sigma v_{k_2} \right|^2 ds \right)^{1/2} = \\
&= 2 \|\widehat{v}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \left\| \frac{d}{dt} \widehat{v} \right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}.
\end{aligned}$$

Для второго множителя имеем

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m}} |k_1|^\sigma \left| (v_{k_1} - v_{k_1}^{(m)}) \varphi(x, t) \right| dx dt \right)^2 \leq \\
&\leq \int_0^\infty \int_{-R}^R e^{2\gamma t} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m}} |k_1|^\sigma \left| v_{k_1} - v_{k_1}^{(m)} \right|^2 dx dt \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\varphi(x, t)|^2 dx dt = \\
&= c_2 \|\widehat{v} - \widehat{v}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\varphi(x, t)|^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Отметим, что

$$\sum_{\substack{|k_1|, |k_2| \leq m, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} \frac{1}{|k_1|^\sigma |k_2|^\sigma} \leq \sum_{k_1=1}^\infty \frac{1}{|k_1|^\sigma} + \sum_{k_2=1}^\infty \frac{1}{|k_2|^\sigma}.$$

Данные ряды сходятся при $\sigma > 1$. Получаем

$$\begin{aligned}
|I_5|^2 &\leq c_3 \|\widehat{v}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \left\| \frac{d}{dt} \widehat{v} \right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \times \\
&\times \left\| \widehat{v} - \widehat{v}^{(m)} \right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\varphi(x, t)|^2 dx dt \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

в силу того, что выражения $\|\widehat{v}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}$, $\|\widehat{v} \frac{d}{dt}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}$ ограничены ($\widehat{v}^{(m)}$ фундаментальна и ограничена в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})$), а $\|\widehat{v} - \widehat{v}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^2 \rightarrow 0$. Аналогично приходим к

оценке для I_6 :

$$|I_6|^2 \leq c_4 \|\widehat{v}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \left\| \frac{d}{dt} \widehat{v}^{(m)} \right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \times \\ \times \|\widehat{v} - \widehat{v}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\varphi(x, t)|^2 dx dt \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Суммируя $|I_5|$ и $|I_6|$, находим

$$|U_3|^2 \leq c_3 \|\widehat{v}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \left\| \frac{d}{dt} \widehat{v} \right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \|\widehat{v} - \widehat{v}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\varphi(x, t)|^2 dx dt + \\ + c_4 \|\widehat{v}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \left\| \frac{d}{dt} \widehat{v}^{(m)} \right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})} \|\widehat{v} - \widehat{v}^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m)})}^2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\varphi(x, t)|^2 dx dt \rightarrow 0$$

при $m \rightarrow \infty$. Остаются слагаемые для $|k| \geq m+1$:

$$U_6 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k|>m, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} v_{k_1} v_{k_2} e^{ikx} \varphi(x, t) \right| dx dt.$$

Заметим, что имеет место вложение множеств

$$\left\{ |k_1 + k_2| > m, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0 \right\} \subset \left\{ \left\{ |k_1| \leq \frac{m}{2}, \quad |k_2| > \frac{m}{2}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0 \right\} \cup \right. \\ \left. \cup \left\{ |k_2| \leq \frac{m}{2}, \quad |k_1| > \frac{m}{2}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0 \right\} \cup \left\{ |k_1| > \frac{m}{2}, \quad |k_2| > \frac{m}{2}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0 \right\} \right\}.$$

Воспользуемся неравенством

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \forall a, b, c > 0.$$

В этом случае

$$|U_6|^2 \leq 3 \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1| \leq m/2, \\ |k_2| > m/2, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} v_{k_1} v_{k_2} e^{ikx} \varphi(x, t) \right| dx dt \right)^2 + \\ + 3 \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_2| \leq m/2, \\ |k_1| > m/2, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} v_{k_1} v_{k_2} e^{ikx} \varphi(x, t) \right| dx dt \right)^2 + 3 \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1| > m/2, \\ |k_2| > m/2, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} v_{k_1} v_{k_2} e^{ikx} \varphi(x, t) \right| dx dt \right)^2.$$

Надо доказать, что U_6 стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. Имеем

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1| \leq m/2, \\ |k_2| > m/2, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} v_{k_1} v_{k_2} e^{ikx} \varphi(x, t) \right| dx dt \right)^2 &= \left(\int_0^T \int_{-R}^R \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1| \leq m/2, \\ |k_2| > m/2, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} v_{k_1} v_{k_2} e^{ikx} \varphi(x, t) \right| dx dt \right)^2 \leq \\
&\leq \int_0^T \int_{-R}^R \left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1| \leq m/2, \\ |k_2| > m/2, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} v_{k_1} v_{k_2} e^{ikx} \right|^2 dx dt \int_0^T \int_{-R}^R |\varphi(x, t)|^2 dx dt,
\end{aligned}$$

где

$$\left| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ |k_1| \leq m/2, \\ |k_2| > m/2, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} v_{k_1} v_{k_2} e^{ikx} \right|^2 \leq \left(\sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m/2}} |k_1|^\sigma |v_{k_1}| \right)^2 \left(\sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| > m/2}} |k_2|^\sigma |v_{k_2}| \right)^2 \left(\sum_{\substack{|k_1| \leq m/2, \\ |k_2| > m/2, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} \frac{1}{|k_2|^\sigma |k_1|^\sigma} \right)^2.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned}
\left(\sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| > m/2}} |k_2|^\sigma |v_{k_2}| \right)^2 &= \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| > m/2}} |k_2|^{2\sigma} |v_{k_2}|^2, \\
\left(\sum_{\substack{|k_1| \leq m/2, \\ |k_2| > m/2, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} \frac{1}{|k_2|^\sigma |k_1|^\sigma} \right)^2 &\leq \left(\sum_{\substack{|k_1| \leq m/2, \\ k_1 \in \mathbb{Z}_0}} \frac{1}{|k_1|^\sigma} \right)^2 \leq \frac{2^{2\sigma}}{m^{2\sigma}} \left(\sum_{\substack{|k_1| \leq m/2, \\ k_1 \in \mathbb{Z}_0}} \frac{1}{|k_1|^\sigma} \right)^2 \leq \\
&\leq \left(\frac{2}{m} \right)^{2\sigma-1} \sum_{\substack{|k_1| \leq m/2, \\ k_1 \in \mathbb{Z}_0}} \frac{1}{|k_1|^{2\sigma}} \leq \left(\frac{2}{m} \right)^{2\sigma-1} \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}_0} \frac{1}{|k_1|^{2\sigma}} \leq \left(\frac{2}{m} \right)^{2\sigma-1} c_2,
\end{aligned}$$

где

$$\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}_0} \frac{1}{|k_1|^{2\sigma}} < \infty, \quad \sigma > 1/2.$$

Вынося супремум и применяя неравенство Гельдера, приходим к оценке

$$\begin{aligned}
|U_6|^2 &\leq \\
&\leq 3 \left(\frac{2}{m} \right)^{2\sigma-1} c_2 \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| > m/2}} |k_2|^{2\sigma} |v_{k_2}|^2 \int_0^T \int_{-R}^R |\varphi(x, t)|^2 dx dt \int_0^T \int_{-R}^R \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m/2}} |k_1|^{2\sigma} |v_{k_1}|^2 dx dt + \\
&+ 3 \left(\frac{2}{m} \right)^{2\sigma-1} c_2 \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| > m/2}} |k_1|^{2\sigma} |v_{k_1}|^2 \int_0^T \int_{-R}^R |\varphi(x, t)|^2 dx dt \int_0^T \int_{-R}^R \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| \leq m/2}} |k_2|^{2\sigma} |v_{k_2}|^2 dx dt + \\
&+ 3 \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| > m/2}} |k_2|^{2\sigma} |v_{k_2}|^2 \int_0^T \int_{-R}^R |\varphi(x, t)|^2 dx dt \int_0^T \int_{-R}^R \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| > m/2}} |k_1|^{2\sigma} |v_{k_1}|^2 dx dt \left(\sum_{\substack{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| > m/2, \\ |k_2| > m/2}} \frac{1}{|k_1|^\sigma |k_2|^\sigma} \right)^2,
\end{aligned}$$

где

$$\int_0^T \int_{-R}^R \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m/2}} |k_1|^{2\sigma} |v_{k_1}|^2 dx dt \leq c_1 \int_0^\infty e^{2\gamma t} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| \leq m/2}} |k_1|^{2\sigma} |v_{k_1}|^2 dt = c_1 \|\widehat{v}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m/2)})}^2.$$

Остальные интегралы оцениваются таким же образом. Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} |U_6|^2 &\leq \left(\frac{2}{m}\right)^{2\sigma-1} c_3 \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| > m/2}} |k_2|^{2\sigma} |v_{k_2}|^2 \int_0^T \int_{-R}^R |\varphi(x, t)|^2 dx dt \times \|\widehat{v}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m/2)})}^2 + \\ &+ \left(\frac{2}{m}\right)^{2\sigma-1} c_3 \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| > m/2}} |k_1|^{2\sigma} |v_{k_1}|^2 \int_0^T \int_{-R}^R |\varphi(x, t)|^2 dx dt \times \|\widehat{v}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m/2)})}^2 + \\ &+ c_2 \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| > m/2}} |k_2|^{2\sigma} |v_{k_2}|^2 \int_0^T \int_{-R}^R |\varphi(x, t)|^2 dx dt \times \|\widehat{v}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)}^2 \times \frac{1}{m^{2\sigma}} \left(\sum_{\substack{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| > m/2, \\ |k_2| > m/2}} \frac{m^\sigma}{|k_1|^\sigma |k_2|^\sigma} \right)^2. \end{aligned}$$

Лемма 6. Следующая сумма сходится при $\sigma > 1$:

$$\sum_{\substack{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| > m/2, \\ |k_2| > m/2}} \frac{m^\sigma}{|k_1|^\sigma |k_2|^\sigma} < \infty.$$

Доказательство. Заметим, что сумму можно переписать в виде

$$S = \sum_{\substack{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| > m/2, \\ |k_2| > m/2}} \frac{m^\sigma}{|k_1|^\sigma |k_2|^\sigma} = \sum_{\substack{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ \min(|k_1|, |k_2|) > m/2}} \frac{m^\sigma}{|k_1|^\sigma |k_2|^\sigma},$$

а также имеет место равенство

$$|k_1|^\sigma \times |k_2|^\sigma = \left(\max(|k_1|, |k_2|) \right)^\sigma \left(\min(|k_1|, |k_2|) \right)^\sigma.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\substack{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ \min(|k_1|, |k_2|) > m/2}} \frac{m^\sigma}{\left(\max(|k_1|, |k_2|) \right)^\sigma \left(\min(|k_1|, |k_2|) \right)^\sigma} \leq \\ &\leq c_\sigma \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0} \frac{1}{\left(\max(|k_1|, |k_2|) \right)^\sigma} \leq c_\sigma \sum_{k_1=1}^\infty \frac{1}{|k_1|^\sigma} + c_\sigma \sum_{k_2=1}^\infty \frac{1}{|k_2|^\sigma}. \end{aligned}$$

Поскольку в суммы входят одинаковые слагаемые, имеем

$$S \leq 2 \sum_{k_1=1}^\infty \frac{1}{|k_1|^\sigma} < \infty,$$

если $\sigma > 1$. Лемма доказана. $\square$

Из ограниченности выражений

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\substack{k_1 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_1| > m/2}} |k_1|^{2\sigma} |v_{k_1}|^2, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\substack{k_2 \in \mathbb{Z}_0, \\ |k_2| > m/2}} |k_2|^{2\sigma} |v_{k_2}|^2$$

и норм $\|\widehat{v}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma^{(m/2)})}^2$, $\|\widehat{v}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)}^2$ равномерно по m следует, что

$$U_6 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Аналогично доказывается, что

$$U_7 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\widehat{u}\widehat{w} - \widehat{u}^{(m)}\widehat{w}^{(m)})\varphi(x, t) dx dt \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим выражение для нулевой моды

$$U_8 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_0 - u_0^{(m)})\partial_t \varphi(x, t) dx dt.$$

Имеет место оценка

$$|I_8|^2 = \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |(u_0 - u_0^{(m)})| |\partial_t \varphi(x, t)| dx dt \right)^2.$$

Применим неравенство Гельдера:

$$\begin{aligned} |I_8|^2 &\leq \int_0^\infty \int_{-R}^R |(u_0 - u_0^{(m)})|^2 dx dt \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\partial_t \varphi(x, t)|^2 dx dt \leq \\ &\leq 2R \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{2\gamma t} e^{-2\gamma t} |(u_0 - u_0^{(m)})|^2 dt \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\partial_t \varphi(x, t)|^2 dx dt \leq \\ &\leq 2R \sup_{t \in \mathbb{R}_+} e^{2\gamma t} |(u_0 - u_0^{(m)})|^2 \int_0^\infty e^{-2\gamma t} dt \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\partial_t \varphi(x, t)|^2 dx dt = \\ &= c_0 \|u_0 - u_0^{(m)}\|_{L_{\infty, \gamma}(\mathbb{R}_+)}^2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\partial_t \varphi(x, t)|^2 dx dt \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что при $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_0 - u_0^{(m)}) \partial_x \varphi(x, t) dx dt - \\ & - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{\varepsilon} w_e^{1/2} \left(2v_e^{1/2} (v_0 - v_0^{(m)}) - u_e^{1/2} (w_0 - w_0^{(m)}) - w_e^{1/2} (u_0 - u_0^{(m)}) \right) \right) \varphi(x, t) dx dt \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Запишем оставшиеся выражения через коэффициенты Фурье для $|k| \leq m$:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{d}{dt} u_0^{(m)} - \frac{1}{\varepsilon} w_e^{1/2} \left(2v_e^{1/2} v_0^{(m)} - u_e^{1/2} w_0^{(m)} - w_e^{1/2} u_0^{(m)} \right) - \right. \\ & \left. - \varepsilon w_e^{1/2} \sum_{\substack{k_1+k_2=0, \\ |k_1|, |k_2| \leq m, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}}} \left(v_{k_1}^{(m)} v_{k_2}^{(m)} - u_{k_1}^{(m)} w_{k_2}^{(m)} \right) \right) \varphi(x, t) dx dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \sum_{\substack{|k| \leq m, \\ k \in \mathbb{Z}_0}} \left(\frac{d}{dt} u_k^{(m)} + i k u_k^{(m)} - \frac{1}{\varepsilon} w_e^{1/2} \left(2 v_e^{1/2} v_k^{(m)} - u_e^{1/2} w_k^{(m)} - w_e^{1/2} u_k^{(m)} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \varepsilon w_e^{1/2} \left(2 v_0^{(m)} v_k^{(m)} - u_0^{(m)} w_k^{(m)} - u_k^{(m)} w_0^{(m)} \right) \right) e^{i k x} \varphi(x, t) dx dt - \\
& \quad - \varepsilon w_e^{1/2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \sum_{\substack{k_1 + k_2 = k, \\ |k_1| \leq m, \\ |k_2| \leq m, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} \left(v_{k_1}^{(m)} v_{k_2}^{(m)} - u_{k_1}^{(m)} w_{k_2}^{(m)} \right) e^{i k x} \varphi(x, t) dx dt.
\end{aligned}$$

В силу построения при $k = 0$

$$\frac{d}{dt} u_0^{(m)} - \frac{1}{\varepsilon} w_e^{1/2} \left(2 v_e^{1/2} v_0^{(m)} - u_e^{1/2} w_0^{(m)} - w_e^{1/2} u_0^{(m)} \right) - \varepsilon w_e^{1/2} \sum_{\substack{k_1 + k_2 = 0, \\ |k_1|, |k_2| \leq m, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}}} \left(v_{k_1}^{(m)} v_{k_2}^{(m)} - u_{k_1}^{(m)} w_{k_2}^{(m)} \right) = 0,$$

а при $|k| \leq m -$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} u_k^{(m)} + i k u_k^{(m)} - \frac{1}{\varepsilon} w_e^{1/2} \left(2 v_e^{1/2} v_k^{(m)} - u_e^{1/2} w_k^{(m)} - w_e^{1/2} u_k^{(m)} \right) - \\
& \quad - \varepsilon w_e^{1/2} \left(2 v_0^{(m)} v_k^{(m)} - u_0^{(m)} w_k^{(m)} - u_k^{(m)} w_0^{(m)} \right) - \varepsilon w_e^{1/2} \sum_{\substack{k_1 + k_2 = k, \\ |k_1| \leq m, \\ |k_2| \leq m, \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0}} \left(v_{k_1}^{(m)} v_{k_2}^{(m)} - u_{k_1}^{(m)} w_{k_2}^{(m)} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, предельные функции $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ есть слабое решение задачи Коши (3). $\square$

Теорема 8. Пусть $\sigma > 2$ и выполнено условие (24). Тогда $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \in W_2^1(\mathbb{R}_+ \times R^1)$ является классическим решением для почти всех $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times R^1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева О. А. Численное исследование системы уравнений Годунова—Султангазина. Периодический случай // Вестн. МГСУ. — 2016. — № 4. — С. 27–35.
2. Васильева О. А., Духновский С. А. Условие секулярности кинетической системы Карлемана // Вестн. МГСУ. — 2015. — № 7. — С. 33–40.
3. Веденяпин В. В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. — М.: Физматлит, 2001.
4. Годунов С. К., Султангазин У. М. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Усп. мат. наук. — 1971. — 26, № 3. — С. 3–51.
5. Духновский С. А. О скорости стабилизации решений задачи Коши для уравнения Карлемана с периодическими начальными данными // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. — 2017. — 21, № 1. — С. 7–41.
6. Ильин О. В. Изучение существования решений и устойчивости кинетической системы Карлемана // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2007. — 47, № 12. — С. 2076–2087.
7. Радкевич Е. В. О дискретных кинетических уравнениях // Докл. РАН. — 2012. — 447, № 4. — С. 369–373.
8. Радкевич Е. В. О поведении на больших временах решений задачи Коши для двумерного кинетического уравнения // Совр. мат. Фундам. напр. — 2013. — 47. — С. 108–139.
9. Buslaev V. S., Komech A., Kopylova E. A., Stuart D. On asymptotic stability of solitary waves in nonlinear Schrödinger equation // Commun. Partial Differ. Equ. — 2008. — 33, № 4. — P. 669–705.
10. Kopylova E. A. On long-time decay for magnetic Schrödinger and Klein–Gordon equations // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2012. — 278. — С. 129–137.
11. Radkevich E. V., Vasil'eva O. A., Dukhnovskii S. A. Local equilibrium of the Carleman equation // J. Math. Sci. — 2015. — 207, № 2. — P. 296–323.

12. *Vasil'eva O. A., Dukhnovskii S. A., Radkevich E. V.* On the nature of local equilibrium in the Carleman and Godunov–Sultangazin equations// J. Math. Sci. — 2018. — 235, № 4. — P. 393–453.

Духновский Сергей Анатольевич
Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет, Москва
E-mail: sergeidukhnvskijj@rambler.ru