Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Шведов, О нечетких множествах типа 2 и нечетких системах типа 2, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 165, 114–122

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-165-114-122>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:58:35

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 165 (2019). С. 114–122
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-165-114-122

УДК 519.710.5, 519.716.34

О НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВАХ ТИПА 2 И НЕЧЕТКИХ СИСТЕМАХ ТИПА 2

© 2019 г. А. С. ШВЕДОВ

Аннотация. Одним из преимуществ систем, основанных на нечеткой логике (нечетких систем), является возможность мягкого переключения от одних значений входных параметров системы к другим, когда делаются разные выводы для различных областей этих значений. Нечеткое множество типа 2 — это прямое обобщение обычного нечеткого множества. В настоящей работе дается обзор некоторых разделов теории нечетких множеств типа 2 и теории нечетких систем типа 2. Рассматриваются операции над нечеткими множествами типа 2, нечеткие отношения типа 2, центр тяжести нечеткого множества типа 2. Дается описание функциональных нечетких систем типа 2 и реляционных нечетких систем типа 2.

Ключевые слова: нечеткое множество типа 2, нечеткое отношение типа 2, функциональная нечеткая система, реляционная нечеткая система.

ON TYPE-2 FUZZY SETS AND TYPE-2 FUZZY SYSTEMS

© 2019 A. S. SHVEDOV

ABSTRACT. One of the advantages of systems based on fuzzy logic (fuzzy systems) is the possibility of a soft switch from one set of values of input parameters of the system to another, when different conclusions are drawn for different sets of these values. A fuzzy set of type 2 is a direct generalization of an ordinary fuzzy set. In this paper, we review some branches of the theory of type-2 fuzzy sets and the theory of type-2 fuzzy systems. We discuss operations on type-2 fuzzy sets, type-2 fuzzy relations, and the centroids of type-2 fuzzy sets and describe type-2 functional fuzzy systems and type-2 relational fuzzy systems.

Keywords and phrases: fuzzy set of type 2, fuzzy relation of type 2, functional fuzzy system, relational fuzzy system.

AMS Subject Classification: 93C42, 94D05

Введение. В классической теории множеств для любого подмножества некоторого множества (которое будем называть универсальным множеством) степень принадлежности элемента универсального множества данному подмножеству может равняться либо 0 (элемент подмножеству не принадлежит), либо 1 (элемент подмножеству принадлежит). В теории нечетких множеств степень принадлежности элемента универсального множества нечеткому подмножеству (нечеткому множеству) может быть любым действительным числом, лежащим между 0 и 1. В теории нечетких множеств типа 2 принимается, что и сама эта степень принадлежности не определяется для каждого элемента универсального множества однозначно, допускается некоторая размытость. Точнее, степень принадлежности является нечетким числом, носитель которого принадлежит отрезку $[0, 1]$.

Теория нечетких множеств имеет большое и теоретическое, и практическое значение при математическом моделировании неопределенности, по этому научному направлению имеется обширная литература (см., например, книги [1,3] и библиографию в них). Данная теория позволяет передать другой вид неопределенности, нежели теория вероятностей. В теории вероятностей каждой группе значений неизвестной величины приписывается некоторая вероятность. В теории нечетких множеств сами значения определяются неоднозначно. Теория нечетких множеств типа 2 и нечетких систем типа 2 — это научное направление, которое находится в состоянии интенсивного развития и имеет большое практическое значение (см., например, книги [7,20]).

Нечеткие множества типа 2 введены в [28]. Теория этих множеств получила дальнейшее развитие в [21, 22]. Обзоры теории и ее приложений в различных прикладных областях приведены, например, в [15, 18]. Из тематически более узких обзоров можно назвать [8, 13, 23, 25]. Различные результаты, относящиеся к теории нечетких систем типа 2, представлены, в частности, в [14, 16, 19, 26, 30], а также во многих других работах.

Под нечеткими системами многие понимают нечеткие системы управления. Такие системы рассматриваются, например, в [11, 12, 17, 24, 27, 29]. (Классический пример нечеткой системы управления следующий. Если препятствие близко и скорость большая, то тормозить надо резко; если препятствие далеко или скорость малая, то тормозить надо плавно. Здесь используются два нечетких правила и шесть нечетких множеств, точнее, следующие три связки нечетких множеств: близкое препятствие, далекое препятствие; малая скорость, большая скорость; плавное торможение, резкое торможение. Например, степень принадлежности скорости 40 км/час к нечеткому множеству больших скоростей в зависимости от задачи может быть принята равной 0,3, но может быть принята и равной 0,8. Степень принадлежности скорости 60 км/час к нечеткому множеству больших скоростей для этих задач может быть, соответственно, 0,5 и 0,9. Таким образом учитывается неоднозначность понятия (значения) «большая скорость». Подобные связки называются лингвистическими переменными. Разумеется, в связке может быть и больше двух нечетких множеств.) Однако термин «нечеткие системы» все же более широк, чем «нечеткие системы управления». Например, в [9, 10] представлен программный комплекс, предназначенный для исследования рынка акций и выработки торговых стратегий, в основе которого лежат нечеткие системы, но управления в модель не включаются. Подобные нечеткие системы эконометрической направленности рассматриваются и другими авторами. Нечеткие системы называют также системами, основанными на нечеткой логике. Одним из преимуществ такого подхода является возможность мягкого переключения. Так, в рассмотренном примере производится мягкое переключение от ситуации с близким препятствием к ситуации с далеким препятствием.

Если в нечетких правилах используются нечеткие множества типа 2, то говорят о нечетких системах типа 2. Такая модификация позволяет добиться лучших результатов в ряде задач. Нечеткие системы типа 2, как и обычные нечеткие системы, делятся на функциональные и реляционные. Обзоров по теории нечетких систем типа 2 на русском языке немного; укажем, например, [4, гл. 5] и [2]. Однако ни в одной из этих двух работ не рассматриваются, например, функциональные нечеткие системы типа 2. Настоящий обзор в определенной степени заполняет имеющийся пробел.

Широкое использование нечетких систем типа 1 в различных прикладных областях во многом связано с тем, что такие системы являются универсальными аппроксиматорами (см., например, обзор [6]). Зависимость между входными и выходными переменными системы может иметь нелинейный характер, заранее не известный. Нечеткие системы позволяют дать правильную аппроксимацию для широкого класса таких зависимостей. Разумеется, универсальными аппроксиматорами являются и нечеткие системы типа 2, поскольку это более широкий класс систем, чем нечеткие системы типа 1. Развитие теории нечетких систем типа 2 и применение этой теории является перспективным научным направлением.

Настоящая работа имеет следующую структуру. В разделе 1 приведены необходимые определения, введены операции над нечеткими множествами типа 2. В разделе 2 описан центроид нечеткого множества типа 2, рассмотрены функциональные нечеткие системы типа 2. В разделе 3 приведены определения, относящиеся к нечетким отношениям типа 2, рассмотрены расширенные

t -норма и t -конорма, а также реляционные нечеткие системы типа 2. Определения и исторические ссылки, относящиеся к обычным нечетким множествам, в настоящей работе не обсуждаются; их можно найти, например, в обзоре [5].

1. Нечеткие множества типа 2. Пусть X — некоторое универсальное множество. Для обычного нечеткого множества A степень принадлежности каждого элемента $x \in X$ этому нечеткому множеству является действительным числом $\mu_A(x)$, принадлежащим отрезку $[0, 1]$.

Однако во многих приложениях остается неясным, как наилучшим образом определить степень принадлежности каждого элемента x нечеткому множеству A . Поэтому возникла идея, что сама степень принадлежности может быть нечетким множеством, носитель которого принадлежит отрезку $[0, 1]$. Оказывается, что такой подход позволяет получить лучшие результаты в ряде прикладных задач.

Рассмотрим функцию $\mu : X \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Определение 1. График функции μ , т.е. множество пар

$$((x, w), \mu(x, w)), \quad x \in X, \quad w \in [0, 1],$$

называется *нечетким множеством типа 2* (НМТ2).

Обычные нечеткие множества будем называть нечеткими множествами типа 1 (НМТ1).

Замечание. Можно было бы рассматривать НМТ2 как НМТ1 с универсальным множеством $X \times [0, 1]$. Однако такой подход не является удобным, например, при введении операций объединения, пересечения, дополнения для НМТ2. Кроме того, по смыслу рассматриваемых прикладных задач универсальным множеством является X , а не $X \times [0, 1]$. Функцию μ для НМТ2 A обозначаем μ_A .

Пусть A — НМТ2; для каждого $x \in X$ рассмотрим множество

$$J_x = \{w \in [0, 1] : \mu_A(x, w) > 0\}.$$

В приводимых ниже определениях 2–7 A — это НМТ2.

Определение 2. *Первичной функцией принадлежности* A называется многозначная функция, которая каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие множество J_x .

Определение 3. *Нижней функцией принадлежности* A называется функция $\underline{\mu}_A : X \rightarrow [0, 1]$, определяемая соотношением

$$\underline{\mu}_A(x) = \inf J_x, \quad x \in X.$$

Определение 4. *Верхней функцией принадлежности* A называется функция $\overline{\mu}_A : X \rightarrow [0, 1]$, определяемая соотношением

$$\overline{\mu}_A(x) = \sup J_x, \quad x \in X.$$

Определение 5. Если при каждом $x \in X$ существует единственный элемент $w_x \in [0, 1]$, для которого $\mu_A(x, w_x) = 1$, то функция, которая элементу x ставит в соответствие элемент w_x , называется *главной функцией принадлежности* A .

Определение 6. При фиксированном $x \in X$ функция $\mu_A(x, w)$ как функция аргумента w называется *вторичной функцией принадлежности* A .

Определение 7. *Изображением неопределенности* A называется множество

$$FOU(A) = \{(x, w) : x \in X, w \in J_x\}.$$

Определение 8. НМТ2 A называется *интервальным нечетким множеством типа 2* (ИНМТ2), если $\mu_A(x, w) = 1$ при всех $x \in X, w \in J_x$.

Определение 9. НМТ1 C с универсальным множеством X называется *встроенным* в НМТ2 A , если

$$\underline{\mu}_A(x) \leq \mu_C(x) \leq \overline{\mu}_A(x)$$

при всех $x \in X$.

Замечание. Можно рассматривать и нечеткие множества типа 3, когда для любых $x \in X$, $w \in [0, 1]$ значение $\mu(x, w)$ является не действительным числом, а НМТ1 с носителем, принадлежащим отрезку $[0, 1]$, а также нечеткие множества более высоких типов. Однако практическое значение таких математических конструкций, видимо, является несопоставимо меньшим, чем практическое значение нечетких множеств типов 1 и 2.

При работе с НМТ2 используется обычное для НМТ1 обозначение:

$$A = \int_{x \in X} \int_{w \in [0, 1]} \frac{\mu_A(x, w)}{(x, w)},$$

причем знак $\int$ часто используется вместо знака $\sum$ и в тех случаях, когда каждое из множеств X , J_x содержит лишь конечное число элементов. Иногда последнюю формулу удобнее записывать в виде

$$A = \int_{x \in X} \left(\int_{w \in [0, 1]} \frac{\mu_A(x, w)}{w} \right) / x,$$

подчеркивая, что каждому x ставится в соответствие некоторое НМТ1, носитель которого принадлежит отрезку $[0, 1]$.

Если при $0 < \eta \leq 1$ рассмотреть η -срезы НМТ2 A :

$$A_\eta = \{(x, w) : \mu_A(x, w) \geq \eta\},$$

то

$$\mu_A(x, w) = \sup_{\eta \in (0, 1]} \eta \cdot I_{A_\eta}(x, w)$$

при всех $x \in X$, $w \in [0, 1]$. Здесь I_{A_η} — индикатор множества A_η . Доказательство последней формулы ничем не отличается от доказательства аналогичной формулы для НМТ1.

Пусть A и B — НМТ2 с одним и тем же универсальным множеством X .

Определение 10. Объединением A и B называется НМТ2

$$A \cup B = \int_{x \in X} \left(\int_{w \in [0, 1]} \frac{\sup_{u \in [0, 1], v \in [0, 1]: u \vee v = w} \mu_A(x, u) \wedge \mu_B(x, v)}{w} \right) / x.$$

Здесь $\wedge$ означает минимум, $\vee$ — максимум.

Определение 11. Пересечением A и B называется НМТ2

$$A \cap B = \int_{x \in X} \left(\int_{w \in [0, 1]} \frac{\sup_{u \in [0, 1], v \in [0, 1]: u \wedge v = w} \mu_A(x, u) \wedge \mu_B(x, v)}{w} \right) / x.$$

Определение 12. Дополнением A называется НМТ2

$$\overline{A} = \int_{x \in X} \left(\int_{w \in [0, 1]} \frac{\mu_A(x, w)}{1 - w} \right) / x.$$

2. Центроид нечеткого множества типа 2 и функциональные нечеткие системы. Пусть универсальное множество X — это конечное множество, элементами которого являются действительные числа, $X = \{x_1, \dots, x_m\}$.

Напомним, что если A — это НМТ1, то центроидом (центром тяжести) A называется действительное число

$$\left(\sum_{i=1}^m x_i \mu_A(x_i) \right) / \left(\sum_{i=1}^m \mu_A(x_i) \right).$$

Пусть A — это НМТ2 и каждое из множеств J_{x_i} , $i = 1, \dots, m$, содержит лишь конечное число элементов. Задача состоит в том, чтобы построить НМТ1, которое могло бы рассматриваться как центроид A .

Пусть носителем искомого НМТ1 является множество всех действительных чисел вида

$$\left(\sum_{i=1}^m x_i w_i \right) / \left(\sum_{i=1}^m w_i \right), \quad (1)$$

где $w_1 \in J_{x_1}, \dots, w_m \in J_{x_m}$. Это объединение центроидов всех встроенных НМТ1. Если множество J_{x_i} содержит n_i элементов, то всего чисел вида (1) может быть $\prod_{i=1}^m n_i$. Но некоторые из этих чисел могут совпадать.

Для действительного числа вида (1) степень принадлежности центроиду A принимается равной

$$\mu_A(x_1, w_1) \wedge \dots \wedge \mu_A(x_m, w_m). \quad (2)$$

Интересно (см. [16]), что в данном случае вместо минимума нельзя использовать произведение. Если какой-то элемент носителя допускает несколько различных представлений вида (1), то в качестве его степени принадлежности НМТ1 в соответствии с принципом расширения нужно брать максимальное из чисел (2).

Построенный таким образом центроид НМТ2 A обозначается C_A и является, как уже было сказано, НМТ1.

Если A — это ИНМТ2, то каждое из чисел (2) равняется 1.

Перейдем к случаю, когда каждое из множеств J_{x_i} , $i = 1, \dots, m$, является отрезком действительной прямой (принадлежащим отрезку $[0, 1]$); A — ИНМТ2. Задача вновь состоит в том, чтобы построить НМТ1, которое могло бы рассматриваться как центроид A .

Пусть носителем искомого НМТ1 является множество действительных чисел вида (1), где $w_1 \in J_{x_1}, \dots, w_m \in J_{x_m}$. Нетрудно увидеть, что построенный таким образом носитель является отрезком действительной прямой, который мы обозначим через $[y_l, y_r]$.

Действительно, если

$$y' = \left(\sum_{i=1}^m x_i w'_i \right) / \left(\sum_{i=1}^m w'_i \right), \quad y'' = \left(\sum_{i=1}^m x_i w''_i \right) / \left(\sum_{i=1}^m w''_i \right),$$

то для любого $y \in [y', y'']$ на отрезке, соединяющем точки $(w'_1, \dots, w'_m)$ и $(w''_1, \dots, w''_m)$, найдется точка $(w_1, \dots, w_m)$, для которой значение дроби (1) равно y , поскольку функция (1) как функция аргумента $(w_1, \dots, w_m)$ непрерывна на этом отрезке. Ограниченность функции (1) как функции аргумента $(w_1, \dots, w_m)$ при фиксированных $x_1, \dots, x_m$ очевидна. Очевидна и замкнутость множества всех значений функции (1) при $(w_1, \dots, w_m) \in J_{x_1} \times \dots \times J_{x_m}$. Отдельно следует рассмотреть случай, когда $0 \in J_{x_1}, \dots, 0 \in J_{x_m}$. В этом случае, если каждый из отрезков $J_{x_1}, \dots, J_{x_m}$ имеет ненулевую длину, то $[y_l, y_r] = \left[\min_{1 \leq i \leq m} x_i, \max_{1 \leq i \leq m} x_i \right]$. В точке $(0, \dots, 0)$ функция (1) при этом не определена.

Чтобы завершить построение центроида C_A , для каждого $y \in [y_l, y_r]$ положим $\mu_{C_A}(y) = 1$.

Функциональные нечеткие системы называются также нечеткими системами Такаги—Сугено. Рассмотрим систему, для которой входом являются действительные числа $x_1^0, \dots, x_n^0$, выходом — действительное число y^0 . Пусть $x_1^0 \in X_1, \dots, x_n^0 \in X_n$, $y^0 \in Y$, где $X_1, \dots, X_n, Y$ — некоторые подмножества множества действительных чисел $\mathbb{R}$.

База состоит из k нечетких правил следующего вида:

$$\text{ЕСЛИ } (x_1 = A_{j1}) \text{ И } \dots \text{ И } (x_n = A_{jn}), \text{ ТО } y = f_j(x_1, \dots, x_n),$$

где $j = 1, \dots, k$. При каждом j считается, что A_{jp} — ИНМТ2 с универсальным множеством X_p , $p = 1, \dots, n$, $f_j : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k$, — некоторые функции.

Суть нечеткой системы состоит в том, что для различных областей значений входных параметров $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ требуется делать различные выводы (использовать различные формы зависимости выходных параметров от входных) и обеспечивать при этом мягкое переключение.

Если степень активации нечеткого правила j при данном наборе входных параметров большая, то вклад зависимости f_j в окончательную общую зависимость также большой, и наоборот, при малой степени активации нечеткого правила вклад малый.

Описание нечетких систем Такаги—Сугено для случая, когда A_{jp} , $p = 1, \dots, n$, — НМТ1, можно найти, например, в [3].

Замечание. Наиболее важен случай, когда функции $f_1, \dots, f_k$ являются линейными:

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = a_{j0} + a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n,$$

где $a_{j0}, a_{j1}, \dots, a_{jn}$ — действительные числа. Теоретически могут рассматриваться и модели, для которых $a_{j0}, a_{j1}, \dots, a_{jn}$ — НМТ1, но на практике такие модели, видимо, пока не используются.

Пусть $\underline{\mu}_{A_{j1}}, \dots, \underline{\mu}_{A_{jn}}$ и $\bar{\mu}_{A_{j1}}, \dots, \bar{\mu}_{A_{jn}}$ — соответственно нижние и верхние функции принадлежности ИНМТ2 $A_{j1}, \dots, A_{jn}$; $j = 1, \dots, k$.

При каждом j , $1 \leq j \leq k$, рассмотрим отрезки $[\underline{\tau}_j, \bar{\tau}_j]$, где

$$\underline{\tau}_j = \min \left(\underline{\mu}_{A_{j1}}(x_1^0), \dots, \underline{\mu}_{A_{jn}}(x_n^0) \right), \quad \bar{\tau}_j = \min \left(\bar{\mu}_{A_{j1}}(x_1^0), \dots, \bar{\mu}_{A_{jn}}(x_n^0) \right),$$

или

$$\underline{\tau}_j = \underline{\mu}_{A_{j1}}(x_1^0) \cdots \underline{\mu}_{A_{jn}}(x_n^0), \quad \bar{\tau}_j = \bar{\mu}_{A_{j1}}(x_1^0) \cdots \bar{\mu}_{A_{jn}}(x_n^0).$$

Могут использоваться и другие t -нормы, кроме минимума и произведения. (Определения t -нормы и t -конормы см., например, в [4].) Интервальное НМТ1 с носителем $[\underline{\tau}_j, \bar{\tau}_j]$ называется *степенью активации* j -го нечеткого правила.

Для определения выхода нечеткой системы степень активации каждого нечеткого правила должна быть увязана с выходным значением для этого нечеткого правила. Рассматривается отрезок $[y_l, y_r]$, состоящий из всех точек вида

$$\left(\sum_{j=1}^k \tau_j f_j(x_1^0, \dots, x_n^0) \right) / \left(\sum_{j=1}^k \tau_j \right), \quad (3)$$

где $\tau_j \in [\underline{\tau}_j, \bar{\tau}_j]$, $j = 1, \dots, k$. Обоснование того, что данное множество точек является отрезком, аналогично приведенному выше. Таким образом,

$$y_l = \min_{\substack{\tau_j \in [\underline{\tau}_j, \bar{\tau}_j], \\ j=1, \dots, k}} \frac{\sum_{j=1}^k \tau_j f_j(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\sum_{j=1}^k \tau_j}, \quad y_r = \max_{\substack{\tau_j \in [\underline{\tau}_j, \bar{\tau}_j], \\ j=1, \dots, k}} \frac{\sum_{j=1}^k \tau_j f_j(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\sum_{j=1}^k \tau_j}.$$

Далее, $y^0 = (y_l + y_r)/2$.

Представленный способ нахождения y^0 является одним из наиболее распространенных. Но можно использовать и более простой способ, когда y^0 рассчитывается по формуле (3), в которой $\tau_j = (\underline{\tau}_j + \bar{\tau}_j)/2$.

3. Нечеткие отношения типа 2 и реляционные нечеткие системы. Пусть X и Y — два множества, которые используются в качестве универсальных множеств.

Определение 13. Нечетким отношением типа 2 между множествами X и Y называется НМТ2 с универсальным множеством $X \times Y$.

Пусть $D_1, \dots, D_n$ — НМТ1, универсальным множеством для каждого из которых является отрезок $[0, 1]$; $\mu_{D_1}, \dots, \mu_{D_n}$ — функции принадлежности этих нечетких множеств.

Пусть Δ — некоторая t -норма, ∇ — некоторая t -конорма. Как известно, для любых чисел $a_1, \dots, a_n$, принадлежащих отрезку $[0, 1]$, $a_1 \Delta \dots \Delta a_n$ и $a_1 \nabla \dots \nabla a_n$ — также некоторые числа, принадлежащие отрезку $[0, 1]$. Распространенными примерами t -норм являются операции произведения и взятия минимума; примером t -конормы является операция взятия максимума.

В теории нечетких систем типа 2 используются операции расширенной t -нормы $\overset{\Delta}{*}$ и расширенной t -конормы $\overset{\nabla}{*}$. Эти операции применяются к функциям принадлежности $\mu_{D_1}, \dots, \mu_{D_n}$, и результатом является также некоторая функция принадлежности, носитель которой принадлежит отрезку $[0, 1]$. Пусть $\overline{\Delta}$ — некоторая t -норма, которая может совпадать или не совпадать с t -нормой Δ .

Определение 14. Результатом применения *расширенной t -нормы* $\overset{\Delta}{*}$ к функциям принадлежности $\mu_{D_1}, \dots, \mu_{D_n}$ является функция принадлежности

$$\left(\mu_{D_1} \overset{\Delta}{*} \dots \overset{\Delta}{*} \mu_{D_n}\right)(w) = \sup_{\substack{u_1 \in [0,1], \dots, u_n \in [0,1]: \\ u_1 \Delta \dots \Delta u_n = w}} \mu_{D_1}(u_1) \overline{\Delta} \dots \overline{\Delta} \mu_{D_n}(u_n),$$

где $w \in [0, 1]$.

Определение 15. Результатом применения *расширенной t -конормы* $\overset{\nabla}{*}$ к функциям принадлежности $\mu_{D_1}, \dots, \mu_{D_n}$ является функция принадлежности

$$\left(\mu_{D_1} \overset{\nabla}{*} \dots \overset{\nabla}{*} \mu_{D_n}\right)(w) = \sup_{\substack{u_1 \in [0,1], \dots, u_n \in [0,1]: \\ u_1 \nabla \dots \nabla u_n = w}} \mu_{D_1}(u_1) \overline{\Delta} \dots \overline{\Delta} \mu_{D_n}(u_n),$$

где $w \in [0, 1]$.

Пусть R — нечеткое отношение типа 2 между множествами X и Y , S — нечеткое отношение типа 2 между множествами Y и Z , A — НМТ2 с универсальным множеством X . Пусть $\overset{\Delta}{*}$ — некоторая расширенная t -норма, $\overset{\nabla}{*}$ — некоторая расширенная t -конорма.

Пусть Y — конечное множество.

Определение 16. *Комбинацией* нечетких отношений R и S типа 2 называется нечеткое отношение типа 2 между множествами X и Z , обозначаемое $R \circ S$, вторичные функции принадлежности которого имеют вид

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \overset{\nabla}{*}_{y \in Y} \left(\mu_R(x, y) \overset{\Delta}{*} \mu_S(y, z) \right), \quad x \in X, \quad z \in Z.$$

Пусть X — конечное множество; Y может быть произвольным множеством.

Определение 17. *Комбинацией* НМТ2 A и нечеткого отношения R типа 2 называется НМТ2 с универсальным множеством Y , обозначаемое $A \circ R$, вторичные функции принадлежности которого имеют вид

$$\mu_{A \circ R}(y) = \overset{\nabla}{*}_{x \in X} \left(\mu_A(x) \overset{\Delta}{*} \mu_R(x, y) \right), \quad y \in Y.$$

Подчеркнем, что в определениях 16, 17 аргументом всех функций принадлежности является w .

Пусть A_p — НМТ2 с универсальным множеством X_p , $p = 1, \dots, n$. Вторичные функции принадлежности НМТ2 A_j будем обозначать $\mu_{A_j}(x_j)$, где $x_j \in X_j$. Каждая из функций $\mu_{A_j}(x_j)$ является функцией аргумента w , $w \in [0, 1]$.

Определение 18. *Декартовым произведением* НМТ2 $A_1, \dots, A_n$ называется НМТ2, обозначаемое $A_1 \times \dots \times A_n$, универсальным множеством которого является $X_1 \times \dots \times X_n$, а вторичные функции принадлежности имеют вид

$$\mu_{A_1 \times \dots \times A_n}(x_1, \dots, x_n) = \mu_{A_1}(x_1) \overset{\Delta}{*} \dots \overset{\Delta}{*} \mu_{A_n}(x_n),$$

где $\overset{\Delta}{*}$ — некоторая расширенная t -норма.

Реляционные нечеткие системы называются также нечеткими системами Мамдани. Рассмотрим систему, для которой входом являются действительные числа $x_1^0, \dots, x_m^0$, а выходом — действительное число y^0 . Пусть $x_1^0 \in X_1, \dots, x_n^0 \in X_n, y^0 \in Y$; $X_1, \dots, X_n, Y$ — некоторые подмножества множества действительных чисел $\mathbb{R}$.

База состоит из k нечетких правил следующего вида:

$$\text{ЕСЛИ } (x_1 = A_{j1}) \text{ И } \dots \text{ И } (x_n = A_{jn}), \text{ ТО } (y = B_j),$$

где $j = 1, \dots, k$. При каждом j считается, что A_{jp} — НМТ2 с универсальным множеством X_p , $p = 1, \dots, n$, B_j — НМТ2 с универсальным множеством Y .

Описание нечетких систем Мамдани для случая, когда $A_{j1}, \dots, A_{jn}, B_j$ — НМТ1, можно найти, например, в [3].

Известными считаются нечеткие отношения R_j типа 2 между множествами $X = X_1 \times \dots \times X_n$ и Y , $j = 1, \dots, k$.

На этапе фазификации по входным данным $x_1^0 \in X_1, \dots, x_n^0 \in X_n$ строится НМТ2 A' с универсальным множеством X . На этапе выработки решения сначала находятся НМТ2 $B'_j = A' \circ R_j$, $j = 1, \dots, k$, а затем с использованием некоторой расширенной t -конормы определяется НМТ2 B' с вторичными функциями принадлежности

$$\mu_{B'}(y) = \mu_{B'_1}(y) \overset{\nabla}{*} \dots \overset{\nabla}{*} \mu_{B'_n}(y), \quad y \in Y.$$

На последнем этапе проводится сначала понижение порядка НМТ2 B' (например, путем построения центроида $C_{B'}$), а затем — дефазификация.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лю Б. Теория и практика неопределенного программирования. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
2. Олизаренко С. А., Перепелица А. В., Капранов В. А. Нечеткие логические системы интервального типа 2. Архитектура и механизм вывода// Сист. обработки информ. — 2011. — № 5. — С. 156–164.
3. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.
4. Рутковский Л. Методы и технологии искусственного интеллекта. — М.: Горячая линия — Телеком, 2010.
5. Шведов А. С. Нечеткое математическое программирование: краткий обзор// Пробл. управл. — 2017. — № 3. — С. 2–10.
6. Шведов А. С. Аппроксимация функций с помощью нейронных сетей и нечетких систем// Пробл. управл. — 2018. — № 1. — С. 21–29.
7. Castillo O., Melin P. Type-2 Fuzzy Logic: Theory and Applications. — Berlin: Springer-Verlag, 2008.
8. Celik E., Gul M., Aydin N., Gumus A. T., Guneri A. F. A comprehensive review of multi criteria decision making approaches based on interval type-2 fuzzy sets// Knowledge-Based Syst. — 2015. — 85. — P. 329–341.
9. Chang P.-C., Liu C.-H. A TSK type fuzzy rule based system for stock price prediction// Expert Syst. Appl. — 2008. — 34. — P. 135–144.
10. Chang P.-C., Wu J.-L., Lin J.-J. A Takagi–Sugeno fuzzy model combined with a support vector regression for stock trading forecasting// Appl. Soft Comput. — 2016. — 38. — P. 831–842.
11. Du Z., Yan Z., Zhao Z. Interval type-2 fuzzy tracking control for nonlinear systems via sampled-data controller// Fuzzy Sets Syst. — 2019. — 356. — P. 92–112.
12. Hagrass H. A hierarchical type-2 fuzzy logic control architecture for autonomous mobile robots// IEEE Trans. Fuzzy Syst. — 2004. — 12. — P. 524–539.
13. Hamza M. F., Yap H. J., Choudhury I. A., Chiroma H., Kumbasar T. A survey on advancement of hybrid type 2 fuzzy sliding mode control// Neural Comput. Appl. — 2018. — 30, № 2. — P. 331–353.
14. Hu B. Q., Wang C. Y. On type-2 fuzzy relations and interval-valued type-2 fuzzy sets// Fuzzy Sets Syst. — 2014. — 236. — P. 1–32.
15. John R. I., Coupland S. Type-2 fuzzy logic: A historical view// IEEE Comput. Intel. Mag. — 2007. — 2, № 1. — P. 57–62.
16. Karnik N. N., Mendel J. M. Centroid of a type-2 fuzzy set// Inform. Sci. — 2001. — 132. — P. 195–220.

17. *Kumar A., Sharma S., Mitra R.* Design of type-2 fuzzy controller based on LQR mapped fusion function// Int. J. Intel. Syst. Appl. — 2012. — 8. — P. 18–29.
18. *Mendel J. M.* Type-2 fuzzy sets and systems: An overview// IEEE Comput. Intel. Mag. — 2007. — 2, № 1. — P. 20–29.
19. *Mendel J. M.* Type-2 fuzzy sets as well as computing with words// IEEE Comput. Intel. Mag. — 2019. — 2, № 1. — P. 82–95.
20. *Mendel J. M., Hagens H., Tan W.-W., Melek W. W., Ying H.* Introduction to type-2 fuzzy logic control. Theory and applications. — Hoboken (New Jersey): Wiley, 2014.
21. *Mizumoto M., Tanaka K.* Some properties of fuzzy sets of type 2// Inform. Control. — 1976. — 31. — P. 312–340.
22. *Nieminen J.* On the algebraic structure of fuzzy sets of type 2// Kybernetika. — 1977. — 13, № 4. — P. 261–273.
23. *Tai K., El-Sayed A.-R., Biglarbegian M., Gonzalez C. I., Castillo O., Mahmud S.* Review of recent type-2 fuzzy controller applications// Algorithms. — 2016. — 9. — P. 1–19.
24. *Tang X., Deng L., Yu J., Qu H.* Output feedback predictive control of interval type-2 T-S fuzzy systems with markovian packet losses// IEEE Trans. Fuzzy Syst. — 2018. — 26. — P. 2450–2459.
25. *Torshizi A. D., Zarandi M. H. F., Zakeri H.* On type-reduction of type-2 fuzzy sets: A review// Appl. Soft Comput. — 2015. — 27. — P. 614–627.
26. *Wagner C., Hagens H.* Toward general type-2 fuzzy logic systems based on zSlices// IEEE Trans. Fuzzy Syst. — 2010. — 18, № 4. — P. 637–660.
27. *Xiao B., Lam H. K., Yang X., Yu Y., Reu H.* Tracking control design of interval type-2 polynomial-fuzzy-model-based systems with time-varying delay// Engng. Appl. Art. Intel. — 2018. — 75. — P. 76–87.
28. *Zadeh L. A.* The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, I// Inform. Sci. — 1975. — 8. — P. 199–249.
29. *Zhang Z., Niu Y.* Adaptive sliding mode control for interval type-2 stochastic fuzzy systems subject to actuator failures// Int. J. Syst. Sci. — 2018. — 49. — P. 3169–3181.
30. *Zhou H.-B., Garibaldi J. M., John R. I., Chiclana F.* On constructing parsimonious type-2 fuzzy logic systems via influential rule selection// IEEE Trans. Fuzzy Syst. — 2009. — 17, № 4. — P. 654–667.

Шведов Алексей Сергеевич

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва

E-mail: ashvedov@hse.ru