Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Жукова, А. В. Шутов, Аддитивная задача с k числами специального вида, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 166, 10–21

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-166-10-21>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:20:23

АДДИТИВНАЯ ЗАДАЧА С k ЧИСЛАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

© 2019 г. А. А. ЖУКОВА, А. В. ШУТОВ

Аннотация. В работе рассматривается аддитивная задача вида $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$ с числом слагаемых не менее двух и с условиями на слагаемые $n_i \in \mathbb{N}(\alpha_i, I_i)$ при $1 \leq i \leq k$, где $\mathbb{N}(\alpha, I) = \{n \in \mathbb{N} : \{n\alpha\} \in I\}$.

Ключевые слова: аддитивная задача, равномерное распределение.

ADDITIVE PROBLEM WITH k NUMBERS OF A SPECIAL FORM

© 2019 А. А. ZHUKOVA, А. V. SHUTOV

ABSTRACT. In this paper, we consider an additive problem of the form $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$ with at least two summands, where the summands satisfy the condition $n_i \in \mathbb{N}(\alpha_i, I_i)$ for $1 \leq i \leq k$, where $\mathbb{N}(\alpha I) = \{n \in \mathbb{N} : \{n\alpha\} \in I\}$.

Keywords and phrases: additive problem, uniform distribution.

AMS Subject Classification: 11P99

1. Введение. В работе рассматривается аддитивная задача вида $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$ с числом слагаемых не менее двух и с условиями на слагаемые $n_i \in \mathbb{N}(\alpha_i, I_i)$ при $1 \leq i \leq k$, где $\mathbb{N}(\alpha, I) = \{n \in \mathbb{N} : \{n\alpha\} \in I\}$. Такие множества описывают, в частности, натуральные числа, имеющие заданное окончание разложения по линейным рекуррентным последовательностям, связанным с квадратичными числами Пизо. Кроме того, множества $\mathbb{N}(\alpha, I)$ являются частными случаями так называемых квазирешеток. Ранее рассматривались аддитивные задачи на множествах такого вида для случая $\alpha_i = \alpha$ при всех i . В этом случае были получены асимптотические формулы для числа решений аддитивной задачи с произвольным числом слагаемых и для среднего числа решений этой задачи. С. А. Гриценко и Н. Н. Мотькина обнаружили, что в случае линейных задач возникает нетривиальный эффект: появление некоторой достаточно сложной функции в главном члене асимптотики числа решений. Для нелинейных задач подобный эффект отсутствует и вид главного члена получается из соображений плотности.

В рассматриваемой задаче обнаружено, что поведение главного члена асимптотической формулы для числа решений существенным образом зависит от арифметических свойств α_i . В случае, когда размерность векторного пространства над полем рациональных чисел, порожденного числами $1, \alpha_1, \dots, \alpha_k$, равна двум, имеет место эффект Гриценко—Мотькиной, т.е. главный член имеет вид $\rho_k(\{N\hat{\alpha}_k\})N^{k-1}$, где $\rho_k(x)$ — эффективно вычисляемый кусочный многочлен степени $k-1$ и $\hat{\alpha}_k$ эффективно выражается через $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. В остальных случаях главный член асимптотики имеет плотностный вид, т.е. равен $\frac{1}{(k-1)!} \prod_{i=1}^k |I_i| \cdot N^{k-1}$.

Пусть α — иррациональное число и $I \subset [0; 1)$ — некоторый интервал. Определим множество

$$\mathbb{N}(\alpha, I) = \left\{ n \in \mathbb{N} : \{n\alpha\} \in I \right\},$$

где $\{\cdot\}$ означает дробную долю числа.

Впервые частный случай чисел вида $\mathbb{N}(\alpha, I)$ возник в [11]. Пусть F_n — n -е число Фибоначчи, т.е. элемент последовательности, заданной рекуррентной формулой $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$. Любое натуральное число N может быть однозначно разложено в систему счисления Фибоначчи, т.е.

$$N = \sum_{k \geq 1} \varepsilon_k(N) F_k, \quad \text{причем } \varepsilon_k(N) \varepsilon_{k+1}(N) = 0.$$

Пусть $\mathbb{F}_0 = \{N \in \mathbb{N} : \varepsilon_1(N) = 0\}$ — множество четно-фибоначчевых чисел. В [11] фактически было показано, что $\mathbb{F}_0 = \mathbb{N}(\tau, I_1) \cup \mathbb{N}(\tau, I_2)$, где $\tau = (\sqrt{5} - 1)/2$, вычислены интервалы I_1 и I_2 . Данное описание множества $\mathbb{F}_0$ позволило решить над этим множеством целый ряд теоретико-числовых задач. Были получены асимптотическая формула для решения бинарной аддитивной задачи в числах из $\mathbb{F}_0$, асимптотическая формула для количества чисел из $\mathbb{F}_0$, принадлежащих заданной арифметической прогрессии, оценки тригонометрических сумм по числам из $\mathbb{F}_0$.

В дальнейшем описанная характеристика была обобщена на случай чисел, имеющих произвольное заданное окончание разложения в систему счисления Фибоначчи (см. [7]). Аналогичный результат был получен для систем счисления, порождаемых рекуррентными соотношениями вида

$$F_{i+2}^{(g)} = gF_{i+1}^{(g)} + F_i^{(g)}$$

(см. [8]). Кроме того, подобные результаты были получены для некоторых специальных систем счисления, возникающих при изучении множеств ограниченного остатка (см. [20]).

В [1–6] было найдено решение целого ряда теоретико-числовых задач над числами $\mathbb{N}(\alpha, I)$ в случае, когда α является квадратичной иррациональностью либо алгебраическим числом. В частности, были найдены решения аналогов тернарной проблемы Гольдбаха (см. [4]), проблемы Хуа—Локена (см. [1]), проблемы Варинга (см. [6]), проблемы Лагранжа о четырех квадратах (см. [3]), а также получена оценка мощности исключительного множества для аналога бинарной проблемы Гольдбаха (см. [5]). При этом был обнаружен следующий эффект. В случае нелинейных аддитивных задач удавалось доказать асимптотические формулы вида $r(N) \sim |I|^k r^*(N)$, где $r(N)$ — число решений нелинейной аддитивной задачи с дополнительным условием принадлежности слагаемых множеств $\mathbb{N}(\alpha, I)$, $r^*(N)$ — число решений нелинейной аддитивной задачи без данного условия, а k — число слагаемых. В случае линейных задач асимптотическая формула принимает вид $r(N) \sim \sigma(N) r^*(N)$, где $\sigma(N)$ — некоторый особый ряд.

Бинарная аддитивная задача вида

$$n_1 + n_2 = N \tag{1}$$

с дополнительными условиями

$$n_1 \in \mathbb{N}(\alpha_1, I_1), \quad n_2 \in \mathbb{N}(\alpha_2, I_2) \tag{2}$$

и произвольными иррациональными α_1, α_2 решена в [9].

В данной работе найдена асимптотическая формула для числа решений уравнения

$$n_1 + \dots + n_k = N, \tag{3}$$

где $k \geq 2$, слагаемые удовлетворяют условиям

$$n_i \in \mathbb{N}(\alpha_i, I_i) \quad \text{при всех } 1 \leq i \leq k, \tag{4}$$

α_i — произвольные иррациональные числа.

В [19] была рассмотрена аддитивная задача о числе решений уравнения (3) с дополнительными условиями на слагаемые $n_i \in \mathbb{N}(\alpha, I_i)$, с произвольным количеством слагаемых k и произвольным иррациональным α . Была получена асимптотическая формула для числа решений рассматриваемой задачи, в которой особый ряд был заменен эффективно вычислимым интегралом кратности $k - 1$. В частности, была решена проблема необращения особого ряда в нуль. Альтернативная конечная формула для особого ряда была найдена в [2].

Отметим, что рассматриваемые нами множества $\mathbb{N}(\alpha, I)$ являются примерами так называемых одномерных квазирешеток. Более общий взгляд на одномерные квазирешетки можно найти

в [12, 18]. Многочисленные примеры рассмотрения теоретико-числовых задач над квазирешетками различных типов могут быть найдены в [10, 13, 15–17, 21].

2. Вспомогательные результаты. Для произвольного ε определим отображение

$$\iota_\varepsilon : x \rightarrow 1 - x + \varepsilon \pmod{1}.$$

Лемма 1. Если $N - n_1 = n$, где n, n_1, N — натуральные числа и $n_1 < N$, то условие $\{(N - n_1)\alpha\} \in I$ эквивалентно условию $\{n_1\alpha\} \in I'(N)$, где $I'(N) = \iota_{\{N\alpha\}}(I)$.

Доказательство. Пусть $I = (a, b)$. С одной стороны, условие $\{(N - n_1)\alpha\} \in I$ эквивалентно неравенствам

$$\{N\alpha\} - b < \{n_1\alpha\} < \{N\alpha\} - a$$

при $\{N\alpha\} \geq \{n_1\alpha\}$ и

$$\{N\alpha\} + 1 - b < \{n_1\alpha\} < \{N\alpha\} + 1 - a$$

при $\{N\alpha\} < \{n_1\alpha\}$.

С другой стороны, согласно определению отображения

$$\iota_{\{N\alpha\}} : x \rightarrow 1 - x + \{N\alpha\} \pmod{1}$$

имеем

$$a \rightarrow 1 - a + \{N\alpha\} \pmod{1}, \quad b \rightarrow 1 - b + \{N\alpha\} \pmod{1}.$$

Это означает, что условия

$$\{(N - n_1)\alpha\} \in I, \quad \{n_1\alpha\} \in \iota_{\{N\alpha\}}(I)$$

равносильны. Полагая $I'(N) = \iota_{\{N\alpha\}}(I)$, получим утверждение леммы 1. $\square$

Лемма 2 (см. [25]). Пусть f — интегрируемая по Риману функция, α — иррациональное число. Тогда

$$\sum_{i=1}^n f(\{i\alpha\}) \sim n \int_0^1 f(t) dt.$$

Пусть $\chi_I(x)$ — характеристическая функция интервала $I \subseteq [0; 1)$, т.е.

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in I, \\ 0, & \text{если } x \notin [0; 1) \setminus I; \end{cases}$$

$\chi_I(x)$ продолжается до периодической функции с периодом 1.

Лемма 3. При любом натуральном n , $I \subseteq [0, 1)$, справедлива асимптотика

$$\sum_{i=1}^n \chi_I(\{i\alpha\}) \sim n|I|,$$

где $|I|$ — длина интервала I .

Доказательство. Характеристическая функция $\chi_I(x)$ является кусочно постоянной, поэтому удовлетворяет условиям леммы 2. Имеем

$$\sum_{i=1}^n \chi_I(\{i\alpha\}) \sim n \int_0^1 \chi_I(t) dt = n \cdot |I|. \quad \square$$

Лемма 4. При любом натуральном n , иррациональном α и $I \subseteq [0, 1)$ справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{n=1}^M n^{m-1} \chi_I(\{n\alpha\}) \sim \frac{|I|}{m} M^m,$$

где $|I|$ — длина интервала I .

Доказательство. Воспользуемся формулой суммирования Абеля

$$\sum_{n=1}^M a_n b_n = a_M B_M - \sum_{n=1}^{M-1} (a_{n+1} - a_n) B_n, \quad \text{где} \quad B_n = \sum_{i=1}^n b_i, \quad (5)$$

ПОЛОЖИВ

$$a_n = n^{m-1}, \quad b_n = \chi_I(\{n\alpha\}), \quad B_n = \sum_{i=1}^n \chi_I(\{i\alpha\}).$$

Согласно лемме 3 сумма B_n асимптотически равна $n|I|$. В таком случае

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M n^{m-1} \chi_I(\{n\alpha\}) &\sim M^{m-1} B_M - \sum_{n=1}^{M-1} ((n+1)^{m-1} - n^{m-1}) B_n = \\ &= M^{m-1} \cdot M|I| - \sum_{n=1}^{M-1} (n+1-n) \sum_{j=0}^{m-2} (n+1)^j n^{m-2-j} \cdot n|I| = \\ &= |I| \left(M^m - \sum_{n=1}^{M-1} n^{m-1} \sum_{j=0}^{m-2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^j \right) \sim |I| \left(M^m - (m-1) \sum_{n=1}^{M-1} n^{m-1} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Далее, с учетом асимптотической формулы

$$\sum_{n=1}^M n^m \sim \frac{1}{m+1} M^{m+1} \quad (7)$$

имеем

$$\sum_{n=1}^M n^{m-1} \chi_I(\{n\alpha\}) \sim |I| \left(M^m - (m-1) \frac{(M-1)^m}{m} \right) \sim |I| \left(M^m - \frac{m-1}{m} M^m \right) = \frac{|I|}{m} M^m. \quad \square$$

Пусть $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ и $1, \alpha, \beta$ — линейно зависимые над $\mathbb{Z}$ величины, т.е. существуют такие целые числа C_1, C_2, C_3 , одновременно не равные нулю, что $C_1\alpha + C_2\beta + C_3 = 0$. Обозначим через $\text{Orb}(\alpha, \beta)$ замыкание множества точек вида $\{Q_i = (\{i\alpha\}, \{i\beta\})\}$, где $i \in \mathbb{N}$, и назовем *орбитой* точки Q_i .

Лемма 5 (см. [9]). *Длина замыкания орбиты $\text{Orb}(\alpha, \beta)$ вычисляется по формуле*

$$|\text{Orb}(\alpha, \beta)| = \begin{cases} \frac{|C_2|\sqrt{1+k^2}}{\text{НОД}(|C_1|, |C_2|)} & \text{при } k < 1, \\ \sqrt{2} & \text{при } k = 1, \\ \frac{|C_1|\sqrt{1+k^2}}{k \cdot \text{НОД}(|C_1|, |C_2|)} & \text{при } k > 1, \end{cases}$$

где величины $1, \alpha, \beta$ линейно зависимы над $\mathbb{Z}$, т.е. существуют такие целые числа C_1, C_2, C_3 , одновременно не равные нулю, что $C_1\alpha + C_2\beta + C_3 = 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $k = -C_1/C_2$.

Пусть

$$\hat{\alpha}_m = \frac{|(\hat{\alpha}_{m-1}, \alpha_m)|}{|\text{Orb}(\hat{\alpha}_{m-1}, \alpha_m)|},$$

где $(\hat{\alpha}_{m-1}, \alpha_m)$ — вектор и $\hat{\alpha}_1 = \alpha_1$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 6. *Если все α_i иррациональны, $0 < \alpha_i < 1$, и любая тройка чисел вида $1, \alpha_i, \alpha_j$ является линейно зависимой над $\mathbb{Z}$, то при любом $m \geq 1$ число $\hat{\alpha}_m$ иррационально, а величины $1, \hat{\alpha}_m, \alpha_{m+1}$ линейно зависимы над $\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Проведем доказательство, используя метод математической индукции. При $m = 1$ величины $1, \hat{\alpha}_1, \alpha_2$ (или иначе $1, \alpha_1, \alpha_2$) линейно зависимы над $\mathbb{Z}$, а α_1 — иррационально по условию.

Предположим, что утверждение леммы верно при $m = l$, т.е. величины $1, \hat{\alpha}_l, \alpha_{l+1}$ линейно зависимы над $\mathbb{Z}$ и число $\hat{\alpha}_l$ иррационально. В предположении, что лемма верна при $m = l$, докажем ее справедливость при $m = l + 1$. Вначале убедимся, что число

$$\hat{\alpha}_{l+1} = \frac{|(\hat{\alpha}_l, \alpha_{l+1})|}{|\text{Orb}(\hat{\alpha}_l, \alpha_{l+1})|}$$

иррационально. Утверждение леммы 5 можно переписать следующим образом: длина замыкания орбиты $\text{Orb}(\alpha, \beta)$ при любом $k > 0$ вычисляется по формуле

$$|\text{Orb}(\alpha, \beta)| = \frac{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}{\text{НОД}(|C_1|, |C_2|)}.$$

Поэтому, если существуют такие целые числа C_1, C_2, C_3 , одновременно не равные нулю, что $C_1\hat{\alpha}_l + C_2\alpha_{l+1} + C_3 = 0$, то

$$|\text{Orb}(\hat{\alpha}_l, \alpha_{l+1})| = \frac{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}{\text{НОД}(|C_1|, |C_2|)}.$$

Согласно предположению число $\hat{\alpha}_l$ иррационально, а α_{l+1} иррационально по условию; следовательно, существуют такие целые числа C_1, C_2 , одновременно не равные нулю, что

$$C_1\hat{\alpha}_l + C_2\alpha_{l+1} = 0,$$

т.е.

$$\hat{\alpha}_l = -\frac{C_2}{C_1}\alpha_{l+1}.$$

В таком случае длина вектора $(\hat{\alpha}_l, \alpha_{l+1})$ равна

$$\begin{aligned} |(\hat{\alpha}_l, \alpha_{l+1})| &= \sqrt{\hat{\alpha}_l^2 + \alpha_{l+1}^2} = \sqrt{\left(-\frac{C_2}{C_1}\alpha_{l+1}\right)^2 + \alpha_{l+1}^2} = \frac{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}{|C_1|}\alpha_{l+1}, \\ \hat{\alpha}_{l+1} &= \frac{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}{|C_1|}\alpha_{l+1} / \frac{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}{\text{НОД}(|C_1|, |C_2|)} = \frac{\text{НОД}(|C_1|, |C_2|)}{|C_1|}\alpha_{l+1}, \end{aligned}$$

т.е. число $\hat{\alpha}_{l+1} = \frac{\text{НОД}(|C_1|, |C_2|)}{|C_1|}\alpha_{l+1}$ иррационально. $\square$

Линейная зависимость над $\mathbb{Z}$ величин $1, \hat{\alpha}_{l+1}, \alpha_{l+2}$ (или иначе чисел $1, \frac{\text{НОД}(|C_1|, |C_2|)}{|C_1|}\alpha_{l+1}, \alpha_{l+2}$) следует из того, что по условию любая тройка чисел вида $1, \alpha_i, \alpha_j$ является линейно зависимой над $\mathbb{Z}$.

Пусть $r_2(\alpha_1, \alpha_2, I_1, I_2, N)$ (или, короче, $r_2(N)$) — число решений уравнения (1) с дополнительными условиями (2). В [9] доказано следующее утверждение.

Лемма 7. *Справедливы асимптотические формулы*

$$r(\alpha_1, \alpha_2, I_1, I_2, N) \sim \frac{|\text{Orb}(\alpha_1, \alpha_2) \cap P_N|}{|\text{Orb}(\alpha_1, \alpha_2)|} N, \quad r(\alpha_1, \alpha_2, I_1, I_2, N) \sim \frac{|\text{Orb}(\alpha_1, \alpha_2) \cap P'_N|}{|\text{Orb}(\alpha_1, \alpha_2)|} N,$$

где $|\cdot|$ — естественная мера на множестве $\text{Orb}(\alpha_1, \alpha_2)$, $P_N = I_1 \oplus \iota_{\{N\alpha_2\}}(I_2)$, $P'_N = \iota_{\{N\alpha_1\}}(I_1) \oplus I_2$ и $\iota_c(x) = \{1 - x + c\}$.

Обозначим дробь $\frac{|\text{Orb}(\alpha_1, \alpha_2) \cap P_N|}{|\text{Orb}(\alpha_1, \alpha_2)|}$, стоящую в правой части первой асимптотической формулы леммы 7, через $\rho_2(\{N\alpha_2\})$ и докажем несколько свойств этой функции в случае линейной зависимости α_1 и α_2 .

Лемма 8. *Если α_1 и α_2 линейно зависимы над $\mathbb{Z}$, то функция $\rho_2(\{N\alpha_2\})$ является непрерывной.*

Доказательство. Согласно определению $\rho_2(\{N\alpha_2\})$ — это отношение длины орбиты точки (α_1, α_2) , попадающей в прямоугольник P_N , к длине всей орбиты. В силу леммы 5 величина $|\text{Orb}(\alpha_1, \alpha_2)|$ является фиксированной для данных α_1 и α_2 .

Из линейной зависимости чисел α_1 и α_2 следует, что орбита точки (α_1, α_2) представляет собой отрезки параллельных прямых, расположенных на равных расстояниях, заключенных в единичном квадрате.

При изменении N меняется положение прямоугольника $P_N = I_1 \oplus \iota_{\{N\alpha_2\}}(I_2)$, но не его размеры, причем происходит сдвиг прямоугольника вдоль одной из осей координат (для определенности будем считать, что вдоль горизонтальной оси Ox). При сдвиге прямоугольника P_N вдоль оси Ox на бесконечно малую величину, разность между длиной орбиты точки (α_1, α_2) , попадающей в «новый» и в «старый» прямоугольники, будет бесконечно мала в силу равномерности расположения отрезков прямых $\text{Orb}(\alpha_1, \alpha_2)$. Это означает, что функция $\rho_2(\{N\alpha_2\})$ является непрерывной. $\square$

Лемма 9. *В случае линейной зависимости α_1 и α_2 над $\mathbb{Z}$ функция $\rho_2(x)$ представляет собой кусочно линейную периодическую функцию.*

Данное утверждение является следствием из лемм 5 и 6, доказанных в работе [9].

Воспользуемся перечисленными свойствами для доказательства еще одного свойства функции $\rho_2(x)$.

Лемма 10. *Если α_1 и α_2 линейно зависимы над $\mathbb{Z}$, то график функции $\rho_2(x)$ состоит из отрезков прямых, из которых хотя бы две имеют различные угловые коэффициенты.*

Доказательство. Предположим противное: пусть непрерывная и c -периодическая кусочно линейная функция $\rho_2(x)$ состоит из прямых с одинаковым угловым коэффициентом. Возможны два случая:

- (1) функция $\rho_2(x)$ представляет собой отрезок только одной прямой, т.е. $\rho_2(x) = a_1x + a_0$;
- (2) функция $\rho_2(x)$ состоит по крайней мере из двух прямых с одинаковым угловым коэффициентом.

Функция $\rho_2(x)$ периодическая, то есть существует $c > 0$, такое что $\rho_2(x + c) = \rho_2(x)$ для любых x . Очевидно, что в первом случае $\rho_2(0) \neq \rho_2(c)$, следовательно, нарушается свойство периодичности функции $\rho_2(x)$.

Во втором случае найдутся по крайней мере два таких отрезка $[t_{i-1}; t_i]$ и $[t_i; t_{i+1}] \subset [0; c]$, что $\rho_2(x) = a_1x + a_i$, если $x \in [t_{i-1}; t_i]$; $\rho_2(x) = a_1x + a_{i+1}$, если $x \in [t_i; t_{i+1}]$, причем $a_i \neq a_{i+1}$.

В таком случае при $x = t_i$ нарушается свойство непрерывности функции $\rho_2(x)$, так как $a_1t_i + a_i \neq a_1t_i + a_{i+1}$.

Значит, предположение о том, что непрерывная периодическая кусочно линейная функция $\rho_2(x)$ состоит из прямых с одинаковым угловым коэффициентом, неверно. $\square$

Основным результатом работы [9] является следующее утверждение.

Лемма 11. *Справедлива асимптотическая формула*

$$r_2(\alpha_1, \alpha_2, I_1, I_2, N) \sim \begin{cases} |I_1||I_2|N, & \text{если } 1, \alpha_1, \alpha_2 \text{ линейно независимы над } \mathbb{Z}, \\ \rho_2(\{N\alpha_2\})N, & \text{если } 1, \alpha_1, \alpha_2 \text{ линейно зависимы над } \mathbb{Z}; \end{cases}$$

здесь $\rho_2(x)$ представляет собой эффективно вычислимую кусочно линейную функцию, явный вид которой зависит от расположения интервалов I_1, I_2 , а также от вида линейной зависимости между $1, \alpha_1$ и α_2 .

Введем обозначение

$$\rho_{m+1}(x) = \int_0^1 \hat{\rho}_m(t) \chi_I(x - t) dt,$$

где $m \geq 2$, и докажем следующую лемму.

Лемма 12. Если $\hat{\rho}_m(x)$ — непрерывная периодическая функция с периодом 1, представляющая собой кусочный многочлен степени $m-1$, причем по крайней мере два многочлена имеют различные старшие коэффициенты, то $\rho_{m+1}(x)$ также будет непрерывной периодической функцией с периодом 1, являющейся таким кусочным многочленом степени m , что хотя бы два многочлена имеют различные старшие коэффициенты.

Доказательство. Опираясь на лемму 1, можно утверждать, что значения функции $\chi_I(x-t)$ совпадают со значениями функции $\chi_{I'(x)}(t)$, где $I'(x) = \iota_x(I)$. В таком случае

$$\rho_{m+1}(x) = \int_0^1 \hat{\rho}_l(t) \chi_{I'(x)}(t) dt = \int_x^{x+|I'(x)|} \hat{\rho}_m(t) dt = \int_x^{x+|I|} \hat{\rho}_m(t) dt - \int_0^x \hat{\rho}_m(t) dt,$$

так как $|I'(x)| = |I|$.

Непрерывность функции $\rho_{m+1}(x)$ следует из непрерывности функции $\hat{\rho}_m(x)$ и свойств интеграла с переменным верхним пределом.

Возможны два случая: (1) $x + |I| \leq 1$; (2) $x + |I| > 1$. В силу периодичности функции $\hat{\rho}_m(x)$ во втором случае имеем

$$\rho_{m+1}(x) = \int_0^1 \hat{\rho}_m(t) dt + \int_0^{x+|I|-1} \hat{\rho}_m(t) dt - \int_0^x \hat{\rho}_m(t) dt = \int_0^{x+|I|-1} \hat{\rho}_m(t) dt - \int_0^x \hat{\rho}_m(t) dt + C_0.$$

В силу периодичности функции $\hat{\rho}_m(x)$ можно ограничиться определением этой функции на отрезке $[0; 1]$.

Отрезок $[0; 1]$ разобьем на части такими точками t_i , что $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$. Если $x \in [t_{i-1}; t_i]$, где $i = 1, 2, \dots, n$, то

$$\hat{\rho}_m(x) = P_{i,m-1}(x) = \sum_{r=0}^{m-1} a_{i,r} x^r,$$

причём $P_{i,m-1}(x) \neq P_{i+1,m-1}(x)$ при любых $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Рассмотрим отдельно интеграл $\int_0^{x+\Delta} \hat{\rho}_m(t) dt$, где $x + \Delta \in [t_{p-1}; t_p]$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \int_0^{x+\Delta} \hat{\rho}_m(t) dt &= \int_0^{t_{p-1}} \hat{\rho}_m(t) dt + \int_{t_{p-1}}^{x+\Delta} \hat{\rho}_m(t) dt = \\ &= C_{p,0} + \int_{t_{p-1}}^{x+\Delta} \sum_{r=0}^{m-1} a_{p,r} t^r dt = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{a_{p,r}}{r+1} t^{r+1} \Big|_{t_{p-1}}^{x+\Delta} + C_{p,0} = \\ &= \sum_{r=0}^{m-1} \frac{a_{p,r}}{r+1} (x+\Delta)^{r+1} - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{a_{p,r}}{r+1} t_{p-1}^{r+1} + C_{p,0} = \sum_{r=0}^{m-1} a'_{p,r} x^{r+1} + C_p, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_{p,0} &= \int_0^{t_{p-1}} \hat{\rho}_m(t) dt, \quad a'_{p,r} = \sum_{s=0}^{m-r-1} \frac{(r+s+1)!}{s!(r+1)!} \frac{a_{p,r+s}}{r+s+1} \Delta^s, \\ C_p &= C_{p,0} - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{a_{p,r}}{r+1} t_{p-1}^{r+1} + \sum_{r=0}^{m-1} \frac{a_{p,r}}{r+1} \Delta^{r+1}. \end{aligned}$$

Пусть $x \in [t_{i-1}; t_i]$, $x + |I| - 1 \in [t_{j-1}; t_j]$ и $x + |I| \in [t_{k-1}; t_k]$; тогда

(1) при $x + |I| \leq 1$ получаем

$$\rho_{m+1}(x) = \sum_{r=0}^{m-1} a'_{k,r} x^{r+1} + C_k - \left(\sum_{r=0}^{m-1} a'_{i,r} x^{r+1} + C_i \right);$$

(2) при $x + |I| > 1$ имеем

$$\rho_{m+1}(x) = C_0 + \sum_{r=0}^{m-1} a'_{j,r} x^{r+1} + C_j - \left(\sum_{r=0}^{m-1} a'_{i,r} x^{r+1} + C_i \right).$$

По условию у функции $\hat{\rho}_m(x)$ найдутся хотя бы два не равных старших коэффициента многочлена $P_{i,m-1}(x)$ и $P_{j,m-1}(x)$, т.е. существуют $a_{i,m-1} \neq a_{j,m-1}$, следовательно, $a'_{i,m-1} \neq a'_{j,m-1}$.

Таким образом, доказано, что $\rho_{m+1}(x)$ является кусочным многочленом степени m , имеющим по крайней мере два различных старших коэффициента. $\square$

3. Общий случай. Пусть $r_k(\alpha_1, \dots, \alpha_k, I_1, \dots, I_k, N) = r_k(N)$ — число решений уравнения (3) с условиями на слагаемые (4) и $k \geq 2$.

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{A}^n$ над полем рациональных чисел, порожденное числами $1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, где α_i — такие иррациональные числа, что $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть d — размерность пространства $\mathbb{A}^n$ над $\mathbb{Q}$. В силу того, что все α_i иррациональны, выполняется неравенство $2 \leq d \leq n + 1$.

Теорема 1. *Справедлива асимптотическая формула*

$$r_k(N) \sim \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!} \rho_k(\{N\hat{\alpha}_k\}) N^{k-1}, & \text{если } d = 2, \\ \frac{1}{(k-1)!} \prod_{i=1}^k |I_i| \cdot N^{k-1}, & \text{если } d \geq 3; \end{cases}$$

здесь $\hat{\alpha}_k$ — эффективно выражаемая через $1, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ величина, $\rho_k(x)$ — кусочный многочлен степени $k-1$ и $k \geq 2$.

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции. Вначале убедимся в том, что теорема 1 верна при $k = 2$. Действительно, при $k = 2$ получаем результат, совпадающий с леммой 11. При этом можно положить $\hat{\alpha}_2 = \alpha_2$.

Предположим, что теорема 1 справедлива при $k = m$, т.е. асимптотическая формула для числа решений уравнения $n_1 + n_2 + \dots + n_m = N$ с дополнительными условиями на слагаемые $n_i \in \mathbb{N}(\alpha_i, I_i)$ имеет вид

$$r_m(N) \sim \begin{cases} \frac{1}{(m-1)!} \rho_m(\{N\hat{\alpha}_m\}) N^{m-1}, & \text{если } d = 2, \\ \frac{1}{(m-1)!} \prod_{i=1}^m |I_i| \cdot N^{m-1}, & \text{если } d \geq 3; \end{cases} \quad (8)$$

здесь $\hat{\alpha}_m$ — эффективно выражаемая через $1, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ величина, $\rho_m(x)$ — кусочный многочлен степени $m-1$.

В предположении, что теорема верна при $k = m$, докажем её справедливость при $k = m + 1$. Перепишем уравнение $n_1 + \dots + n_{m+1} = N$ в виде $n_1 + \dots + n_m = N - n_{m+1}$ и, заменив $N - n_{m+1}$ на n , запишем

$$r_{m+1}(N) = \sum_{\substack{n_{m+1}=1, \\ \{n_{m+1}\alpha_{m+1}\} \in I_{m+1}}}^{N-1} r_m(N - n_{m+1}) = \sum_{\substack{n=1, \\ \{(N-n)\alpha_{m+1}\} \in I_{m+1}}}^{N-1} r_m(n). \quad (9)$$

При $k = m + 1$ имеем $d = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}^{m+1}$. Рассмотрим два случая: $d \geq 3$ и $d = 2$.

Пусть $d \geq 3$. Воспользуемся леммой 1 и перепишем (9) в виде

$$r_{m+1}(N) = \sum_{\substack{n=1, \\ \{n\alpha_{m+1}\} \in I'_{m+1}(N)}}^{N-1} r_m(n) = \sum_{n=1}^{N-1} r_m(n) \chi_{I'_{m+1}(N)}(\{n\alpha_{m+1}\}),$$

где $I'_{m+1}(N) = \iota_{\{N\alpha_{m+1}\}}(I_{m+1})$.

В случае $d \geq 3$ найдутся такие числа α_i, α_j , что $1, \alpha_i, \alpha_j$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Переобозначим числа α_i так, чтобы числа $1, \alpha_1, \alpha_2$ были линейно независимыми; тогда $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}^m \geq 3$ и для $r_m(n)$ справедлива асимптотика (8), т.е.

$$r_m(n) \sim \frac{1}{(m-1)!} \prod_{i=1}^m |I_i| \cdot n^{m-1}.$$

Подставляя последнее выражение в формулу (9), получим асимптотику для r_{m+1} :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(m-1)!} \prod_{i=1}^m |I_i| \cdot n^{m-1} \cdot \chi_{I'_{m+1}(N)}(\{n\alpha_{m+1}\}) \sum_{n=1}^{N-1} n^{m-1} \chi_{I'_{m+1}(N)}(\{n\alpha_{m+1}\}).$$

Применим лемму 4 и запишем

$$r_{m+1}(N) \sim \frac{1}{(m-1)!} \prod_{i=1}^m |I_i| \cdot \frac{|I'_{m+1}|}{m} (N-1)^m \sim \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^{m+1} |I_i| \cdot N^m,$$

так как $|I'_{m+1}| = |I_{m+1}|$. Таким образом, теорема 1 доказана в случае $d \geq 3$.

Пусть $d = 2$. Перепишем (9) в виде

$$r_{m+1}(N) = \sum_{n=1}^{N-1} r_m(n) \chi_{I_{m+1}}(\{(N-n)\alpha_{m+1}\}).$$

В данном случае $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}^m = 2$, и для $r_m(n)$ справедлива асимптотика (8), т.е.

$$r_m(n) \sim \frac{1}{(m-1)!} \rho_m(\{N\hat{\alpha}_m\}) n^{m-1}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} r_{m+1}(N) &\sim \frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=1}^{N-1} \rho_m(\{n\hat{\alpha}_m\}) \cdot n^{m-1} \cdot \chi_{I_{m+1}}(\{(N-n)\alpha_{m+1}\}) \sim \\ &\sim \frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=1}^{N-1} n^{m-1} \rho_m(\{n\hat{\alpha}_m\}) \chi_{I_{m+1}}(\{(N-n)\alpha_{m+1}\}). \end{aligned}$$

В формуле суммирования по Абелю (5) положим

$$\begin{aligned} a_n &= n^{m-1}, \quad b_n = \rho_m(\{n\hat{\alpha}_m\}) \chi_{I_{m+1}}(\{(N-n)\alpha_{m+1}\}), \\ B_n &= \sum_{i=1}^n \rho_m(\{i\hat{\alpha}_m\}) \chi_{I_{m+1}}(\{(N-i)\alpha_{m+1}\}); \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned}
 r_{m+1}(N) &\sim \frac{1}{(m-1)!} \left((N-1)^{m-1} B_{N-1} - \sum_{n=1}^{N-2} ((n+1)^{m-1} - n^{m-1}) B_n \right) = \\
 &= \frac{1}{(m-1)!} \left((N-1)^{m-1} B_{N-1} - \sum_{n=1}^{N-2} B_n \left(\sum_{l=0}^{m-2} C_{m-1}^l n^l \right) \right) \sim \\
 &\sim \frac{1}{(m-1)!} \left((N-1)^{m-1} B_{N-1} - \sum_{n=1}^{N-2} (m-1) n^{m-2} B_n \right). \quad (10)
 \end{aligned}$$

Отдельно рассмотрим величину B_n , представляющую собой сумму произведений двух функций $\rho_m(\{i\hat{\alpha}_m\})$ и $\chi_{I_{m+1}}(\{(N-i)\alpha_{m+1}\})$.

Из условия $d = 2$, согласно лемме 6, следует, что $1, \hat{\alpha}_m, \alpha_{m+1}$ линейно зависимы над $\mathbb{Z}$. В этом случае замыкание множества точек $\{Q_i = (\{i\hat{\alpha}_m\}, \{i\alpha_{m+1}\})\}$, где i — натуральное, называемое орбитой точек Q_i и обозначаемое $\text{Orb}(\hat{\alpha}_m, \alpha_{m+1})$, будет являться объединением конечного числа отрезков, лежащих на параллельных прямых (см. [25]).

Далее, орбиту $\text{Orb}(\hat{\alpha}_m, \alpha_{m+1})$ можно отождествить с интервалом $[0; 1)$, склеив точки вида $(x, 1)$ с точками $(x, 0)$, а точки $(1, y)$ с точками $(0, y)$, и сжав полученный интервал до единичной длины. При таком отождествлении каждой точке Q_i на орбите $\text{Orb}(\hat{\alpha}_m, \alpha_{m+1})$ будет соответствовать единственная точка $\{i\hat{\alpha}_{m+1}\}$ промежутка $[0; 1)$, где

$$h\alpha_{m+1} = \frac{|(\hat{\alpha}_m, \alpha_{m+1})|}{|\text{Orb}(\hat{\alpha}_m, \alpha_{m+1})|}.$$

Построим такое соответствие κ , что $\kappa : \text{Orb}(\hat{\alpha}_m, \alpha_{m+1}) \rightarrow [0; 1)$. Ясно, что отображение κ взаимно однозначно и кусочно линейно. Определим на $[0; 1)$ функцию $\hat{\rho}_m(x) = \rho_m(x')$, где x' — абсцисса точки $\kappa^{-1}(x)$. Функция $\hat{\rho}_m(x)$ является кусочным многочленом степени $m-1$ как композиция кусочных многочленов степени $m-1$. Также определим множество $\hat{I}_{m+1} \subseteq [0; 1)$ как множество таких точек $y \in [0; 1)$, что ордината точки $\kappa^{-1}(y) \in I_{m+1}$. Множество $\hat{I}_{m+1}$ представляет собой объединение конечного числа интервалов, а его характеристическая функция — кусочно постоянна.

С учетом сказанного имеем

$$B_n = \sum_{i=1}^n \hat{\rho}_m(\{i\hat{\alpha}_{m+1}\}) \chi_{\hat{I}_{m+1}}(\{(N-i)\hat{\alpha}_{m+1}\}).$$

Согласно лемме 2 имеем

$$B_n \sim n \int_0^1 \hat{\rho}_m(t) \chi_{\hat{I}_{m+1}}(\{N\hat{\alpha}_m - t\}) dt.$$

Введем обозначение

$$\rho_{m+1}(x) = \int_0^1 \hat{\rho}_m(t) \chi_{\hat{I}_{m+1}}(x - t) dt, \quad m \geq 2.$$

Функция $\rho_{m+1}(x)$ является непрерывным кусочным многочленом степени m , где $m \geq 2$, так как удовлетворяет всем условиям леммы 12, и, в свою очередь согласно леммам 8, 9, 10, функция $\hat{\rho}_2(x)$ — непрерывная периодическая кусочно линейная функция, угловые коэффициенты которой принимают не менее двух различных значений.

Перепишем B_n в виде $n\rho_{m+1}(\{N\hat{\alpha}_{m+1}\})$. Подставив это выражение в формулу (10), получим

$$\begin{aligned} r_{m+1}(N) &\sim \frac{1}{(m-1)!} \left((N-1)^m \rho_{m+1}(\{N\hat{\alpha}_{m+1}\}) - \sum_{n=1}^{N-2} (m-1)n^{m-1} \rho_{m+1}(\{N\hat{\alpha}_{m+1}\}) \right) = \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \rho_{m+1}(\{N\hat{\alpha}_{m+1}\}) \left((N-1)^m - (m-1) \sum_{n=1}^{N-2} n^{m-1} \right). \end{aligned}$$

Воспользуемся асимптотикой (7) и получим

$$\begin{aligned} r_{m+1}(N) &\sim \frac{1}{(m-1)!} \rho_{m+1}(\{N\hat{\alpha}_{m+1}\}) \left((N-1)^m - \frac{m-1}{m} (N-2)^m \right) \sim \\ &\sim \frac{1}{(m-1)!} \rho_{m+1}(\{N\hat{\alpha}_{m+1}\}) \left(N^m - \frac{m-1}{m} N^m \right) = \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \rho_{m+1}(\{N\hat{\alpha}_{m+1}\}) \frac{1}{m} N^m = \frac{1}{m!} \rho_{m+1}(\{N\hat{\alpha}_{m+1}\}) N^m. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$r_{m+1}(N) \sim \begin{cases} \frac{1}{m!} \rho_{m+1}(\{N\hat{\alpha}_{m+1}\}) N^m, & \text{если } d = 2, \\ \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^{m+1} |I_i| \cdot N^m, & \text{если } d \geq 3, \end{cases}$$

что совпадает с утверждением теоремы 1 при $k = m + 1$. Теорема полностью доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гриценко С. А., Мотькина Н. Н. Задача Хуа—Локена с простыми числами специального вида // Докл. АН Респ. Таджикистан. — 2009. — 52, № 7. — С. 497–500.
2. Гриценко С. А., Мотькина Н. Н. О вычислении некоторых особых рядов // Чебышев. сб. — 2011. — 12, № 4. — С. 85–92.
3. Гриценко С. А., Мотькина Н. Н. О некоторых аддитивных задачах теории чисел // Науч. вед. БелГУ. Сер. мат. физ. — 2010. — 5 (76), № 18. — С. 83–87.
4. Гриценко С. А., Мотькина Н. Н. Об одном варианте тернарной проблемы Гольдбаха // Докл. АН Респ. Таджикистан. — 2009. — 52, № 6. — С. 413–417.
5. Гриценко С. А., Мотькина Н. Н. О теореме Чудакова в простых числах специального вида // Чебышев. сб. — 2011. — 12, № 4. — С. 75–84.
6. Гриценко С. А., Мотькина Н. Н. Проблема Варинга с натуральными числами специального вида // Чебышев. сб. — 2014. — 53, № 3. — С. 31–47.
7. Давлетьярова Е. П., Жукова А. А., Шутлов А. В. Геометризация системы счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // Алгебра и анализ. — 2013. — 25, № 6. — С. 1–23.
8. Давлетьярова Е. П., Жукова А. А., Шутлов А. В. Геометризация обобщенных систем счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // Чебышев. сб. — 2016. — 17, № 2. — С. 88–112.
9. Жукова А. А., Шутлов А. В. Бинарная аддитивная задача с числами специального вида // Чебышев. сб. — 2015. — 16, № 3. — С. 247–275.
10. Журавлев В. Г. Гиперболические над двумерными квазирешетками Фибоначчи // Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 6. — С. 45–62.
11. Журавлев В. Г. Четно-фибоначчевы числа: бинарная аддитивная задача, распределение по прогрессиям и спектр // Алгебра и анализ. — 2008. — 20, № 3. — С. 18–46.
12. Журавлев В. Г. Одномерные квазирешетки Фибоначчи и их приложения к диофантовым уравнениям и алгоритму Евклида // Алгебра и анализ. — 2007. — 19, № 3. — С. 151–182.
13. Журавлев В. Г. Суммы квадратов над ϕ -кольцом Фибоначчи // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2006. — 337. — С. 165–190.
14. Журавлев В. Г. Разбиения Розы и множества ограниченного остатка // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2005. — 322. — С. 83–106.

15. Журавлев В. Г. Уравнение Пелля над ϕ -кольцом Фибоначчи// Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2007. — 350. — С. 139–159.
16. Красильщиков В. В., Шутов А. В., Журавлев В. Г. Одномерные квазипериодические разбиения, допускающие вложение прогрессий// Изв. вузов. Мат. — 2009. — 7. — С. 3–9.
17. Красильщиков В. В., Шутов А. В. Распределение точек одномерных квазирешеток по переменному модулю// Изв. вузов. Мат. — 2012. — 3. — С. 17–23.
18. Шутов А. В. Арифметика и геометрия одномерных квазирешеток// Чебышев. сб. — 2010. — 11, № 1. — С. 255–262.
19. Шутов А. В. Об одной аддитивной задаче с дробными долями// Науч. вед. БелГУ. Сер. мат. физ. — 2013. — 5 (148), № 30. — С. 111–120.
20. Шутов А. В. Системы счисления и множества ограниченного остатка// Чебышев. сб. — 2006. — 7, № 3. — С. 110–128.
21. Шутов А. В. Тригонометрические суммы над одномерными квазирешетками// Чебышев. сб. — 2012. — 13, № 2. — С. 136–148.
22. Akiyama S. Self affine tiling and Pisot numeration system// in: Number Theory and Its Applications (Gyory K., Kanemitsu S., eds.). — Kluwer, 1999. — P. 7–17.
23. Rauzy G. Nombres algébriques et substitutions// Bull. Soc. Math. France. — 1982. — 110. — P. 147–178.
24. Shutov A. V., Maleev A. V., Zhuravlev V. G. Complex quasiperiodic self-similar tilings: their parameterization, boundaries, complexity, growth and similarities// Acta Crystallographica. — 2010. — A66. — P. 427–437.
25. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins.// Math. Ann. — 1916. — 77 (3). — P. 313–352.

Жукова Алла Адольфовна

Владимирский филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

E-mail: georg967@mail.ru

Шутов Антон Владимирович

Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых

E-mail: a1981@mail.ru