Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Зинченко, О решении аддитивных бинарных задач с полупростыми числами специального вида, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 166, 22–40

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-166-22-40>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 13:23:12

О РЕШЕНИИ АДДИТИВНЫХ БИНАРНЫХ ЗАДАЧ С ПОЛУПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

© 2019 г. Н. А. ЗИНЧЕНКО

Аннотация. Работа посвящена методам решения бинарных аддитивных задач с полупростыми числами, которые образуют достаточно «редкие» подпоследовательности натурального ряда. На эти числа накладываются дополнительные условия, главное из которых — принадлежность так называемым виноградовским промежуткам. Решаются две задачи, являющиеся аналогами проблемы делителей Титчмарша — выводятся асимптотические формулы для числа решений диофантовых уравнений с полупростыми числами специального вида. Используется метод тригонометрических сумм И. М. Виноградова.

Ключевые слова: бинарная аддитивная задача, тригонометрическая сумма, простое число, полупростое число, короткий промежуток.

ON ADDITIVE BINARY PROBLEMS WITH SEMIPRIME NUMBERS OF A SPECIFIC FORM

© 2019 N. A. ZINCHENKO

ABSTRACT. The paper is devoted to methods of solution of binary additive problems with semiprime numbers, which form sufficiently “rare” subsequences of the natural series. Additional conditions are imposed on these numbers; the main condition is belonging to so-called Vinogradov intervals. We solve two problems that are analogs to the Titchmarsh divisor problem; namely, based on the Vinogradov method of trigonometric sums, we obtain asymptotic formulas for the number of solutions to Diophantine equations with semiprime numbers of a specific form.

Keywords and phrases: binary additive problem, trigonometric sum, prime number, semiprime number, short interval.

AMS Subject Classification: 11D75

1. Введение. В аддитивной теории чисел определенное направление посвящено решению задач с простыми числами из так называемых *виноградовских (коротких)* промежутков:

$$[(2m)^c, (2m+1)^c), \quad m \in \mathbb{N}, \quad c \in (1, 2]. \quad (1)$$

Заметим, что если обозначить через $\{a\}$ дробную часть числа a , то принадлежность простого числа промежутку (1) равносильна условию

$$\left\{ \frac{1}{2} p^{1/c} \right\} < \frac{1}{2}.$$

Указанное направление возникло в связи с работами И. М. Виноградова [2] и С. А. Гриценко [5]. Аддитивные задачи с простыми числами из промежутков вида (1) рассматривались, например, в [6, 7, 13, 15]. Задачи из этих работ были либо тернарными, либо решались по схеме решения тернарной задачи, которую нельзя применить в случае аддитивных бинарных задач с простыми

числами из *виноградовских* промежутков. Для решения таких задач требуется аналог теоремы Бомбьери—Виноградова (см. [1, 14]), равный ей по силе, который пока не получен. Можно выделить теорему Д. Толева (см. [17], в которой было доказано, что, если выполняются неравенства $0 < \lambda < 1/4$, $0 < \theta < 1/4 - \lambda$, $A > 0$, то

$$\sum_{k \leq x^\theta} \max_{y \leq x} \max_{\gcd(a,k)=1} \left| \psi_\lambda(y; k, a) - \frac{y^{1-\lambda}}{\varphi(k)(1-\lambda)} \right| \leq \frac{x^{1-\lambda}}{\ln^A x},$$

где

$$\psi_\lambda(y; k, a) = \sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv a \pmod{k} \\ \{\sqrt{n}\} < 1/n^\lambda}} \Lambda(n).$$

В этой теореме граница изменения параметра k меньше, чем $x^{1/4}$, в то время как в классической теореме Бомбьери—Виноградова она близка к $x^{1/2}$. Поэтому применить теорему Толева к решению бинарных аддитивных задач с простыми числами из промежутков вида (1) не удастся. В [8] для частного случая эта граница приближена к $x^{1/3}$, но и этого недостаточно.

В настоящее время удастся решать бинарные аддитивные задачи с *полупростыми* числами из (1). Это числа вида $p_1 p_2$ или $p_1 p_2^a$. Они образуют достаточно редкие последовательности в множестве натуральных чисел. При $a \geq 2$ вторая из них близка к последовательности простых чисел. В работе будут рассмотрены две бинарные аддитивные задачи с этими числами из «виноградовских» промежутков, которые можно считать аналогами проблемы делителей Титчмарша. Задачи решаются методом тригонометрических сумм И. М. Виноградова. Методами, которыми решаются задачи, представленные в работе, можно решать и некоторые другие бинарные задачи с полупростыми числами из «виноградовских» промежутков.

2. Обозначения и вспомогательные леммы. Будем использовать следующие обозначения:

p, p_1, p_2 — простые числа;

$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$ — количество простых чисел, не превосходящих x ;

$\pi(x, a, k) = \sum_{\substack{p \leq x, \\ p \equiv a \pmod{k}}} 1$;

$\tau(m)$ — количество натуральных делителей числа m ;

$\mu(m)$ — значение функции Мёбиуса от m ;

$\varphi(m)$ — значение функции Эйлера от m ;

$\Lambda(n)$ — значение функции Мангольда от n ;

$\text{Li } x = \int_2^x \frac{du}{\ln u}$;

$\{x\}$ — дробная часть числа x ;

$\gcd(a, b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b ;

$[a, b]$ — наименьшее общее кратное чисел a и b ;

$f(x) \sim g(x)$ означает, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$;

$A \asymp B$ означает, что существуют такие c_1 и c_2 , что $c_1 B \leq A \leq c_2 B$.

Для доказательства теоремы используются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1 (теорема Бруна—Титчмарша, см. [12]). *Для натуральных чисел a и k , удовлетворяющих условиям $(a, k) = 1$ и $k \leq x$, имеем*

$$\pi(x, a, k) = \sum_{\substack{p \leq x, \\ p \equiv a \pmod{k}}} 1 < \frac{(2 + \eta)x}{\varphi(k) \ln \left(\frac{2x}{k} \right)},$$

где $\eta > 0$ и $x > x_0(\eta)$.

Лемма 2. Пусть $X \geq 2$; тогда справедливо равенство

$$\sum_{m \leq X} \frac{1}{\varphi(m)} = c_0 \ln X + O(1).$$

Лемма 3 (см. [4, с. 136]). При $N > 2$ и целом положительном l имеем

$$\sum_{0 < m \leq N} (\tau(m))^l \ll N(\ln N)^{2l-1},$$

где

$$c_0 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mu^2(r)}{r\varphi(r)}.$$

Лемма 4 (теорема Бомбьери–Виноградова). Для всякого $A > 0$ найдется такое B , что

$$\sum_{k \leq \frac{\sqrt{x}}{\ln^B x}} \max_{\substack{l \equiv l_0 \pmod{k} \\ (l,k)=1}} \left| \pi(x, l, k) - \frac{\text{Li}(x)}{\varphi(k)} \right| = O\left(\frac{x}{\ln^A x}\right).$$

Лемма 5 («лемма о стаканчиках» И. М. Виноградова, см. [3]). Пусть r — целое положительное число, α и β — действительные числа, $0 < \Delta < 0,25$, $\Delta \leq \beta - \alpha \leq 1 - \Delta$. Тогда существует периодическая функция $\psi(x)$ с периодом 1, обладающая следующими свойствами:

- (1) $\psi(x) = 1$ в интервале $\alpha + 0,5\Delta \leq x \leq \beta - 0,5\Delta$;
- (2) $0 \leq \psi(x) \leq 1$ в интервалах $\alpha - 0,5\Delta \leq x \leq \alpha + 0,5\Delta$ и $\beta - 0,5\Delta \leq x \leq \beta + 0,5\Delta$;
- (3) $\psi(x) = 0$ в интервале $\beta + 0,5\Delta \leq x \leq 1 + \alpha - 0,5\Delta$;
- (4) $\psi(x)$ разлагается в ряд Фурье вида

$$\psi(x) = \beta - \alpha + \sum_{m=1}^{\infty} (g_m e^{2\pi i m x} + h_m e^{-2\pi i m x}),$$

где g_m и h_m зависят только от m , α , β , Δ , причем

$$|g_m| \leq \frac{1}{\pi m}, \quad |h_m| \leq \frac{1}{\pi m}, \quad |g_m| \leq \beta - \alpha, \quad |h_m| \leq \beta - \alpha,$$

$$|g_m| < \frac{1}{\pi m} \left(\frac{r}{\pi m \Delta}\right)^r, \quad |h_m| < \frac{1}{\pi m} \left(\frac{r}{\pi m \Delta}\right)^r.$$

Лемма 6. Пусть x — большое число, $D \leq x^{1-\alpha}$, где

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}, \quad (l, D) = 1, \quad x_1 < x, \quad x - x_1 > x^{1-\alpha/2}.$$

Тогда

$$\sum_{x_1 \leq Dm+l \leq x} (\tau(Dm+l))^k = O\left(\frac{x-x_1}{D} (\ln x)^{a(k)}\right),$$

где $a(k)$ — константа, зависящая только от k .

К бинарным аддитивным задачам относится известная *проблема делителей Титчмарша*. Так стали называть задачу о получении асимптотической формулы для числа решений уравнения $p-1 = xy$, $p \leq n$, которую в 1930 г. поставил и решил Э. Титчмарш (см. [16]) в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана. В 1960-х гг. Ю. В. Линник с помощью разработанного им дисперсионного метода вывел асимптотическую формулу для этой задачи безусловно (см. [11]).

Так как пока бинарные аддитивные задачи с простыми числами из коротких промежутков не поддаются решению, то интерес представляет получение аналогов проблемы делителей Титчмарша с полупростыми числами из (1).

3. Аналог проблемы Титчмарша для полупростых чисел вида p_1p_2 из коротких промежутков. Будем рассматривать уравнение

$$p_1p_2 - xy = 1, \quad (2)$$

где $p_1p_2 \leq n$. Оно решается в переменных x, y, p_1 и p_2 , где x и y — числа натуральные. Простые числа p_1 и p_2 удовлетворяют дополнительным условиям $p_1 > \exp(\sqrt{\ln n})$ и $p_2 > \exp(\sqrt{\ln n})$.

Обозначим через $T(n)$ число решений уравнения (2). Очевидно,

$$T(n) = \sum_{\substack{p_1p_2 \leq n \\ p_1 > \exp(\sqrt{\ln n}) \\ p_2 > \exp(\sqrt{\ln n})}} \tau(p_1p_2 - 1). \quad (3)$$

Через $T_1(n)$ обозначим число решений уравнения (2) с полупростыми числами p_1p_2 из промежутков (1). Очевидно,

$$T_1(n) = \sum_{\substack{p_1p_2 \leq n \\ p_1 > \exp(\sqrt{\ln n}) \\ p_2 > \exp(\sqrt{\ln n}) \\ \{\frac{1}{2}(p_1p_2)^{1/c}\} < \frac{1}{2}}} \tau(p_1p_2 - 1). \quad (4)$$

Теорема 1. Если c — произвольное число из полуинтервала $(1, 2]$, $T(n)$ и $T_1(n)$ определены соотношениями (3) и (4) соответственно, то выполняется равенство

$$T_1(n) = \frac{1}{2}T(n) + O(n \ln \ln \ln n), \quad (5)$$

где

$$T(n) \sim c_0 n \ln \ln n, \quad c_0 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mu^2(r)}{r\varphi(r)}.$$

Доказательство теоремы 1 разбивается на несколько этапов.

1. Сначала рассмотрим сумму $T_1(n)$ и оценим ошибку, которая возникнет, если ограничить промежуток изменения переменной x в уравнении (2). Для этого преобразуем данную сумму с помощью вспомогательной периодической функции с периодом 1:

$$\varrho(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq y < 1/2, \\ 0, & \text{если } 1/2 \leq y < 1. \end{cases} \quad (6)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} T_1(n) &= \sum_{\substack{p_1p_2 \leq n \\ p_1 > \exp(\sqrt{\ln n}) \\ p_2 > \exp(\sqrt{\ln n})}} \tau(p_1p_2 - 1) \varrho\left(\frac{1}{2}(p_1p_2)^{1/c}\right) = \sum_{\substack{p_1p_2 \leq n, p_1p_2 - xy = 1 \\ p_1 > \exp(\sqrt{\ln n}) \\ p_2 > \exp(\sqrt{\ln n})}} \varrho\left(\frac{1}{2}(p_1p_2)^{1/c}\right) = \\ &= \sum_{\substack{p_1p_2 \leq n, p_1p_2 - xy = 1, x \leq \sqrt{n} \\ p_1 > \exp(\sqrt{\ln n}), p_2 > \exp(\sqrt{\ln n})}} \varrho\left(\frac{1}{2}(p_1p_2)^{1/c}\right) + \sum_{\substack{p_1p_2 \leq n, p_1p_2 - xy = 1, x > \sqrt{n} \\ p_1 > \exp(\sqrt{\ln n}), p_2 > \exp(\sqrt{\ln n})}} \varrho\left(\frac{1}{2}(p_1p_2)^{1/c}\right). \end{aligned}$$

Пусть $P = n^{1/(\ln \ln n)^2}$; тогда

$$T_1(n) = 2 \sum_{\substack{p_1p_2 \leq n, p_1p_2 - xy = 1 \\ x \leq \sqrt{n}P^{-10} \\ p_1 > \exp(\sqrt{\ln n}), p_2 > \exp(\sqrt{\ln n})}} \varrho\left(\frac{1}{2}(p_1p_2)^{1/c}\right) - R_2(n) + 2R_1(n), \quad (7)$$

где

$$R_1(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 - xy = 1, \ p_1 p_2 \leq n, \ \sqrt{n} P^{-10} < x \leq \sqrt{n} \\ p_1 > \exp(\sqrt{\ln n}), \ p_2 > \exp(\sqrt{\ln n})}} \varrho \left(\frac{1}{2} (p_1 p_2)^{1/c} \right),$$

$$R_2(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 - xy = 1, \ x \leq \sqrt{n}, \ y \leq \sqrt{n} \\ p_1 > \exp(\sqrt{\ln n}), \ p_2 > \exp(\sqrt{\ln n})}} \varrho \left(\frac{1}{2} (p_1 p_2)^{1/c} \right).$$

При оценке остатков используется лемма 1. Окончательно получаем, что

$$T_1(n) = 2 \sum_{\substack{p_1 p_2 \leq n, \ p_1 p_2 - xy = 1, \ x \leq \sqrt{n} P^{-10} \\ p_1 > \exp(\sqrt{\ln n}), \ p_2 > \exp(\sqrt{\ln n})}} \varrho \left(\frac{1}{2} (p_1 p_2)^{1/c} \right) + O \left(\frac{n}{\ln \ln n} \right). \quad (8)$$

2. Теперь необходимо ограничить промежуток изменения одного из простых чисел p_1 или p_2 . Преобразуем сумму в правой части равенства (8):

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p_1 p_2 \leq n, \ p_1 p_2 - xy = 1, \ x \leq \sqrt{n} P^{-10} \\ p_1 > \exp(\sqrt{\ln n}), \ p_2 > \exp(\sqrt{\ln n})}} \varrho \left(\frac{1}{2} (p_1 p_2)^{1/c} \right) = \\ = 2 \sum_{\substack{p_1 p_2 \leq n, \ p_1 p_2 - xy = 1, \ x \leq \sqrt{n} P^{-10} \\ \exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 \leq P, \ p_2 > \exp(\sqrt{\ln n})}} \varrho \left(\frac{1}{2} (p_1 p_2)^{1/c} \right) + 2R_3(n) + R_4(n), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$R_3(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 \leq n, \ p_1 p_2 - xy = 1, \ x \leq \sqrt{n} P^{-10} \\ P < p_1 \leq \sqrt{n}, \ p_2 > \exp(\sqrt{\ln n})}} \varrho \left(\frac{1}{2} (p_1 p_2)^{1/c} \right),$$

$$R_4(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 - xy = 1, \ p_1 \leq \sqrt{n}, \ p_2 \leq \sqrt{n} \\ p_1 > \exp(\sqrt{\ln n}), \ p_2 > \exp(\sqrt{\ln n}) \\ x \leq \sqrt{n} P^{-10}}} \varrho \left(\frac{1}{2} (p_1 p_2)^{1/c} \right).$$

Для оценки остатка $R_3(n)$ воспользуемся тем, что $|\varrho(n)| \leq 1$, и леммами 1 и 3. Получим

$$R_3(n) \ll n \ln \ln \ln n.$$

Оценивая $R_4(n)$, разобьем промежуток суммирования по p_1 :

$$R_4(n) \leq \sum_{\substack{p_1 p_2 - xy = 1 \\ p_1 \leq P, \ p_2 \leq \sqrt{n} \\ x \leq \sqrt{n} P^{-10}}} 1 + \sum_{\substack{p_1 p_2 - xy = 1 \\ P < p_1 \leq \sqrt{n}, \ p_2 \leq \sqrt{n} \\ x \leq \sqrt{n} P^{-10}}} 1 = r' + r''.$$

Вторая из сумм в правой части полученного неравенства оценивается так же, как и для $R_3(n)$. Получаем, что

$$r'' \ll n \ln \ln \ln n.$$

Применяя лемму 2, получим

$$r' \ll \sum_{m \leq P\sqrt{n}} \tau(m) \ll P\sqrt{n} \ln P\sqrt{n} \ll \frac{n \ln n}{(\ln \ln n)^2} \ll n \ln \ln \ln n.$$

Следовательно, $R_4(n) \ll n \ln \ln \ln n$. Подставляя в (9) оценки для $R_3(n)$ и $R_4(n)$, из (8) получаем

$$T_1(n) = 4\tilde{T}_1(n) + O(n \ln \ln \ln n), \quad (10)$$

где

$$\tilde{T}_1(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 \leq n, p_1 p_2 - xy = 1, x \leq \sqrt{n} P^{-10} \\ \exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 \leq P, p_2 > \exp(\sqrt{\ln n})}} \varrho \left(\frac{1}{2} (p_1 p_2)^{1/c} \right).$$

Рассуждая аналогично, получаем формулу

$$T(n) = 4\tilde{T}(n) + O(n \ln \ln \ln n), \quad (11)$$

где

$$\tilde{T}(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 - xy = 1, x \leq \sqrt{n} P^{-10}, p_1 p_2 \leq n \\ \exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 < P, p_2 > \exp(\sqrt{\ln n})}} 1$$

3. Получим асимптотическую формулу для суммы $\tilde{T}(n)$. Покажем, что главный член этой формулы по порядку равен $n \ln \ln n$. Заметим, что, если числа p_1 и x не взаимно просты ($\gcd(p_1, x) \neq 1$), то сравнение $p_1 p_2 \equiv 1 \pmod{x}$ не имеет решений, и слагаемые в сумме $\tilde{T}(n)$, соответствующие таким p_1 , будут равны нулю. Поэтому далее считаем, что суммирование происходит только по таким p_1 , которые взаимно просты с x . Поэтому

$$\tilde{T}(n) = \sum_{x \leq \sqrt{n} P^{-10}} \sum_{\substack{\exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 < P \\ \tilde{T}(n)}} \sum_{\substack{p_2 \leq \frac{n}{p_1} \\ p_2 \equiv p_1^* \pmod{x}}} 1,$$

где p_1^* — решение сравнения $p_1 y \equiv 1 \pmod{x}$.

Меняя порядок суммирования и используя для внутренней суммы обозначение из леммы 1, получим, что

$$\tilde{T}(n) = \sum_{\exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 < P} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10} \\ \gcd(p_1, x) = 1}} \pi \left(\frac{n}{p_1}, p_1^*, x \right).$$

Представим $\tilde{T}(n)$ в виде

$$\tilde{T}(n) = \sum_{\exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 < P} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10} \\ \gcd(x, p_1) = 1}} \frac{\text{Li} \left(\frac{n}{p_1} \right)}{\varphi(x)} + r(n), \quad (12)$$

где

$$r(n) \leq \sum_{\exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 < P} \sum_{x \leq \sqrt{n} P^{-10}} \left(\pi \left(\frac{n}{p_1}, p^*, x \right) - \frac{\text{Li} \left(\frac{n}{p_1} \right)}{\varphi(x)} \right).$$

Используя теорему Бомбьери—Виноградова (лемма 4), получаем:

$$\sum_{x \leq \sqrt{n} P^{-10}} \left| \pi \left(\frac{n}{p_1}, p^*, x \right) - \frac{\text{Li} \left(\frac{n}{p_1} \right)}{\varphi(x)} \right| \ll \frac{n}{p_1 \ln^A n},$$

где $A > 0$. Поэтому

$$r(n) \leq \frac{n}{\ln^A n} \sum_{\exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 < P} \frac{1}{p_1} \ll \frac{n \ln \ln n}{\ln^A n}. \quad (13)$$

После преобразования первого слагаемого в правой части (12) получим

$$\sum_{\exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 < P} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10} \\ \gcd(x, p_1) = 1}} \frac{\text{Li} \left(\frac{n}{p_1} \right)}{\varphi(x)} = s_1(n) + O(s_2(n)), \quad (14)$$

где

$$s_1(n) = n \sum_{\exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 < P} \frac{1}{p_1 \ln \frac{n}{p_1}} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10} \\ \gcd(x, p_1) = 1}} \frac{1}{\varphi(x)},$$

$$s_2(n) = \frac{n}{\ln^2 n} \sum_{\exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 < P} \frac{1}{p_1} \sum_{x \leq \sqrt{n} P^{-10}} \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Для $s_1(n)$ выведем асимптотическую формулу. Сначала вычислим внутреннюю сумму, представив ее в виде разности:

$$\sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10} \\ (x, p_1) = 1}} \frac{1}{\varphi(x)} = \sum_{x \leq \sqrt{n} P^{-10}} \frac{1}{\varphi(x)} - \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10} \\ p_1 | x}} \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Из леммы 2 следует, что

$$\sum_{x \leq \sqrt{n} P^{-10}} \frac{1}{\varphi(x)} = c_0 \ln \sqrt{n} P^{-10} + O(1) = \frac{c_0}{2} \ln n + O\left(\frac{\ln n}{(\ln \ln n)^2}\right),$$

где

$$c_0 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mu^2(r)}{r \varphi(r)}.$$

Так как для функции Эйлера выполняется неравенство $\varphi(a \cdot b) \geq \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, то

$$\sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10} \\ p_1 | x}} \frac{1}{\varphi(x)} = \sum_{x_1 \leq \sqrt{n}/P^{10} p_1} \frac{1}{\varphi(x_1 p_1)} \leq \sum_{x_1 \leq \sqrt{n}/P^{10} p_1} \frac{1}{\varphi(x_1) \varphi(p_1)}.$$

С учетом условия $p_1 > \exp(\sqrt{\ln n})$, формулы $\varphi(p_1) = p_1 - 1$ и леммы 2, получаем, что

$$\sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10} \\ p_1 | x}} \frac{1}{\varphi(x)} \leq \frac{1}{p_1 - 1} \sum_{x_1 \leq \sqrt{n} P^{-10}} \frac{1}{\varphi(x_1)} = O(1).$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10} \\ \gcd(x, p_1) = 1}} \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{c_0}{2} \ln n + O\left(\frac{\ln n}{(\ln \ln n)^2}\right).$$

Теперь вычислим сумму

$$\sum_{\exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 < P} \frac{1}{p_1 \ln \frac{n}{p_1}}.$$

Используя преобразование Абеля и формулу

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = C + \ln \ln n + O\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

которая верна для $n > 2$, получаем:

$$\sum_{\exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 < P} \frac{1}{p_1 \ln \frac{n}{p_1}} = \frac{\ln \ln n}{2 \ln n} + O\left(\frac{1}{(\ln n)^{3/2}}\right). \quad (15)$$

Отсюда, с учетом оценки для внутренней суммы, получаем

$$s_1(n) = \frac{c_0}{4} n \ln \ln n + O\left(\frac{n}{\sqrt{\ln n}}\right).$$

Для оценки $s_2(n)$ применим лемму 2 и формулу для суммы $\sum_{p \leq n} \frac{1}{p}$. Получим

$$s_2(n) \ll \frac{n}{\ln^2 n} \cdot \ln \ln n \cdot \ln n = \frac{n \ln \ln n}{\ln n}.$$

Подставляя в (14) асимптотическую формулу для $s_1(n)$ и учитывая оценку для $s_2(n)$, получаем

$$\sum_{\exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 < P} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10} \\ \gcd(x, p_1) = 1}} \frac{\text{Li}\left(\frac{n}{p_1}\right)}{\varphi(x)} = \frac{c_0}{4} n \ln \ln n + O\left(\frac{n}{\sqrt{\ln n}}\right).$$

С учетом этой формулы и оценки для $r(n)$ из (12), получаем асимптотическую формулу:

$$\tilde{T}(n) = \frac{c_0}{4} n \ln \ln n + O\left(\frac{n}{\sqrt{\ln n}}\right), \quad c_0 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mu^2(r)}{r \varphi(r)}. \quad (16)$$

4. Получим асимптотическую формулу для

$$\tilde{T}_1(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 \leq n, \ p_1 p_2 - xy = 1, \ x \leq \sqrt{n} P^{-10} \\ \exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 \leq P, \ p_2 > \exp(\sqrt{\ln n})}} \varrho\left(\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{1/c}\right).$$

4.1. Воспользуемся леммой 5 и выберем параметры r, Δ, α, β двумя способами. Сначала определим эти параметры так: $r = \lfloor \ln n \rfloor$, $\Delta = 1/\ln^2(n)$, где $n > [e^2]$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = \Delta/2$, $\beta = (1 - \Delta)/2$. Легко проверить, что эти числа удовлетворяют условиям леммы 5. Обозначим функцию $\psi(x)$, существование которой следует из леммы 5, через $\varrho_1(x)$.

Затем, при тех же r и Δ , положим $\alpha = -\Delta/2$, $\beta = (1 + \Delta)/2$, а соответствующую функцию обозначим $\varrho_2(x)$. Тогда из леммы 5 следует, что $\varrho_1(x) \leq \chi(x) \leq \varrho_2(x)$, и

$$\tilde{T}_{11}(n) \leq \tilde{T}_1(n) \leq \tilde{T}_{12}(n), \quad (17)$$

где

$$\tilde{T}_{1i}(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 - xy = 1, \ p_1 p_2 \leq n, \ x \leq \sqrt{n} P^{-10} \\ \exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 < P, \ p_2 > \exp(\sqrt{\ln n})}} \varrho_i\left(\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{1/c}\right), \quad i = 1, 2.$$

Если будут получены асимптотические формулы для $\tilde{T}_{11}(n)$ и $\tilde{T}_{12}(n)$ с совпадающими главными членами, то из неравенства (17) следует, что формула с таким же главным членом будет верна и для $\tilde{T}_1(n)$.

Раскладывая функции $\varrho_1(x)$ и $\varrho_2(x)$ в ряды Фурье, получим:

$$\begin{aligned} \varrho_1\left(\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{1/c}\right) &= \frac{1}{2} - \Delta + \sum_{|m| \geq 1} g_1(m) e^{\pi i m (p_1 p_2)^{1/c}}, \\ \varrho_2\left(\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{1/c}\right) &= \frac{1}{2} + \Delta + \sum_{|m| \geq 1} g_2(m) e^{\pi i m (p_1 p_2)^{1/c}}, \end{aligned}$$

где $|g_i(m)| \leq 1/\pi|m|$ для $i = 1, 2$. Отсюда и из (11) следует, что

$$4\tilde{T}_{1i}(n) = \left(\frac{1}{2} + O(\Delta)\right) T(n) + O(\ln \ln \ln n) + 4 \sum_{0 < |m| < \Delta^{-1} \ln n} g_i(m) v_m(n), \quad (18)$$

где

$$v_m(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 - xy = 1, \ p_1 p_2 \leq n, \ x \leq \sqrt{n} P^{-10} \\ \exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 < P, \ p_2 > \exp(\sqrt{\ln n})}} e^{\pi i m (p_1 p_2)^{1/c}}.$$

Следовательно, такая же формула верна и для $4\tilde{T}_1(n)$:

$$4\tilde{T}_1(n) = \left(\frac{1}{2} + O(\Delta)\right) T(n) + O(\ln \ln \ln n) + 4 \sum_{0 < |m| < \Delta^{-1} \ln n} g(m) v_m(n).$$

Подставляя полученное равенство в (10), получим:

$$T_1(n) = \left(\frac{1}{2} + O(\Delta)\right) T(n) + O(\ln \ln \ln n) + 4 \sum_{0 < |m| < \Delta^{-1} \ln n} g(m) v_m(n).$$

Следовательно,

$$T_1(n) = \frac{1}{2} c_0 n \ln \ln n + O(\Delta n \ln \ln n) + O(n \ln \ln \ln n) + 4 \sum_{0 < |m| < \Delta^{-1} \ln n} g(m) v_m(n). \quad (19)$$

Теперь требуется оценить последнюю сумму в (19) так, чтобы была получена асимптотическая формула для $T_1(n)$.

4.2. Оценка тригонометрической суммы $v_m(n)$ представлена в [9]. Рассмотрим вывод этой оценки схематически. Сначала промежутки $(\exp(\sqrt{\ln n}), P]$ суммирования по p_1 разобьем на промежутки $p_1 \in (P_1/2, P_1]$, где $P_1 \leq P$, $P_1/2 > e^{\sqrt{\ln n}} > 1$, и рассмотрим суммы, соответствующие этим промежуткам:

$$S(m, P_1) = \sum_{\substack{p_1 p_2 - xy = 1 \\ x \leq \sqrt{n} P^{-10}}} \sum_{\frac{P_1}{2} < p_1 \leq P_1} \sum_{p_1 p_2 \leq n} e^{\pi i m (p_1 p_2)^{1/c}},$$

где $P_1 \in (\exp(\sqrt{\ln n}), P]$. Оценивая эту сумму сверху и применяя неравенство Коши, получим:

$$|S(m, P_1)|^2 \ll \frac{n}{P_1} \sum_{\substack{P_1/2 < p_1 \leq P_1 \\ P_1/2 < p'_1 \leq P_1}} \sum_{n_2 \leq \min\left(\frac{n}{p_1}, \frac{n}{p'_1}\right)} \tau'(p_1 n_2 - 1) \tau'(p'_1 n_2 - 1) e^{\pi i m (p_1^{1/c} - (p'_1)^{1/c}) n_2^{1/c}},$$

где

$$\tau'(k) = \sum_{\substack{xy=k \\ x \leq \sqrt{n} P^{-10}}} 1.$$

Выделяя диагональные слагаемые ($p_1 = p'_1$), имеем

$$|S(m, P_1)|^2 \ll \frac{n}{P_1} \sum_{P_1/2 < p_1 \leq P_1} \sum_{n_2 \leq 2n/P_1} \tau^2(p_1 n_2 - 1) + \left| \frac{n}{P_1} \sum_{\frac{P_1}{2} < p_1 \leq P_1} \sum_{\substack{P_1/2 < p_1 \leq P_1 \\ p_1 \neq p'_1}} \sum_{n_2 \leq \min\left(\frac{n}{p_1}, \frac{n}{p'_1}\right)} \tau'(p_1 n_2 - 1) \tau'(p'_1 n_2 - 1) e^{\pi i m (p_1^{1/c} - (p'_1)^{1/c}) n_2^{1/c}} \right|.$$

Отсюда, используя для оценки первой суммы лемму 6, получим неравенство

$$|S(m, P_1)|^2 \ll n^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \sqrt{\ln n}\right) + \frac{n}{P_1} \sum_{P_1/2 < p_1 \leq P_1} \sum_{\substack{P_1/2 < p'_1 \leq P_1 \\ p_1 \neq p'_1}} |S(m, P_1, p_1, p'_1)|, \quad (20)$$

где

$$S(m, P_1, p_1, p'_1) = \sum_{n_2 \leq n_3} \tau'(p_1 n_2 - 1) \tau'(p'_1 n_2 - 1) e^{\pi i m (p_1^{1/c} - (p'_1)^{1/c}) n_2^{1/c}}, \quad n_3 = \min\left(\frac{n}{p_1}, \frac{n}{p'_1}\right).$$

Очевидно, что

$$S(m, P_1, p_1, p'_1) = \sum_{x \leq \sqrt{n}P^{-10}} \sum_{x_1 \leq \sqrt{n}P^{-10}} \sum_{\substack{n_2 \leq n_3, \\ n_2 \equiv p_1^* \pmod{x}, \\ n_2 \equiv p_1'^* \pmod{x}}} e^{\pi i m (p_1^{1/c} - (p'_1)^{1/c}) n_2^{1/c}},$$

где $p_1 p_1^* \equiv 1 \pmod{x}$ и $p'_1 p_1'^* \equiv 1 \pmod{x}$. Также можно заметить, что, если внутренняя сумма в последнем равенстве не пуста, то n_2 принадлежит одному из классов вычетов по модулю $[x_1, x]$. Поэтому

$$S(m, P_1, p_1, p'_1) = \sum_{\delta \leq \sqrt{n}P^{-10}} \sum_{x \leq \sqrt{n}P^{-10}} \sum_{\substack{x_1 \leq \sqrt{n}P^{-10} \\ (x, x_1) = \delta}} \sum_{m_2 \leq m_3} e^{\pi i m (p_1^{1/c} - (p'_1)^{1/c}) (\eta + x x_1 m_2 / \delta)^{1/c}},$$

где $m_3 = \frac{n_3 - \eta}{[x_1, x]}$ и $0 \leq \eta \leq [x_1, x]$. Отметим, что сумма по m_2 «довольно длинная». Например, если $\delta = 1$, то $m_3 \gg P^{19}$.

Обозначим через $\kappa = m(p_1^{1/c} - (p'_1)^{1/c})$ и

$$S(m_3, P_1, p_1, p'_1, x, x_1, \delta) = \sum_{m_2 \leq m_3} e^{\pi i \kappa (\eta + x x_1 m_2 / \delta)^{1/c}};$$

тогда

$$S(m, P_1, p_1, p'_1) = \sum_{\delta \leq \sqrt{n}P^{-10}} \sum_{x \leq \sqrt{n}P^{-10}} \sum_{\substack{x_1 \leq \sqrt{n}P^{-10} \\ (x, x_1) = \delta}} S(m_3, P_1, p_1, p'_1, x, x_1, \delta).$$

Разобьем промежутки изменения m_3 по геометрическим прогрессиям и рассмотрим два случая. Если $m_4 \leq m_3/P$, то, применяя тривиальную оценку, получим:

$$S(m_3, P_1, p_1, p'_1, x, x_1, \delta) \ll \frac{m_3}{P} \ln n,$$

откуда следует, что

$$S(m, P_1, p_1, p'_1) \ll \frac{n \ln^4 n}{P P_1}.$$

Подставляя эту оценку в (20), получим:

$$|S(m, P_1)|^2 \ll n^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\ln n}\right).$$

Введем обозначения

$$\kappa = m(p_1^{1/c} - (p'_1)^{1/c}), \quad S(m_3, P_1, p_1, p'_1, x, x_1, \delta) = \sum_{m_2 \leq m_3} e^{\pi i \kappa (\eta + x x_1 m_2 / \delta)^{1/c}};$$

тогда

$$S(m, P_1, p_1, p'_1) = \sum_{\delta \leq \sqrt{n}P^{-10}} \sum_{x \leq \sqrt{n}P^{-10}} \sum_{\substack{x_1 \leq \sqrt{n}P^{-10} \\ (x, x_1) = \delta}} S(m_3, P_1, p_1, p'_1, x, x_1, \delta).$$

Разобьем промежутки изменения m_3 по геометрическим прогрессиям и рассмотрим два случая. Если $m_4 \leq m_3/P$, то, применяя тривиальную оценку, получим:

$$S(m_3, P_1, p_1, p'_1, x, x_1, \delta) \ll \frac{m_3}{P} \ln n.$$

и, следовательно,

$$S(m, P_1, p_1, p'_1) \ll \frac{n \ln^4 n}{P P_1}.$$

Воспользовавшись этой оценкой, из (20) получим:

$$|S(m, P_1)|^2 \ll n^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\ln n}\right).$$

В дальнейшем считаем, что $m_4 > m_3/P$, и рассмотрим сумму

$$S(m_4) = \sum_{m_4 < m_2 \leq 2m_4} e^{\pi i \chi(\eta + xx_1 m_2 / \delta)^{1/c}}.$$

Для случая, когда

$$0 < \frac{|\chi|(xx_1/\delta)^{1/c}}{m_4^{1-1/c}} < \frac{1}{10}, \quad S(m_4) \ll \left(\frac{xx_1}{\delta}\right)^{-1/c} \frac{m_4^{1-1/c}}{|\chi|}.$$

Далее будем рассматривать

$$\frac{|\chi|(xx_1/\delta)^{1/c}}{m_4^{1-1/c}} > \frac{1}{10}.$$

Сумма $S(m_4)$ оценивается методом И. М. Виноградова.

Для случая $xx_1/\delta > n^{0.99}$ можно применить схему И. М. Виноградова оценки дзетовой суммы (см., например, [10, с. 94–95]), включающую использование «теоремы о среднем». Получаем оценку

$$S(m_4) \ll m_4 \exp\left(-\gamma \frac{\ln n}{(\ln \ln n)^6}\right).$$

Если $xx_1/\delta \leq n^{0.99}$, то для оценки $S(m_4)$ применим метод ван дер Корпута; в этом случае получаем оценку $S(m_4) \ll \sqrt{m_4}$. Окончательно получаем, что

$$v_m(n) \ll n e^{-\frac{1}{4}\sqrt{\ln n}}.$$

С учетом этой оценки из (18) следует, что

$$T_1(n) = \frac{1}{2}T(n) + O(n \ln \ln \ln n).$$

Так как $T(n) \sim c_0 n \ln \ln n$, то полученная формула является асимптотической. Доказательство теоремы 1 завершено. $\square$

4. Аналог проблемы Титчмарша для полупростых чисел вида $p_1 p_2^a$ из коротких промежутков. Выведем асимптотическую формулу для числа решений уравнения $p_1 p_2^a - xy = 1$, где $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$, числа $p_1 p_2^a$ принадлежат промежуткам вида (1), $p_1 p_2^a \leq n$, и простые числа p_1, p_2 удовлетворяют дополнительным условиям.

Теорема 2. Пусть $n \geq n_0 > 0$, $a \geq 2$ — натуральные числа, $Q = \exp(\sqrt{\ln n})$, $A_1 = [1, nQ^{-1}]$, $A_2 = [1, Q^{1/a}]$ и

$$G(n) = \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{\substack{p_2 \in A_2 \\ p_1 p_2^a - xy = 1}} \sum_{x, y} 1, \quad G_1(n) = \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{\substack{p_2 \in A_2 \\ p_1 p_2^a - xy = 1 \\ \{\frac{1}{2}(p_1 p_2^a)^{1/c}\} < \frac{1}{2}}} \sum_{x, y} 1.$$

Тогда справедливо равенство

$$G_1(n) = \frac{1}{2}G(n)(1 + O(Q^{-\eta})),$$

где

$$G(n) = c_0 \operatorname{Li}\left(\frac{n}{Q}\right) \pi(Q^{1/a}) \ln n \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)\right),$$

$\eta > 0$ — абсолютная постоянная,

$$c_0 = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)d}.$$

Доказательство теоремы разбивается на несколько этапов.

1. Получим асимптотическую формулу для $G(n)$. Сначала ограничим промежуток изменения переменной x . Получим

$$G(n) = 2G'(n) - G''(n), \quad (21)$$

где

$$G'(n) = \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{\substack{p_2 \in A_2 \\ p_1 p_2^a - xy = 1}} \sum_{x \leq \sqrt{n}} 1, \quad quad G''(n) = \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{\substack{p_2 \in A_2 \\ p_1 p_2^a - xy = 1}} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} \\ y \leq \sqrt{n}}} 1.$$

Оценим сумму $G''(n)$, представив ее в виде суммы двух слагаемых $G''(n) = G_1''(n) + G_2''(n)$, где

$$G_1''(n) = \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{\substack{p_2 \in A_2 \\ p_1 p_2^a - xy = 1}} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} Q^{-1} \\ y \leq \sqrt{n}}} 1, \quad G_2''(n) = \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{\substack{p_2 \in A_2 \\ p_1 p_2^a - xy = 1}} \sum_{\substack{\sqrt{n} Q^{-1} < x \leq \sqrt{n} \\ y \leq \sqrt{n}}} 1.$$

Заметим, что

$$G_1''(n) \leq \sum_{m \leq n Q^{-1} + 1} \tau(m-1) t_1(m), \quad \text{где } t_1(m) = \sum_{\substack{p_1 p_2^a = m \\ p_1 \in A_1 \\ p_2 \in A_2}} 1.$$

Очевидно, что $t_1(m) = 1$, если $m = p^{a+1}$ или $m = p_1 p_2^a$ и $t_1(m) = 0$ — во всех других случаях. С учетом этого замечания из леммы 3 получаем оценку

$$G_1''(n) \leq \sum_{m \leq n Q^{-1} + 1} \tau(m-1) \ll \frac{n \ln n}{Q}.$$

Оценим $G_2''(n)$. Так как в случае, когда $p_2 \mid x$, уравнение $p_1 p_2^a - xy = 1$ не имеет решений, то

$$G_2''(n) = \sum_{\sqrt{n} Q^{-1} < x \leq \sqrt{n}} \sum_{\substack{p_2 \in A_2 \\ \gcd(p_2, x) = 1}} \sum_{\substack{p_1 \in A_1 \\ p_1 \equiv p_2^* \pmod{x}}} 1 = \sum_{\sqrt{n} P Q^{-1} < x \leq \sqrt{n}} \sum_{\substack{p_2 \in A_2 \\ \gcd(p_2, x) = 1}} \pi(n Q^{-1}, p_2^*, x),$$

где p_2^* — решение сравнения $p_2^a t \equiv 1 \pmod{x}$. Применяя леммы 1 и 2, получаем:

$$G_2''(n) \ll \frac{n}{Q \ln n} \sum_{p_2 \in A_2} \sum_{\sqrt{n} Q^{-1} < x \leq \sqrt{n}} \frac{1}{\varphi(x)} \ll \frac{n}{Q} \pi(Q^{1/a}) \frac{\ln Q}{\ln n}.$$

Из оценок для $G_1''(n)$ и $G_2''(n)$ следует, что

$$G''(n) \ll \frac{n}{Q} \pi(Q^{1/a}) \frac{\ln Q}{\ln n}. \quad (22)$$

Для оценки суммы $G'(n)$ представим ее, как и $G''(n)$, в виде суммы двух слагаемых:

$$G'(n) = G_1'(n) + G_2'(n) = \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{\substack{p_2 \in A_2 \\ p_1 p_2^a - xy = 1}} \sum_{x \leq \sqrt{n} Q^{-1}} 1 + \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{\substack{p_2 \in A_2 \\ p_1 p_2^a - xy = 1}} \sum_{\sqrt{n} Q^{-1} < x \leq \sqrt{n}} 1.$$

Сумма $G_2'(n)$ оценивается так же, как и $G_2''(n)$, поэтому

$$G_2'(n) \ll \frac{n}{P Q} \pi(Q^{1/a}) \frac{\ln Q}{\ln n}.$$

Рассмотрим сумму $G'_1(n)$ и получим для нее асимптотическую формулу. Имеем

$$\begin{aligned} G'_1(n) &= \sum_{x \leq \sqrt{n}Q^{-1}} \sum_{\substack{p_2 \in A_2 \\ \gcd(p_2, x)=1}} \pi\left(\frac{n}{Q}, p_2^*, x\right) = \\ &= \text{Li}\left(\frac{n}{Q}\right) \sum_{p_2 \in A_2} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n}Q^{-1} \\ \gcd(p_2, x)=1}} \frac{1}{\varphi(x)} + O\left(\sum_{p_2 \in A_2} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n}Q^{-1} \\ \gcd(p_2, x)=1}} \left|\pi\left(\frac{n}{Q}, p_2^*, x\right) - \frac{\text{Li}\left(\frac{n}{Q}\right)}{\varphi(x)}\right|\right), \end{aligned}$$

где p_2^* — решение сравнения $p_2^a t \equiv 1 \pmod{x}$. Отсюда, в силу теоремы Бомбьери—Виноградова (лемма 4)

$$G'_1(n) = \text{Li}\left(\frac{n}{Q}\right) \sum_{p_2 \in A_2} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n}Q^{-1} \\ \gcd(p_2, x)=1}} \frac{1}{\varphi(x)} + O\left(\frac{n\pi(Q^{1/a})}{Q \ln n}\right).$$

Для оценки внутренней суммы в первом слагаемом правой части полученного равенства проведем рассуждения, аналогичные тем, что проводились на этапе 3 при доказательстве теоремы 1. Получим

$$\sum_{\substack{x \leq \sqrt{n}Q^{-1} \\ \gcd(p_2, x)=1}} \frac{1}{\varphi(x)} = c_0 \ln\left(\frac{\sqrt{n}}{Q}\right) + O\left(\frac{\ln n}{p_2}\right),$$

где

$$c_0 = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)d}.$$

Просуммировав обе части полученного равенства по $p_2 \in A_2$, получим

$$\sum_{p_2 \in A_2} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n}Q^{-1} \\ \gcd(p_2, x)=1}} \frac{1}{\varphi(x)} = c_0 \ln\left(\frac{\sqrt{n}}{Q}\right) \pi(Q^{1/a}) + O(\ln n \ln \ln Q).$$

Поэтому имеем асимптотическую формулу

$$G'_1(n) = c_0 \text{Li}\left(\frac{n}{Q}\right) \pi(Q^{1/a}) \ln\left(\frac{\sqrt{n}}{Q}\right) \left(1 + O\left(\frac{\ln Q}{\ln n}\right)\right).$$

Отсюда, с учетом оценки для $G''_2(n)$, получим

$$G'(n) = \frac{c_0}{2} \text{Li}\left(\frac{n}{Q}\right) \pi(Q^{1/a}) \ln n \left(1 + O\left(\frac{\ln Q}{\ln n}\right)\right). \quad (23)$$

Окончательно, подставляя (23) и (22) в (21), приходим к асимптотической формуле

$$G(n) = c_0 \text{Li}\left(\frac{n}{Q}\right) \pi(Q^{1/a}) \ln n \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)\right). \quad (24)$$

2. Рассмотрим сумму

$$G_1(n) = \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{\substack{p_2 \in A_2 \\ p_1 p_2^2 - xy = 1 \\ \{\frac{1}{2}(p_1 p_2^2)^{1/c}\} < \frac{1}{2}}} \sum_{x, y} 1.$$

Считаем далее, что $n \geq n_0 > 0$, где n_0 — достаточно большое число. Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 2, будем использовать вспомогательную периодическую функцию $\chi(x)$, определенную равенством

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x < 1/2, \\ 0, & \text{если } 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

Очевидно,

$$G_1(n) = \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{\substack{p_2 \in A_2 \\ p_1 p_2^a - xy = 1}} \chi \left(\frac{1}{2} (p_1 p_2^a)^{1/c} \right).$$

Так же, как это было при доказательстве теоремы 1, воспользуемся леммой 5 и выберем параметры r , Δ , α , β двумя способами.

В данном случае сначала определим эти параметры так:

$$r = [\ln n], \quad \Delta = \frac{1}{\ln^2 n}, \quad \alpha = \Delta, \quad \beta = \frac{1}{2} - \Delta.$$

Обозначим через $\chi_1(x)$ функцию, существование которой следует из леммы 5. Затем при тех же r и Δ положим $\alpha = -\Delta$, $\beta = 1/2 + \Delta$, а соответствующую функцию обозначим $\chi_2(x)$. Тогда из леммы 5 вытекает, что $\chi_1(x) \leq \chi(x) \leq \chi_2(x)$ и, следовательно,

$$G_{11}(n) \leq G_1(n) \leq G_{12}(n), \quad (25)$$

где

$$G_{1i}(n) = \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{p_2 \in A_2} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} \\ p_1 p_2^a - xy = 1}} \chi_i \left(\frac{1}{2} (p_1 p_2^a)^{1/c} \right), \quad i = 1, 2.$$

Если будут получены асимптотические формулы для $G_{11}(n)$ и $G_{12}(n)$ с совпадающими главными и остаточными членами, то из неравенства следует, что такая же формула будет верна и для $G_1(n)$.

3. Проведем подготовку к выводу асимптотической формулы для $G_{11}(n)$. Раскладывая функцию $\chi_1 \left(\frac{1}{2} (p_1 p_2^a)^{1/c} \right)$ в ряд Фурье, получим

$$G_{11}(n) = \left(\frac{1}{2} - 2\Delta \right) G(n) + R_1(n) + R_2(n), \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} R_1(n) &= \sum_{0 < |m| \leq \Delta^{-1} \ln n} |g_m| |V_m(n)|, \quad R_2(n) = \sum_{|m| > \Delta^{-1} \ln n} |g_m| |V_m(n)|, \\ V_m(n) &= \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{\substack{p_2 \in A_2 \\ p_1 p_2^a - xy = 1}} t_2(p_1 p_2^a - 1) e^{\pi i m (p_1 p_2^a)^{1/c}}, \quad t_2(k) = \sum_{\substack{xy=k \\ x \leq \sqrt{n} Q^{-1}}} 1, \end{aligned}$$

g_m — коэффициент Фурье с номером m для функции χ_1 .

Оценим $R_2(n)$. Из леммы 5 следует, что

$$|g_m| \leq \frac{1}{\pi |m|} \left(\frac{r}{\pi \Delta |m|} \right)^r.$$

Кроме того, $|V_m(n)| \leq G_1(n) \leq n$. Поэтому

$$R_2(n) = O \left(n \sum_{|m| > \Delta^{-1} \ln n} \left(\frac{r}{\Delta} \right)^r m^{-r-1} \right) = O(1). \quad (27)$$

Оценим $R_1(n)$. Имеем

$$|R_1(n)| \leq \sum_{0 < |m| < \Delta^{-1} \ln n} \frac{1}{\pi |m|} |V_m(n)|, \quad |V_m(n)| \leq \sum_{n_1 \leq \frac{n}{Q}} \left| \sum_{p_2 \in A_2} t_2(n_1 p_2^a - 1) e^{\pi i m (n_1 p_2^a)^{1/c}} \right|,$$

где n_1 пробегает множество натуральных чисел. Применяя неравенство Коши, получим

$$\begin{aligned} |V_m(n)|^2 &\leq \frac{n}{Q} \sum_{n_1 \leq n/Q} \left| \sum_{p_2 \in A_2} t_2(n_1 p_2^a - 1) e^{\pi i m (n_1 p_2^a)^{1/c}} \right|^2 = \\ &= \frac{n}{Q} \sum_{p_2 \in A_2} \sum_{p'_2 \in A_2} \sum_{n_1 \leq n/Q} t_2(n_1 p_2^a - 1) t_2(n_1 (p'_2)^a - 1) e^{\pi i m (p_2^{a/c} - (p'_2)^{a/c}) n_1^{1/c}} = \\ &= \frac{n}{Q} (V_0(n) + V_1(n)), \quad (28) \end{aligned}$$

где сумма $V_0(n)$ соответствует слагаемым, в которых $p_2 = p'_2$, а в сумме $V_1(n)$ $p_2 \neq p'_2$.

Оценим $V_0(n)$. Заметим, что из мультипликативности функции $\tau(n)$ и формулы для вычисления ее значений следует, что $\tau(ab) \leq \tau(a)\tau(b)$. Из этого замечания и леммы 6 следует, что

$$V_0(n) \leq \sum_{p_2 \in A_2} \sum_{n_1 \leq \frac{n}{Q}} \tau^2(n_1 p_2^a - 1) \leq (a+1)^2 Q^{1/a} \sum_{n_1 \leq nQ^{-1}} \tau^2(n_1) \ll nQ^{1/a-1} \ln^3 n. \quad (29)$$

Оценивая $V_1(n)$, заметим, что

$$V_1(n) \leq \sum_{p_2 \in A_2} \sum_{p'_2 \in A_2} f(n), \quad (30)$$

где

$$f(n) = \sum_{x_1 \leq \sqrt{n}Q^{-1}} \sum_{x_2 \leq \sqrt{n}Q^{-1}} s(m) \quad (31)$$

и

$$s(m) = \sum_{\substack{n_1 \leq nQ^{-1} \\ n_1 p_2^a \equiv 1 \pmod{x_1} \\ n_1 (p'_2)^a \equiv 1 \pmod{x_2}}} e^{2\pi i \frac{m}{2} (p_2^{a/c} - (p'_2)^{a/c}) n_1^{1/c}}.$$

Будем считать без ограничения общности, что $\gcd(p_2, x_1) = 1$ и $\gcd(p'_2, x_2) = 1$, так как в противном случае сумма будет равной нулю.

Пусть $p_2 q_2 \equiv 1 \pmod{x_1}$ и $p'_2 q'_2 \equiv 1 \pmod{x_2}$. Решим систему сравнений

$$\begin{cases} x \equiv q_2^a \pmod{x_1} \\ x \equiv (q'_2)^a \pmod{x_2}. \end{cases}$$

Она разрешима тогда и только тогда, когда $\gcd(x_1, x_2) | (q_2^a - (q'_2)^a)$ и, в случае разрешимости, ее решение имеет вид $x = z_2 + mD$, где $D = [x_1, x_2]$. Таким образом,

$$s(m) = \sum_{\xi+l \leq n/(DQ)} e^{2\pi i \kappa (\xi+l)^{1/c}},$$

где

$$\kappa = \frac{m}{2} (p_2^{a/c} - (p'_2)^{a/c}), \quad \xi = \frac{z_2}{D}.$$

Очевидно, что $0 < \xi < 1$.

4. Для вывода асимптотической формулы для G_{11} требуется оценить $s(m)$. Представим эту сумму в виде $s(m) = s_1(m) + s_2(m)$, где

$$s_1(m) = \sum_{\frac{n}{DQ^{3/2}} < \xi+l \leq \frac{n}{DQ}} e^{2\pi i \kappa (\xi+l)^{1/c}}, \quad s_2(m) = \sum_{\xi+l \leq \frac{n}{DQ^{3/2}}} e^{2\pi i \kappa (\xi+l)^{1/c}}.$$

Очевидно,

$$|s_2(m)| \leq \sum_{\xi+l \leq \frac{n}{DQ^{3/2}}} 1 \leq \frac{n}{DQ^{3/2}}.$$

Поэтому

$$s(m) = s_1(m) + O\left(\frac{n}{DQ^{3/2}}\right). \quad (32)$$

Разобьем сумму $s_1(m)$ на $O(\ln n)$ сумм вида

$$\bar{s}_1(M) = \sum_{M < \xi + l \leq M_1} e^{2\pi i \kappa(\xi + l)^{1/c}},$$

где

$$\frac{n}{DQ^{3/2}} \leq M < M_1 \leq 2M, \quad M_1 \leq \frac{n}{DQ}.$$

Поскольку $x_1 \leq \sqrt{n}Q^{-1}$ и $x_2 \leq \sqrt{n}Q^{-1}$, имеем $D = [x_1, x_2] \leq x_1 x_2 \leq nQ^{-2}$. Поэтому

$$M \geq \frac{n}{DQ^{3/2}} \geq Q^{1/2}$$

и, следовательно, сумма $\bar{s}_1(M)$ содержит «сравнительно много» слагаемых.

Будем оценивать $\bar{s}_1(M)$, считая, что $\frac{n}{DQ^{3/2}} \leq M \leq \frac{n}{DQ}$. Сначала рассмотрим случай, когда

$$1 \leq D \leq n^{0,99} \iff M \geq \frac{n^{0,01}}{Q^{1,5}}.$$

Если

$$\frac{|\kappa|M^{1/c}}{M} \leq \frac{1}{10},$$

то, приближая сумму интегралом, получим:

$$\bar{s}_1(M) = \int_M^{M_1} e^{2\pi i \kappa(\xi + l)^{1/c}} dl = O(1) = O\left(M^{1-1/c}\right).$$

В дальнейшем считаем, что $|\kappa|M^{1/c}/M > 1/10$, и применим для оценки суммы $\bar{s}_1(M)$ метод ван дер Корпута. Определим натуральное число k из условия

$$\frac{1}{M^2} < \frac{|\kappa|M^{1/c}}{M^k} \leq \frac{1}{M}.$$

Если $k = 2$, то

$$\frac{|\kappa|M^{1/c}}{M^2} \asymp \frac{1}{M}.$$

Оценивая $\bar{s}_1(M)$ по второй производной, получаем, $\bar{s}_1(M) = O(\sqrt{M})$ при $k = 2$.

Рассмотрим случай $k \geq 3$ и оценим $\bar{s}_1(M)$ по производной порядка k (см. [10, с. 66-70]). Имеем $\bar{s}_1(M) \ll M^{1-\delta}$, где $\delta = \delta(k) > 0$. Случай $D \leq n^{0,99}$ полностью рассмотрен.

Пусть теперь

$$D > n^{0,99}, \quad \frac{|\kappa|M^{1/c}}{M} > \frac{1}{10}.$$

Оценку $\bar{s}_1(M)$ будем вести по схеме оценки дзетовой суммы, принадлежащей И. М. Виноградову (см. [10, с. 66-70]). Пусть $a = [M^{5/11}]$; тогда

$$|\bar{s}_1(M)| \leq \frac{1}{a^2} \sum_{M < m \leq M_1} |W(m)| + 2a^2,$$

где

$$W(m) = \sum_{u=1}^a \sum_{v=1}^a e^{2\pi i \kappa(\xi + m + uv)^{1/c}}.$$

Применим формулу Тейлора:

$$(\xi + m + uv)^{1/c} = \sum_{j=0}^r \binom{1/c}{j} (\xi + m)^{1/c-j} (uv)^j + \theta_2 \binom{1/c}{r+1} (\xi + m)^{1/c-r-1} a^{2(r+1)}, \quad |\theta_2| \leq 1.$$

Таким образом,

$$e^{2\pi i \kappa(\xi+m+uv)^{1/c}} = e^{2\pi i F(uv)} + 2\pi\theta_3|\kappa|(\xi+m)^{1/c} \left(\frac{a^2}{\xi+m} \right)^{r+1}, \quad |\theta_3| \leq 1,$$

где

$$F(uv) = \sum_{j=0}^r \binom{1/c}{j} (\xi+m)^{1/c-j} (uv)^j.$$

Введем следующие обозначения:

$$x_j = \binom{1/c}{j}, \quad T = |\kappa|(\xi+m)^{1/c}, \quad \alpha_j = \frac{T \operatorname{sgn} \kappa}{x_j(\xi+m_j)}.$$

Тогда

$$W(m) = W_1 + 2\pi\theta_4 T \left(\frac{a^2}{M} \right)^r a^2 M^{-\frac{1}{11}}, \quad |\theta_4| \leq 1,$$

$$W_1 = \sum_{u=1}^a \sum_{v=1}^a e^{2\pi i F(uv)} = \sum_{u=1}^a \sum_{v=1}^a e^{2\pi i (\alpha_1 uv + \alpha_2 u^2 v^2 + \dots + \alpha_r u^r v^r)}.$$

Выберем натуральное число r из условия

$$r-1 < \frac{11 \ln T}{\ln M} \leq r$$

и заметим, что, поскольку $D > 0,99$, имеем $|\kappa| \leq n^{0,99/c}$. Поэтому из неравенства $MD \leq n/Q$ заключаем, что $M < n^{0,01}$. Следовательно,

$$\frac{\ln T}{\ln M} > \frac{\ln \frac{1}{2} n^{0,99/c}}{\ln n^{0,01}} > \frac{99}{c} - 1 \geq \frac{97}{2},$$

и указанный выбор r возможен. Следуя схеме Виноградова, получим:

$$|W_1| \leq c_2 a^2 e^{-\gamma_1 \sqrt{\ln n}}, \quad c_2 > 0, \quad \gamma_1 > 0.$$

Следовательно,

$$\bar{s}_1(M) \ll \frac{n}{QD} e^{-\gamma \sqrt{\ln n}}, \quad s_1(m) \ll \frac{n \ln n}{QD} e^{-\gamma \sqrt{\ln n}}.$$

Используя полученные оценки, из (32) находим

$$s(m) \ll nQ^{-1} e^{-\gamma \sqrt{\ln n}} D^{-1} \ln n + nQ^{-1,5} D^{-1} \ll nQ^{-1} e^{-\gamma \sqrt{\ln n}/2} D^{-1}, \quad (33)$$

где $D = [x, x_2]$.

5. Продолжим вывод асимптотической формулы для $G_{11}(n)$. Из формул (26) и (27) следует

$$G_{11}(n) = \left(\frac{1}{2} - 2\Delta \right) G_1(n) + O \left(\sum_{0 < |m| < \Delta^{-1} \ln n} \frac{1}{\pi |m|} |V_m(n)| \right),$$

где $\Delta = 1/\ln^2 n$. Из (28) и (29) получаем

$$|V_m(n)|^2 \leq \frac{n}{Q} V_1(n) + O(n^2 Q^{1/a-2} \ln^3 n).$$

Поэтому для получения асимптотической формулы нужна оценка $V_1(n)$. Из (30) имеем

$$V_1(n) \ll \sum_{p_2 \in A_2} \sum_{p'_2 \in A_2} f(n),$$

где

$$f(n) = \sum_{x_1 \leq \sqrt{n} Q^{-1}} \sum_{x_2 \leq \sqrt{n} Q^{-1}} s(m).$$

Подставив в эту формулу оценку (33), получим:

$$f(n) \ll \frac{n}{Q} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\sqrt{\ln n}\right) \sum_{x_1 \leq \sqrt{n}Q^{-1}} \sum_{x_2 \leq \sqrt{n}Q^{-1}} D^{-1}.$$

Оценим сумму в этом неравенстве:

$$\begin{aligned} \sum_{x_1 \leq \sqrt{n}Q^{-1}} \sum_{x_2 \leq \sqrt{n}Q^{-1}} D^{-1} &= \sum_{x_1 \leq \sqrt{n}Q^{-1}} \sum_{x_2 \leq \sqrt{n}Q^{-1}} \frac{\gcd(x_1, x_2)}{x_1 x_2} = \\ &= \sum_{x_1 \leq \sqrt{n}Q^{-1}} \sum_{x_2 \leq \sqrt{n}Q^{-1}} \frac{1}{x_1 x_2} \sum_{d|(x_1, x_2)} \varphi(d) \leq \\ &\leq \sum_{d \leq \sqrt{n}Q^{-1}} \frac{\varphi(d)}{d^2} \left(\sum_{x \leq \sqrt{n}Q^{-1}d^{-1}} \frac{1}{x} \right)^2 \ll \ln^3 n. \end{aligned}$$

Поэтому $f(n) \ll n \ln^3 n / Q^2$. Отсюда и из (30) следует, что

$$|V_1(n)| \ll n^2 Q^{1/a-3} \ln^3 n. \quad (34)$$

Используя оценки (29) и (34), из (28) получим

$$|V_m(n)|^2 \ll n^2 Q^{-2+\frac{2}{a}} e^{-\frac{\gamma}{4}\sqrt{\ln n}} + n^2 Q^{-2+\frac{1}{a}} \ln^3 n \ll \left(\frac{n}{Q}\right)^2 Q^{-2+2/a} e^{-\gamma\sqrt{\ln n}/4},$$

то есть

$$|V_m(n)| \ll n Q^{-1+1/a} e^{-\gamma\sqrt{\ln n}/8}.$$

Поэтому

$$|R_1(n)| \ll n Q^{-1+1/a} e^{-\gamma\sqrt{\ln n}/8} \ln^2 n. \quad (35)$$

Подставляя оценки (27) и (35) в (26), получаем асимптотическую формулу

$$G_{11}(n) = \frac{1}{2} G(n) (1 + O(Q^{-\eta})), \quad \eta > 0.$$

Аналогичными рассуждениями для $G_{12}(n)$ выводим асимптотическую формулу с такими же главным членом и остатком. Поэтому из (25) следует, что для $G_1(n)$ верна асимптотическая формула

$$G_1(n) = \frac{1}{2} G(n) (1 + O(Q^{-\eta})), \quad \eta > 0.$$

Теорема 2 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов А. И. О плотностной гипотезе для L -рядов Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1965. — 29, № 4. — С. 903–934.
2. Виноградов И. М. Некоторое общее свойство распределения простых чисел // Мат. сб. — 1940. — 7. — С. 365–372.
3. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1971.
4. Виноградов И. М. Основы теории чисел. — СПб.–М.: Лань, 2004.
5. Гриценко С. А. Об одной задаче И. М. Виноградова // Мат. заметки. — 1986. — 39, № 5. — С. 625–640.
6. Гриценко С. А. Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Гольдбаха–Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида // Усп. мат. наук. — 1988. — 43, № 4 (262). — С. 203–204.
7. Гриценко С. А. Три аддитивные задачи // Изв. РАН. Сер. мат. — 1992. — 56, № 6 (9262). — С. 1198–1216.
8. Гриценко С. А., Зинченко Н. А. Об оценке одной тригонометрической суммы по простым числам // Науч. вед. БелГУ. Сер. мат. физ. — 2013. — 5 (148), № 30. — С. 48–52.
9. Зинченко Н. А. Бинарная аддитивная задача с полупростыми числами специального вида // Чебышев. сб. — 2005. — VI, № 2 (14). — С. 145–162.
10. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. — М.: Наука, 1983.
11. Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1961.

12. Хоолл К. Применение методов решета в теории чисел. — М.: Наука, 1987.
13. Чанга М. Е. Простые числа в специальных промежутках и аддитивные задачи с такими числами// Мат. заметки. — 2003. — 73, № 3. — С. 423–436.
14. Bombieri E. On the large sieve// Mathematica. — 1965. — 12. — P. 201–225.
15. Balog A., Friedlander K. J. A hybrid of theorems of Vinogradov and Piatetski-Shapiro// Pac. J. Math. — 1992. — 156. — P. 45–62.
16. Titchmarsh E. C. A divisor problem// Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1930. — 54. — P. 414–429.
17. Tolev D. I. On a theorem of Bombieri–Vinogradov type for prime numbers from a thin set// Acta Arithm. — 1997. — 81, № 1. — P. 57–68.

Зинченко Наталья Алексеевна

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: zinchenko@bsu.edu.ru