Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Асхабов, Метод максимальных монотонных операторов в теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 167, 3–13

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-167-3-13>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:15:14

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 167 (2019). С. 3–13
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-167-3-13

УДК 517.968

МЕТОД МАКСИМАЛЬНЫХ МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ

© 2019 г. С. Н. АСХАБОВ

Аннотация. Методом максимальных монотонных (по Браудеру—Минти) операторов доказаны глобальные теоремы о существовании и единственности решения для различных классов нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки в вещественных пространствах L_p при $1 < p < \infty$. Приведены следствия, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: положительный оператор, оператор свертки, монотонный оператор, нелинейное интегро-дифференциальное уравнение.

METHOD OF MAXIMAL MONOTONIC OPERATORS IN THE THEORY OF NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF CONVOLUTION TYPE

© 2019 S. N. ASKHABOV

ABSTRACT. Using the method of maximal monotonic (in the Browder–Minty sense) operators, we prove global theorems on the existence and uniqueness of solutions for various classes of nonlinear integro-differential equations of convolution type in real spaces L_p , $1 < p < \infty$, and present illustrative examples.

Keywords and phrases: positive operator, convolution operator, monotone operator, nonlinear integro-differential equation.

AMS Subject Classification: 45G10, 47J05

1. Введение. Метод монотонных (по Браудеру—Минти) операторов (см., например, монографию [3] и приведенную в ней библиографию) хорошо известен применительно к нелинейным интегральным уравнениям Гаммерштейна (именно к ним он впервые был применен). Применительно к нелинейным дискретным и интегральным уравнениям типа свертки в пространствах ℓ_p и L_p , соответственно, он широко использован в монографии [1]. В данной работе изучаются различные классы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки в вещественных пространствах Лебега L_p на основе более тонкого метода максимальных монотонных операторов (поскольку интегро-дифференциальный оператор свертки определен не на всем пространстве L_p , то это препятствует применению теоремы Браудера—Минти — основной теоремы теории монотонных операторов; см. [3]). При достаточно широких и легко обозримых ограничениях на нелинейность доказаны глобальные теоремы существования и единственности решения

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-41-200001).

для различных классов нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки. Важно подчеркнуть, что поскольку интегральные уравнения Гаммерштейна имеют ядро общего вида (функция двух переменных), то они изучались в предположении, что линейный интегральный оператор с этим ядром априори является положительным. В случае нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений типа свертки естественно возникает задача нахождения условий на ядро (функция одной переменной), при которых линейные интегральные и интегро-дифференциальные операторы свертки являются положительными. Решение этой задачи представляет интерес и для гармонического анализа, для которого основополагающую роль играет понятие положительно определенной (по Бохнеру) функции (см. [9]), тесно связанное с понятием положительного оператора. В этой связи в данной работе приведены критерии положительности интегро-дифференциальных операторов свертки, которые используются при доказательстве основных теорем о существовании и единственности решений нелинейных уравнений, порожденных этими операторами. Следует отметить, что теория нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки достаточно хорошо разработана в вольтерровском случае (см. [10, 11]). Что касается рассматриваемых нами уравнений, то они сравнительно мало изучены, и их исследование имеет не только теоретическое, но и прикладное значение, в частности, для кинетической теории металлов и др. (см., например, статью [8] и приведенную в ней библиографию).

Всюду в работе будем придерживаться принятых в монографии [3] обозначений и определений, касающихся теории монотонных операторов. Пусть X — вещественное рефлексивное банахово пространство, X^* — сопряженное с ним пространство и оператор Λ действует из X в X^* , т.е. $\Lambda \in (X \rightarrow X^*)$. Обозначим через $\langle y, x \rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$. В частности, если X — гильбертово пространство H , то $\langle y, x \rangle$ совпадает со скалярным произведением (y, x) , где $x, y \in H$. Оператор Λ с линейной областью определения $D(\Lambda) \subset X$ называется *монотонным*, если для любых $u, v \in D(\Lambda)$ выполняется неравенство $\langle \Lambda u - \Lambda v, u - v \rangle \geq 0$. Монотонный оператор $\Lambda \in (D(\Lambda) \rightarrow X^*)$ называется *максимальным монотонным*, если из выполнения неравенства $\langle f - \Lambda v, u - v \rangle \geq 0$ для любого $v \in D(\Lambda)$ следует, что $u \in D(\Lambda)$ и $\Lambda u = f$. Если Λ — линейный оператор, то определение монотонного оператора совпадает с определением положительного оператора.

Как обычно, через $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ обозначаются соответственно множества всех действительных, целых и натуральных чисел, а через $p' = p/(p-1)$ — сопряженное с p число.

2. Критерии положительности интегро-дифференциальных операторов свертки.

2.1. Интегро-дифференциальный оператор свертки в $L_p(-\pi, \pi)$. Рассмотрим в вещественном пространстве Лебега $L_p(-\pi, \pi)$, состоящем из 2π -периодических функций, интегро-дифференциальный оператор свертки

$$(Tu)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t) \cdot u'(t) dt$$

с областью определения

$$M_p(-\pi, \pi) = \{u(x) : u(x) \in L_p(-\pi, \pi), u'(x) \in L_{p'}(-\pi, \pi)\}.$$

Всюду далее предполагается, что ядро $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ есть функция, 2π -периодически продолженная на отрезок $[-2\pi, 2\pi]$.

Для выяснения вопроса о том, при каких условиях на ядро $h(x)$ оператор T является положительным в классе $M_p(-\pi, \pi)$, приведем необходимые сведения из теории дискретного преобразования Фурье (см. [4]).

Напомним, что *дискретным преобразованием Фурье* (изображением) последовательности комплексных чисел $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ называется соответствующий ей ряд Фурье:

$$a(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \exp(ikx), \quad \text{где} \quad a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(x) \cdot \exp(-ikx) dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Нам понадобятся следующие два равенства (см. [4, с. 233] и [9, с. 158], соответственно):

(1) формула свертки изображений:

$$\int_{-\pi}^{\pi} a(x-t) \cdot b(t) dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_k \exp(ikx); \quad (2)$$

(2) обобщенное равенство Парсеваля:

$$\int_{-\pi}^{\pi} a(x) \cdot \overline{b(x)} dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \overline{b_k}, \quad (3)$$

где

$$b(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \exp(ikx), \quad b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} b(x) \cdot \exp(-ikx) dx,$$

а черта сверху означает комплексное сопряжение.

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$ и $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$. Для того чтобы интегро-дифференциальный оператор свертки T был положительным в классе $M_p(-\pi, \pi)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\hat{h}_s(k) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cdot \sin(k \cdot t) dt \geq 0 \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$ — произвольная функция и выполнено условие (4). Так как $u'(x) \in L_{p'}(-\pi, \pi)$ и $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$, то из неравенства Юнга для сверток (см. [5, с. 67]) непосредственно вытекает, что $(Tu)(x) \in L_{p'}(-\pi, \pi)$, т.е. оператор свертки T действует из $M_p(-\pi, \pi)$ в $L_{p'}(-\pi, \pi)$. Следовательно, функционал $\langle Tu, u \rangle$ имеет смысл и принимает конечное значение при любом $u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$, в силу интегрального неравенства Гельдера.

Докажем положительность оператора T . Используя формулу свертки изображений (2), имеем

$$(Tu)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t) \cdot u'(t) dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k u'_k \exp(ikx), \quad (5)$$

где

$$h_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot \exp(-ikx) dx, \quad u'_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u'(x) \cdot \exp(-ikx) dx.$$

Заметим, что

$$u'_k = i \cdot k \cdot u_k. \quad (6)$$

В самом деле, так как $u(-\pi) = u(\pi)$ и $\exp(-ik\pi) = \exp(ik\pi)$, применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$u'_k = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\exp(-ikx) \cdot u(x) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cdot \exp(-ikx) \cdot (-i \cdot k) dx \right] = i \cdot k \cdot u_k.$$

Учитывая равенство (6), из (5) имеем

$$(Tu)(x) = 2\pi i \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \cdot h_k \cdot u_k \cdot \exp(ikx),$$

т.е.

$$(Tu)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_k \cdot \exp(ikx), \quad \text{где } T_k = 2\pi i \cdot k \cdot h_k \cdot u_k. \quad (7)$$

Используя сначала обобщенное равенство Парсеваля (3), а затем равенство (7), с учетом того, что рассматриваются вещественные функции $u(x)$, получаем

$$\begin{aligned}\langle Tu, u \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} (Tu)(x) \cdot \overline{u(x)} dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi i \cdot k \cdot h_k \cdot u_k \cdot \overline{u_k} = \\ &= 4\pi^2 i \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \cdot h_k \cdot |u_k|^2 = 4\pi^2 i \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{-1} k \cdot h_k \cdot |u_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot h_k \cdot |u_k|^2 \right].\end{aligned}\quad (8)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned}|u_{-k}|^2 &= u_{-k} \cdot \overline{u_{-k}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cdot \exp(ikx) dx \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cdot \exp(-ikx) dx \right) = \overline{u_k} \cdot u_k = |u_k|^2, \\ h_k - h_{-k} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) (\exp(-ikt) - \exp(ikt)) dt = -\frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin(kt) dt = -\frac{i}{\pi} \cdot \widehat{h}_s(k),\end{aligned}$$

из равенства (8) имеем

$$\begin{aligned}\langle Tu, u \rangle &= 4\pi^2 i \cdot \left[-\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot h_{-k} \cdot |u_{-k}|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot h_k \cdot |u_k|^2 \right] = \\ &= 4\pi^2 i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (h_k - h_{-k}) \cdot |u_k|^2 = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \widehat{h}_s(k) \cdot |u_k|^2.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\langle Tu, u \rangle = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \widehat{h}_s(k) \cdot |u_k|^2 \quad \forall u(x) \in M_p(-\pi, \pi). \quad (9)$$

Из формулы (9) непосредственно вытекает, что оператор T является положительным, если $\widehat{h}_s(k) \geq 0$, т.е. если выполнено условие (4). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть оператор T является положительным, т.е. $\langle Tu, u \rangle \geq 0$ при любом $u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$. Нужно доказать, что тогда выполняется условие (4). Допустим противное, т.е. что существует такое число $k_0 \in \mathbb{N}$, что $\widehat{h}_s(k_0) < 0$. Выберем функцию $u(x) = \cos(k_0 x)$. Ясно, что $u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$. Вычислим коэффициенты Фурье этой функции:

$$u_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k_0 x) \cdot \cos(kx) dx - i \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k_0 x) \cdot \sin(kx) dx = I_1 - i \cdot I_2. \quad (10)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((k + k_0)x) dx + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((k - k_0)x) dx = \begin{cases} 1/2, & \text{если } k = \pm k_0, \\ 0, & \text{если } k \neq \pm k_0, \end{cases} \\ I_2 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((k + k_0)x) dx + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((k - k_0)x) dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Подставив в (10), получим такую последовательность $\{u_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, что

$$u_{-k_0} = u_{k_0} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad u_k = 0 \quad \text{при всех } k \neq \pm k_0 \quad (11)$$

(непосредственно легко проверяется, что изображением этой последовательности действительно является функция $u(x) = \cos(k_0 x)$).

Наконец, по формуле (9), учитывая равенства (11), получаем

$$\langle Tu, u \rangle = 4\pi k_0 \cdot \hat{h}_s(k_0) \cdot \frac{1}{4} = \pi k_0 \cdot \hat{h}_s(k_0) < 0,$$

что противоречит положительности оператора T . Необходимость, а вместе с ней и теорема, доказаны. $\square$

Примером функции, удовлетворяющей условию (4), может служить монотонно невозрастающая функция. Именно, если в качестве основного интервала взять $(0, 2\pi)$, то нетрудно показать (см. [7, с. 46]), что $\hat{h}_s(k) \geq 0$, если функция $h(x)$ не возрастает в интервале $(0, 2\pi)$.

2.2. Интегро-дифференциальный оператор свертки в $L_p(\mathbb{R})$. Следующая теорема является аналогом теоремы 1 и относится к случаю вещественных пространств $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, с обычной нормой

$$\|u\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

В отличие от п. 2.1, где использовалось дискретное преобразование Фурье, доказательство этой теоремы существенно будет опираться на теорию интегрального преобразования Фурье.

Теорема 2. Пусть $1 < p < \infty$ и ядро $h(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Для того, чтобы интегро-дифференциальный оператор свертки

$$(Tu)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t) \cdot u'(t) dt$$

был положительным в классе $M_p(\mathbb{R}) = \{u(x) : u(x) \in L_p(\mathbb{R}), u'(x) \in L_{p'}(\mathbb{R})\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\hat{h}_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot \sin(x \cdot t) dt \geq 0 \quad \text{при всех } x \in [0, \infty). \quad (12)$$

Доказательство. Достаточность. Так как $h(x) \in L_1(\mathbb{R})$, $u'(x) \in L_{p'}(\mathbb{R})$, то, в силу неравенства Юнга (см. [1, с. 30]), $(Tu)(x) \in L_{p'}(\mathbb{R})$ при любом $p' \in (1, \infty)$, т.е. оператор T действует из $M_p(\mathbb{R})$ в $L_{p'}(\mathbb{R})$. Следовательно, функционал $\langle Tu, u \rangle$ имеет смысл и принимает конечное значение при любом $u(x) \in M_p(\mathbb{R})$ в силу интегрального неравенства Гельдера.

Докажем положительность оператора T . Обозначим через $\hat{u}(x)$ преобразование Фурье функции $u(x) \in L_2(\mathbb{R})$ (см. [6, с. 55]):

$$\hat{u}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N u(t) \cdot \exp(-ixt) dt,$$

где $\lim_{N \rightarrow \infty}$ означает предел в среднем с показателем $p = 2$ (т.е. в среднем квадратичном).

Известно (см. [6]), что $\hat{u}(x) \in L_2(\mathbb{R})$, если $u(x) \in L_2(\mathbb{R})$, и для любых $u(x), v(x) \in L_2(\mathbb{R})$ справедливо обобщенное равенство Парсеваля $(u, v) = (\hat{u}, \hat{v})$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot \overline{v(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x) \cdot \overline{\hat{v}(x)} dx, \quad (13)$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение. Кроме того, если $h(x) \in L_1(\mathbb{R})$, $u(x) \in L_2(\mathbb{R})$, то для преобразования Фурье свертки $h * u$ справедливо равенство

$$\widehat{(h * u)}(x) = \sqrt{2\pi} \hat{h}(x) \cdot \hat{u}(x), \quad (14)$$

где

$$\widehat{h}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot \exp(-ixt) dt.$$

Легко показать, что $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$, если $u(x) \in M_p(\mathbb{R})$. В самом деле, так как

$$|u(x + \Delta x) - u(x)| = \left| \int_x^{x+\Delta x} u'(t) dt \right| \leq (|\Delta x|)^{1/p} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u'(t)|^{p'} dt \right)^{1/p'} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0,$$

то функция $u(x)$ непрерывна, т.е. $u(x) \in C(\mathbb{R})$. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$. Так как $u(x) \in C(\mathbb{R})$ и

$$u^2(x) - u^2(0) = 2 \int_0^x u(t) \cdot u'(t) dt \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |u(t) \cdot u'(t)| dt \leq 2 \|u\|_p \cdot \|u'\|_{p'},$$

то существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} |u(x)| = A$. Осталось показать, что $A = 0$. Допустим противное, что $A > 0$. Тогда найдется такое достаточно большое число $c > 0$, что при всех $x > c$ будет выполняться неравенство $|u(x)| > A/2$ и, значит,

$$\|u\|_p^p \geq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{2} \right)^p dx = \infty,$$

что невозможно, так как $u(x) \in L_p(\mathbb{R})$. Значит, $A = 0$ и, следовательно, $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$.

Аналогично доказывается, что и $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0$, если $u(x) \in M_p(\mathbb{R})$.

Пусть $u(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, т.е. является финитной бесконечно дифференцируемой на всей действительной оси $\mathbb{R}$ функцией. Тогда (ср. [6, с. 57]), интегрируя по частям, получим

$$\widehat{u}'(x) = i \cdot x \cdot \widehat{u}(x). \quad (15)$$

Используя равенства (13)–(15), с учетом того, что $u(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — вещественная функция, имеем

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}u, u) &= \int_{-\infty}^{\infty} (h * u')(x) \cdot \overline{u(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\widehat{h * u'})(x) \cdot \overline{\widehat{u}(x)} dx = \\ &= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(x) \widehat{u'}(x) \overline{\widehat{u}(x)} dx = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(x) i x \widehat{u}(x) \overline{\widehat{u}(x)} dx = i \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(x) x |\widehat{u}(x)|^2 dx = \\ &= i \sqrt{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}_c(x) x |\widehat{u}(x)|^2 dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}_s(x) x |\widehat{u}(x)|^2 dx \right], \quad (16) \end{aligned}$$

где косинус-преобразование Фурье

$$\widehat{h}_c(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot \cos(xt) dt$$

есть четная функция, а синус-преобразование Фурье

$$\widehat{h}_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot \sin(xt) dt$$

— функция нечетная на действительной оси $\mathbb{R}$. Замечая, что

$$|\widehat{u}(-x)|^2 = \widehat{u}(-x) \cdot \overline{\widehat{u}(-x)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \exp(ixt) dt \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \exp(-ixt) dt \right) = \\ = \overline{\widehat{u}(x)} \cdot \widehat{u}(x) = |\widehat{u}(x)|^2$$

и, значит, $x \cdot |\widehat{u}(x)|^2$ — нечетная на оси $\mathbb{R}$ функция, из равенства (16) получаем

$$(\mathbb{T}u, u) = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}_s(x) x |\widehat{u}(x)|^2 dx \quad (17)$$

или, что то же самое,

$$(\mathbb{T}u, u) = 2\sqrt{2\pi} \int_0^{\infty} \widehat{h}_s(x) x |\widehat{u}(x)|^2 dx. \quad (18)$$

Из равенства (18) следует, что $(\mathbb{T}u, u) \geq 0$ для любого $u(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, если $\widehat{h}_s(x) \geq 0$ для почти всех $x \in [0, \infty)$. Так как по теореме Римана—Лебега (см. [6, с. 42]) $\widehat{h}_s(x)$ есть непрерывная на всей оси $\mathbb{R}$ функция, то условие, что $\widehat{h}_s(x) \geq 0$ для почти всех $x \in [0, \infty)$, равносильно условию, что $\widehat{h}_s(x) \geq 0$ для всех $x \in [0, \infty)$.

Таким образом, если $h(x) \in L_1(\mathbb{R})$ и $\widehat{h}_s(x) \geq 0$ для всех $x \in [0, \infty)$, то справедливо неравенство $(\mathbb{T}u, u) \geq 0$ для любого $u(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Поскольку множество $C_0^\infty(\mathbb{R})$ всюду плотно в классе $M_p(\mathbb{R})$ и $\langle \mathbb{T}u, u \rangle$ — линейный непрерывный функционал, то неравенство $(\mathbb{T}u, u) \geq 0$ будет выполняться и всюду в классе $M_p(\mathbb{R})$.

Итак мы доказали, что если выполнено условие

$$h(x) \in L_1(\mathbb{R}) \quad \text{и} \quad \widehat{h}_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot \sin(xt) dt \geq 0 \quad \forall x \in [0, \infty), \quad (19)$$

то интегро-дифференциальный оператор свертки $\mathbb{T}$ является положительным, т.е. выполняется неравенство

$$\langle \mathbb{T}u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u(x) \in M_p(\mathbb{R}). \quad (20)$$

Необходимость. Докажем, наконец, что условие (12) также и необходимо для положительности оператора $\mathbb{T}$. Пусть неравенство (20) выполнено. Нужно доказать, что тогда $\widehat{h}_s(x) \geq 0$ для всех $x \in [0, \infty)$, т.е. выполнено условие (12). Допустим противное, т.е. что условие (12) не выполняется, т.е. существует такая точка $x_0 \in [0, \infty)$, что $\widehat{h}_s(x_0) < 0$. Ясно, что $x_0 > 0$, так как очевидно, что $\widehat{h}_s(0) = 0$. Поскольку по теореме Римана—Лебега $\widehat{h}_s(x)$ есть непрерывная на всей оси $\mathbb{R}$ функция, то найдется такая ε -окрестность $U_\varepsilon(x_0) = \{x : x > 0, |x - x_0| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, точки x_0 , что будет выполняться неравенство

$$\widehat{h}_s(x) < 0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(x_0). \quad (21)$$

Выберем такую функцию $u(x) \in M_p(\mathbb{R})$, что $\widehat{u}(x) = 0$, если $x \notin U_\varepsilon(x_0)$ и $\widehat{u}(x) \neq 0$, если $x \in U_\varepsilon(x_0)$. Тогда, учитывая, что для всех $x \in U_\varepsilon(x_0)$ выполняются строгие неравенства $\widehat{h}_s(x) < 0$, $x > 0$, и $|\widehat{u}(x)| > 0$, по формуле (5) получим

$$\langle \mathbb{T}u, u \rangle = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}_s(x) x |\widehat{u}(x)|^2 dx = \sqrt{2\pi} \int_{U_\varepsilon(x_0)} \widehat{h}_s(x) x |\widehat{u}(x)|^2 dx < 0,$$

что противоречит неравенству (20). Необходимость, а вместе с ней и теорема, доказана. $\square$

Примером ядра $h(x)$, удовлетворяющего условию (12), может служить $h(x) = x/(x^2 + 1)^2$, для которого $\widehat{h}_s(x) = \sqrt{\pi/8} \cdot x \cdot \exp(-x)$.

3. Теоремы существования и единственности. Используя теоремы 1 и 2, можно доказать теоремы существования и единственности решения для различных классов нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки. Для этого нам понадобится следующая теорема Ф. Браудера, приведенная с доказательством в [3, с. 98].

Теорема 3. Пусть X — рефлексивное банахово пространство, $\Lambda \in (D(\Lambda) \rightarrow X^*)$ — радиально непрерывный максимальный монотонный оператор с линейной областью определения $D(\Lambda) \subset X$ и $A \in (X \rightarrow X^*)$ — радиально непрерывный монотонный коэрцитивный оператор. Тогда при любом $f \in X^*$ уравнение $\Lambda u + Au = f$ имеет решение $u \in D(\Lambda)$. Если, кроме того, оператор A является строго монотонным, то это решение единственно.

Заметим (см. [3, с. 143]), что теорема 3 была сформулирована Ф. Браудером без предположений радиальной непрерывности оператора Λ и линейности области его определения $D(\Lambda)$.

Введем в рассмотрение нелинейный оператор суперпозиции (так называемый оператор Немыцкого). Пусть вещественнозначная функция $F(x, u)$ определена при $x \in [-\pi, \pi]$, $u \in \mathbb{R}$, имеет период 2π по x и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}$ и непрерывна по u почти для всех $x \in [-\pi, \pi]$. Обозначим через F оператор суперпозиции, порожденный функцией $F(x, u)$, а через $L_p^+(-\pi, \pi)$ — множество всех неотрицательных функций из $L_p(-\pi, \pi)$ с обычной нормой

$$\|u\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Рассмотрим сначала нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свертки, наиболее простое для исследования методом максимальных монотонных операторов.

Теорема 4. Пусть $1 < p < \infty$, $f(x) \in L_{p'}(-\pi, \pi)$, $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ и удовлетворяет условию (4). Предположим, что для почти всех $x \in [-\pi, \pi]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ выполняются следующие условия:

I.1. $|F(x, u)| \leq a(x) + d_1 \cdot |u|^{p-1}$, где $a(x) \in L_{p'}^+(-\pi, \pi)$, $d_1 > 0$;

I.2. $F(x, u)$ не убывает по u ;

I.3. $F(x, u) \cdot u \geq d_2 \cdot |u|^p - D(x)$, где $D(x) \in L_1^+(-\pi, \pi)$, $d_2 > 0$.

Тогда при любых значениях параметра $\lambda > 0$ уравнение

$$\lambda \cdot F(x, u(x)) + \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t) \cdot u'(s) ds = f(x) \quad (22)$$

имеет решение $u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$. Это решение единственно, если в условии I.2 функция $F(x, u)$ строго возрастает по u .

Доказательство. Запишем уравнение (22) в операторном виде:

$$\lambda \cdot Fu + Tu = f. \quad (23)$$

Из условий I.1–I.3 вытекает, соответственно, что оператор Немыцкого F , порожденный функцией $F(x, u)$, действует непрерывно из $L_p(-\pi, \pi)$ в $L_{p'}(-\pi, \pi)$, монотонен и коэрцитивен, причем для всех $u(x) \in L_p(-\pi, \pi)$ выполняются неравенства

$$\|Fu\|_{p'} \leq \|a\|_{p'} + d_1 \cdot \|u\|_p^{p-1}, \quad \langle Fu, u \rangle \geq d_2 \cdot \|u\|_p^p - \|D\|_1.$$

Из первого неравенства также вытекает, что нелинейный оператор F является ограниченным.

Рассмотрим теперь интегро-дифференциальный оператор свертки T . При доказательстве теоремы 1 было установлено, что оператор T действует из $D(T) = M_p(-\pi, \pi)$ в $L_{p'}(-\pi, \pi)$ и является положительным, а значит, в силу линейности, и монотонным оператором. Кроме того, оператор T является максимальным монотонным оператором, так как не имеет строгого монотонного расширения. Таким образом, для операторов $T = \Lambda$ и $\lambda \cdot F = A$ выполняются все требования теоремы 3.

Следовательно, уравнение (23), а значит, и уравнение (22), имеет решение $u \in M_p(-\pi, \pi)$. Это решение единственно, если $F(x, u)$ в условии I.2 строго возрастает по u , поскольку в этом случае оператор $A = \lambda \cdot F$ будет строго монотонным. $\square$

Поскольку функция $F(x, u) = u^{p-1}(x)$, где $p \geq 2$ есть любое четное число, удовлетворяет условиям I.1–I.3 при $d_1 = d_2 = 1$ и $a(x) = D(x) = 0$, то справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть $p \geq 2$ — любое четное число, $f(x) \in L_{p'}(-\pi, \pi)$, а ядро $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ удовлетворяет условию (4). Тогда уравнение

$$u^{p-1}(x) + \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t) \cdot u'(t) dt = f(x)$$

имеет единственное решение $u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$.

Следующая теорема отличается от теоремы 4 как по характеру ограничений на нелинейность $F(x, u)$ и правую часть $f(x)$, так и по структуре доказательства, основанном на обращении нелинейного оператора суперпозиции и установлении коэрцитивности обратного оператора.

Теорема 5. Пусть $1 < p < \infty$, $f(x) \in M_p(-\pi, \pi)$, а ядро $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ удовлетворяет условию (4). Предположим, что для почти всех $x \in [-\pi, \pi]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ выполняются следующие условия:

- II.1. $|F(x, u)| \leq g(x) + d_3 \cdot |u|^{1/(p-1)}$, где $g(x) \in L_p^+(-\pi, \pi)$, $d_3 > 0$;
- II.2. $F(x, u)$ строго возрастает по u ;
- II.3. $F(x, u) \cdot u \geq d_4 \cdot |u|^{p/(p-1)} - D(x)$, где $D(x) \in L_1^+(-\pi, \pi)$, $d_4 > 0$,

то при любых значениях параметра $\lambda \geq 0$ уравнение

$$u(x) + \lambda \cdot F \left(x, \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t) \cdot u'(t) dt \right) = f(x) \quad (24)$$

имеет единственное решение $u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$.

Доказательство. При $\lambda = 0$ утверждение данной теоремы очевидно, поэтому считаем далее, что $\lambda > 0$. Запишем уравнение (24) в операторном виде:

$$u + \lambda \cdot FTu = f \quad (25)$$

и покажем, что оно имеет решение $u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$. Для этого введем новую неизвестную функцию $v(x)$, обозначив $f(x) - u(x) = \lambda \cdot v(x)$. Ясно, что $v(x) \in M_p(-\pi, \pi)$. Подставив $u = f - \lambda \cdot v$ в уравнение (25), получим:

$$FT(f - \lambda \cdot v) = v. \quad (26)$$

Из условий II.1–II.3 вытекает, что оператор Немыцкого F действует непрерывно из сопряженного $L_{p'}(-\pi, \pi)$ в исходное пространство $L_p(-\pi, \pi)$, строго монотонен и коэрцитивен, причем для любого $w(x) \in L_{p'}(-\pi, \pi)$ выполняются неравенства

$$\|Fw\|_p \leq \|g\|_p + d_3 \|w\|_{p'}^{1/(p-1)}, \quad \langle Fw, w \rangle \geq d_4 \|w\|_{p'}^{p/(p-1)} - \|D\|_1. \quad (27)$$

Значит, по [3, теорема 2.2]) существует обратный оператор F^{-1} , действующий из $L_p(-\pi, \pi)$ в $L_{p'}(-\pi, \pi)$ и являющийся строго монотонным, ограниченным и радиально непрерывным (заметим, что для монотонных операторов понятия радиально непрерывный и деминепрерывный совпадают, в силу [3, лемма 1.3]).

Покажем, что обратный оператор F^{-1} является коэрцитивным, т.е. удовлетворяет условию

$$\lim_{\|v\|_p \rightarrow \infty} \frac{\langle F^{-1}v, v \rangle}{\|v\|_p} = \infty. \quad (28)$$

Пусть $v(x) \in L_p(-\pi, \pi)$ и $F^{-1}v = w$. Тогда в силу первого неравенства из (27) имеем

$$\|v\|_p = \|Fw\|_p \leq \|g\|_p + d_3 \|w\|_{p'}^{1/(p-1)}. \quad (29)$$

Следовательно, $\|w\|_{p'} \rightarrow \infty$, если $\|v\|_p \rightarrow \infty$. Поэтому, используя неравенство (29) и второе неравенство из (27), получаем

$$\frac{\langle F^{-1}v, v \rangle}{\|v\|_p} = \frac{\langle w, Fw \rangle}{\|v\|_p} \geq \frac{d_4 \|w\|_{p'}^{p/(p-1)} - \|D\|_1}{\|g\|_p + d_3 \|w\|_{p'}^{1/(p-1)}} \rightarrow \infty \quad \text{хпри} \quad \|v\|_p \rightarrow \infty, \quad (30)$$

т.е. справедливо равенство (28), и поэтому оператор F^{-1} является коэрцитивным.

Применив теперь оператор F^{-1} к обеим частям уравнения (26), имеем $Tf - \lambda \cdot Tv = F^{-1}v$, или

$$F^{-1}v + \lambda \cdot Tv = Tf, \quad (31)$$

т.е. приходим к уравнению вида (23).

Поскольку операторы $\lambda \cdot T = \Lambda$ и $F^{-1} = A$ удовлетворяют всем требованиям теоремы 3, то уравнение (31) имеет решение $v \in M_p(-\pi, \pi)$. Единственность этого решения вытекает из строгой монотонности оператора F^{-1} . Но тогда в силу связи $u = f - \lambda \cdot v$ уравнение (25), а значит и данное уравнение (24), имеет единственное решение $u \in M_p(-\pi, \pi)$. $\square$

Следствие 2. Пусть $p \geq 2$ — любое четное число, $f(x) \in M_p(-\pi, \pi)$, а ядро $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ удовлетворяет условию (4). Тогда уравнение

$$u(x) + \left(\int_{-\pi}^{\pi} h(x-t) \cdot u'(t) dt \right)^{1/(p-1)} = f(x)$$

имеет единственное решение $u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$.

Из следствий 1 и 2 непосредственно вытекает, что теоремы 4 и 5 при $p = 2$ охватывают, в частности, и случай линейных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки.

Используя теорему 2 вместо теоремы 1, аналогично теоремам 4 и 5 можно доказать теоремы о существовании и единственности решения в классе $M_p(\mathbb{R})$ для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки

$$\lambda \cdot F(x, u(x)) + \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t) \cdot u'(s) ds = f(x), \quad u(x) + \lambda \cdot F \left(x, \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t) \cdot u'(t) dt \right) = f(x)$$

на всей действительной оси $\mathbb{R}$.

В заключение отметим, что методом максимальных монотонных операторов могут быть также изучены нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с ядрами Гильберта и Коши (см. [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки. — М.: Физматлит, 2009.
2. Асхабов С. Н. Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с произвольным параметром // Мат. заметки. — 2018. — 103, № 1. — С. 20–26.
3. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.
4. Газов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. — М.: Наука, 1978.
5. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. — М.: Мир, 1965.
6. Князев П. Н. Интегральные преобразования. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
7. Харди Г. Х., Рогозинский В. В. Ряды Фурье. — М.: Физматгиз, 1959.
8. Хачатрян Х. А. О разрешимости в $W_1^1(\mathbb{R})$ одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения с некомпактным оператором Гаммерштейна—Немыцкого // Алгебра и анализ. — 2012. — 24, № 1. — С. 223–247.
9. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. — М.: Мир, 1985.
10. Brunner H. Volterra Integral Equations: An Itroduction to Theory and Applications. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017.

11. *Gripenberg G., Londen S. O., Staffans O.* Volterra Integral and Functional Equations. — Cambridge–New York: Cambridge Univ. Press, 1990.

Асхабов Султан Нажмудинович

Чеченский государственный педагогический университет, Грозный;

Чеченский государственный университет, Грозный

E-mail: askhabov@yandex.ru