Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. А. Балкизов, Об априорной оценке решения задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа второго порядка, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 167, 14–20

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-167-14-20>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:23:54

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 167 (2019). С. 14–20
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-167-14-20

УДК 517.956.6

ОБ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2019 г. Ж. А. БАЛКИЗОВ

Аннотация. В работе доказана теорема об априорной оценке решения задачи Трикоми для уравнения смешанного типа второго порядка с оператором Геллерстедта в области гиперболичности. Из полученной априорной оценки вытекает единственность регулярного решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, уравнение Геллерстедта, уравнение смешанного типа, задача Трикоми, задача Коши, априорная оценка.

ON A PRIORI ESTIMATES OF SOLUTIONS OF THE TRICOMI PROBLEM FOR A CERTAIN MIXED-TYPE SECOND-ORDER EQUATION

© 2019 G. A. BALKIZOV

ABSTRACT. In this paper, a theorem on a priori estimates of solutions of the Tricomi problem for a second-order, mixed-type equation with the Gellerstedt operator in the hyperbolicity domain is proved. The a priori estimate obtained implies the uniqueness of the regular solution of the problem considered.

Keywords and phrases: Poisson equation, Gellerstedt equation, mixed-type equation, Tricomi problem, Cauchy problem, a priori estimate.

AMS Subject Classification: 35M10, 35M13

1. Введение. Одним из первых работ, посвященных фундаментальным исследованиям по теории уравнений смешанного эллипτικο-гиперболического типа второго порядка были работы Ф. Трикоми. Так, в [29] была поставлена и исследована краевая задача для уравнения (1) в стандартной смешанной области D , ограниченной при $y \geq 0$ гладкой кривой Γ с концами в точках A и B (точки A и B не совпадают и лежат на оси Ox), а при $y \leq 0$ — характеристиками AC и BC уравнения

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (1)$$

В [32, 33] результаты Ф. Трикоми были обобщены на случай уравнения

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + c(x, y)u = F(x, y), \quad (2)$$

где m — нечетное натуральное число.

С целью упрощения исследований по теории краевых задач для уравнений смешанного типа, в [7, 9, 17] вместо уравнений (1) и (2) была предложена более простая модель смешанного

уравнения — уравнение Лаврентьева—Бицадзе

$$\operatorname{sgn} y u_{xx} + u_{yy} = F(x, y).$$

Различные краевые задачи для модельных и общих уравнений смешанного гипербола-эллиптического типа второго порядка были исследованы в [2, 10, 12–15, 19, 20, 22, 26, 31]. Подробный обзор литературы по проблеме краевых задач для уравнений смешанного типа содержатся в монографиях [7–9, 11, 16, 18, 23–25, 27–29]. Вопросам применения теории краевых задач для уравнений смешанного типа к проблемам околосвуковой и сверхзвуковой газовой динамики посвящены монографии [5, 6, 30].

В большинстве перечисленных работ исследования проводились по краевым задачам для уравнений смешанного типа, порядок вырождения которых из гиперболической и эллиптической частей области совпадали.

В данной работе исследована краевая задача Трикоми для уравнения смешанного типа, которое совпадает с уравнением Пуассона в области эллиптичности и с уравнением Геллерстедта в области гиперболичности. Получена априорная оценка решения задачи, из которой следует единственность регулярного решения исследуемой задачи, а также существование слабого решения задачи, сопряженной к исследуемой.

2. Постановка задачи. На евклидовой плоскости независимых переменных x и y рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + f, & y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy}, & y < 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $u = u(x, y)$ — искомая функция, $f = f(x, y)$ — заданная функция, m — заданное положительное число.

Уравнение (3) рассматривается в области Ω , ограниченной прямоугольником Ω_2 с вершинами в точках $A = (0, 0)$, $A_0 = (0, h)$, $B_0 = (r, h)$ и $B = (r, 0)$ при $y > 0$, а также характеристиками

$$AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0, \quad CB : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = r$$

уравнения (3), выходящими из общей точки $C = \left(\frac{r}{2}, -\left[\frac{(m+2)r}{4} \right]^{2/(m+2)} \right)$ и проходящими через точки A и B соответственно. Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $J = \{(x, y) : 0 < x < r, y = 0\}$ — интервал AB прямой $y = 0$; $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J$.

В области Ω уравнение (3) является уравнением смешанного типа: оно гиперболично в области Ω_1 и эллиплично в области Ω_2 .

Определение 1. Регулярным в области Ω решением уравнения (3) назовем функцию $u = u(x, y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, при подстановке которой уравнение (3) обращается в тождество.

В работе исследуется задача Трикоми для уравнения (3) в следующей постановке.

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение $u = u(x, y)$ уравнения (3), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(r, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (4)$$

$$u(x, h) = \varphi_3(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (5)$$

$$u(x, y) \Big|_{AC} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq r/2, \quad (6)$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(x)$, $\psi(x)$ — заданные функции из соответствующих классов: $\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C[0, h]$, $\varphi_3(x) \in C[0, r]$, $\psi(x) \in C^3[0, r/2]$ и выполнены условия согласования:

$$\varphi_1(0) = \psi(0), \quad \varphi_1(h) = \varphi_3(0), \quad \varphi_2(h) = \varphi_3(r).$$

3. Фундаментальное соотношение. В дальнейшем будем предполагать, что решение задачи (3)–(6) существует. Введем обозначения

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (7)$$

$$u_y(x, 0) = \nu(x), \quad 0 < x < r. \quad (8)$$

Решение задачи Коши (7)–(8) для уравнения (3) в области Ω_1 выписывается по формуле [9, с. 45]:

$$u(x, y) = \gamma_1 \int_0^1 \tau \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} (2t-1) \right] t^{\beta-1} (1-t)^{\beta-1} dt + \\ + \gamma_2 y \int_0^1 \nu \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} (2t-1) \right] t^{-\beta} (1-t)^{-\beta} dt, \quad (9)$$

где

$$\beta = \frac{m}{2(m+2)}, \quad \gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

Потребовав, чтобы функция (9) удовлетворяла условию (6), найдем

$$\gamma_1 \int_0^1 \tau[2tx] t^{\beta-1} (1-t)^{\beta-1} dt - \gamma_2 \left(\frac{x}{1-2\beta} \right)^{1-2\beta} \int_0^1 \nu[2tx] t^{-\beta} (1-t)^{-\beta} dt = \psi(x).$$

Введя в подынтегральных выражениях последнего равенства новую переменную интегрирования $z = 2tx$ и поменяв $2x$ на x в полученном равенстве, придем к равенству

$$\gamma_1 x^{1-2\beta} \int_0^x \frac{\tau(t) t^{\beta-1}}{(x-t)^{1-\beta}} dt - \frac{\gamma_2}{(2-4\beta)^{1-2\beta}} \int_0^x \frac{\nu(t) t^{-\beta}}{(x-t)^{\beta}} dt = \psi\left(\frac{x}{2}\right). \quad (10)$$

Пользуясь определением оператора D_{ax}^α дробного (в смысле Римана—Лиувилля) интегриродифференцирования порядка $|\alpha|$ с началом в точке a (см. [21, с. 28], перепишем равенство (10) в виде

$$\Gamma(\beta) \gamma_1 x^{1-2\beta} D_{0x}^{-\beta} t^{\beta-1} \tau(t) - \frac{\Gamma(1-\beta) \gamma_2}{(2-4\beta)^{1-2\beta}} D_{0x}^{\beta-1} t^{-\beta} \nu(t) = \psi\left(\frac{x}{2}\right). \quad (11)$$

Применим к обеим частям (11) оператор $D_{0x}^{1-\beta}$:

$$x^{-\beta} \nu(x) = \gamma_3 D_{0x}^{1-\beta} t^{1-2\beta} D_{0t}^{-\beta} s^{\beta-1} \tau(s) - \gamma_4 D_{0x}^{1-\beta} \psi\left(\frac{t}{2}\right), \quad (12)$$

где

$$\gamma_3 = \frac{\Gamma(2\beta) \Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta) \Gamma(2-2\beta)} (2-4\beta)^{1-2\beta}, \quad \gamma_4 = \frac{\Gamma(\beta) \gamma_2}{\Gamma(2\beta)}.$$

Воспользуемся далее свойством композиции операторов дробного интегриродифференцирования с одинаковыми началами (см. [21, с. 44]):

$$D_{0x}^{1-\beta} t^{1-2\beta} D_{0t}^{-\beta} s^{\beta-1} \tau(s) = x^{-\beta} D_{0x}^{1-2\beta} \tau(t). \quad (13)$$

С учетом (13) из (12) находим

$$\nu(x) = \gamma_3 D_{0x}^{1-2\beta} \tau(t) - \gamma_4 x^\beta D_{0x}^{1-\beta} \psi\left(\frac{t}{2}\right). \quad (14)$$

Соотношение (14) есть фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_1 на линию $y = 0$.

4. Априорная оценка решения. В дальнейших рассуждениях используем нормы

$$\|v(x, y)\|_0^2 = \int_{\Omega_2} v^2(x, y) dx dy, \quad \|g(x)\|_0^2 = \int_0^r g^2(x) dx.$$

С учетом полученного выше фундаментального соотношения (14) между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, в области Ω_2 приходим к задаче нахождения решения уравнения Пуассона, удовлетворяющего условиям (4), (5) и условию

$$u_y(x, 0) = \gamma_3 D_{0x}^{1-2\beta} u(t, 0) - \gamma_4 x^\beta D_{0x}^{1-\beta} \psi\left(\frac{t}{2}\right). \quad (15)$$

Введем вспомогательную область $\Omega_{2\varepsilon} = \{(x, y) : \varepsilon < x < r - \varepsilon, \varepsilon < y < h - \varepsilon, \varepsilon > 0\}$. Умножим уравнение (3) при $y > 0$ на функцию $u(x, y)$ и проинтегрируем полученное равенство по вспомогательной области $\Omega_{2\varepsilon}$. Тогда для любой функции $f(x, y) \in L_2(\Omega)$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{2\varepsilon}} u(x, y) [u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y)] dx dy &= \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \left[\frac{\partial}{\partial x} (u u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u u_y) \right] dx dy - \\ &- \int_{\Omega_{2\varepsilon}} [u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y)] dx dy = - \int_{\Omega_{2\varepsilon}} u(x, y) f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Применим к последнему равенству формулу Грина:

$$\int_{\Gamma_{2\varepsilon}} (u u_x) dy - (u u_y) dx - \int_{\Omega_{2\varepsilon}} [u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y)] dx dy = - \int_{\Omega_{2\varepsilon}} u(x, y) f(x, y) dx dy, \quad (16)$$

где $\Gamma_{2\varepsilon}$ — граница вспомогательной области $\Omega_{2\varepsilon}$.

Перейдем в равенстве (16) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Легко заметить, что при этом область $\Omega_{2\varepsilon}$ переходит в область Ω_2 , а граница $\Gamma_{2\varepsilon}$ переходит в границу Γ_2 области Ω_2 . Тогда из (16) получим

$$\int_{\Gamma_2} (u u_x) dy - (u u_y) dx - \int_{\Omega_2} [u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y)] dx dy = - \int_{\Omega_2} u(x, y) f(x, y) dx dy. \quad (17)$$

Вычислим интеграл по границе Γ_2 . В случае однородных условий (4)–(5) находим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} (u u_x) dy - (u u_y) dx &= \int_0^r [u(x, h) u_y(x, h) - u(x, 0) u_y(x, 0)] dx + \\ &+ \int_0^h [u(r, y) u_x(r, y) - u(0, y) u_x(0, y)] dy = - \int_0^r u(x, 0) u_y(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (18)$$

С учетом (18) равенство (17) перепишется в следующем виде:

$$\int_0^r u(x, 0) u_y(x, 0) dx + \|u_x\|_0^2 + \|u_y\|_0^2 = \int_{\Omega_2} u(x, y) f(x, y) dx dy. \quad (19)$$

Подставляя значение $u_y(x, 0)$ из (15) в (19), приходим к равенству

$$\begin{aligned} \|u_x\|_0^2 + \|u_y\|_0^2 + \gamma_3 \int_0^r u(x, 0) D_{0x}^{1-2\beta} u(t, 0) dx - \\ - \gamma_4 \int_0^r u(x, 0) x^\beta D_{0x}^{1-\beta} \psi\left(\frac{t}{2}\right) dx = \int_{\Omega_2} u(x, y) f(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (20)$$

Оценим слагаемые, входящие в равенство (20). Применяя [1, лемма 1.1], убеждаемся в справедливости неравенства

$$\begin{aligned} \gamma_3 \int_0^r \tau(x) D_{0x}^{1-2\beta} \tau(t) dx &\geq \frac{\gamma_3}{2} \int_0^r \partial_{0x}^{1-2\beta} \tau^2(t) dx = \frac{\gamma_3}{2} \int_0^r D_{0x}^{1-2\beta} \tau^2(t) dx = \\ &= \frac{\gamma_3}{2\Gamma(2\beta)} \int_0^r \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau^2(t) dt}{(x-t)^{1-2\beta}} dx = \frac{\gamma_3}{2\Gamma(2\beta)} \int_0^r \frac{\tau^2(t)}{(r-t)^{1-2\beta}} dt \geq \frac{\gamma_3 r^{2\beta-1}}{2\Gamma(2\beta)} \int_0^r \tau^2(x) dx, \end{aligned}$$

а использование ε -неравенства дает

$$-\gamma_4 \int_0^r \tau(x) x^\beta D_{0x}^{1-\beta} \psi\left(\frac{t}{2}\right) dx \geq \int_0^r \left[-\gamma_4 \varepsilon_1 \tau^2(x) - \frac{\gamma_4}{4\varepsilon_1} \chi^2(x) \right] dx = -\gamma_4 \varepsilon_1 \|\tau(x)\|_0^2 - \frac{\gamma_4}{\varepsilon_1} \|\chi(x)\|_0^2,$$

где $\chi(x) = x^\beta D_{0x}^{1-\beta} \psi(t/2)$, а ε_1 — достаточно малое положительное число. Аналогично,

$$\int_{\Omega_2} u(x, y) f(x, y) dx dy \leq \int_{\Omega_2} \left[\varepsilon_2 u^2(x, y) + \frac{1}{4\varepsilon_2} f^2(x, y) \right] dx dy = \varepsilon_2 \|u(x, y)\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \|f(x, y)\|_0^2,$$

где ε_2 — достаточно малое положительное число. С учетом полученных выше неравенств из (20) имеем

$$\left(\frac{\gamma_3 r^{2\beta-1}}{2\Gamma(2\beta)} - \gamma_4 \varepsilon_1 \right) \int_0^r \tau^2(x) dx - \varepsilon_2 \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u_y\|_0^2 \leq \frac{\gamma_4}{4\varepsilon_1} \|\chi(x)\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \|f(x, y)\|_0^2.$$

Выберем значение постоянной ε_1 так, чтобы

$$\varepsilon_1 < \frac{\gamma_3 r^{2\beta-1}}{2\gamma_4 \Gamma(2\beta)}.$$

Тогда из последнего неравенства получим

$$-\varepsilon_2 \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u_y\|_0^2 \leq \frac{\gamma_4}{4\varepsilon_1} \|\chi(x)\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \|f(x, y)\|_0^2. \quad (21)$$

Оценим далее $\|u_x\|_0^2$. Для этого заметим, что

$$u^2(x, y) = \left(\int_0^x u_s(s, y) ds \right)^2 \leq x \int_0^x u_s^2(s, y) ds \leq x \int_0^r u_x^2(x, y) dx. \quad (22)$$

Проинтегрируем обе части (22) сначала по x от 0 до r , а затем по y от 0 до h . Будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^r u^2(x, y) dx &\leq \frac{r^2}{2} \int_0^r u_x^2(x, y) dx, \\ \int_0^h \left(\int_0^r u^2(x, y) dx \right) dy &= \int_{\Omega_2} u^2(x, y) dx dy \leq \frac{r^2}{2} \int_0^h \left(\int_0^r u_x^2(x, y) dx \right) dy = \frac{r^2}{2} \int_{\Omega_2} u_x^2(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{2}{r^2} \|u\|_0^2 \leq \|u_x\|_0^2. \quad (23)$$

Аналогично, интегрируя неравенство

$$u^2(x, y) = \left(- \int_y^h u_s(x, s) ds \right)^2 \leq y \int_0^h u_y^2(x, y) dy$$

сначала по y от 0 до h , а затем по x от 0 до r , приходим к оценке

$$\frac{2}{h^2} \|u\|_0^2 \leq \|u_y\|_0^2. \quad (24)$$

С учетом оценок (23) и (24) из (21) получаем

$$\left(\frac{2}{r^2} + \frac{2}{h^2} - \varepsilon_2 \right) \|u\|_0^2 \leq \frac{\gamma_4}{4\varepsilon_1} \|\chi(x)\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \|f(x, y)\|_0^2.$$

Выбирая произвольную постоянную $0 < \varepsilon_2 < 2/r^2 + 2/h^2$, приходим к окончательной априорной оценке

$$\|u\|_0^2 \leq M_1 \|\chi(x)\|_0^2 + M_2 \|f(x, y)\|_0^2, \quad (25)$$

где

$$M_1 = \frac{\gamma_4 r^2 h^2}{4\varepsilon_1 (2r^2 + 2h^2 - \varepsilon_2 r^2 h^2)}, \quad M_2 = \frac{r^2 h^2}{4\varepsilon_2 (2r^2 + 2h^2 - \varepsilon_2 r^2 h^2)}.$$

Из априорной оценки (25) следует единственность регулярного решения задачи (3)–(6) при любой правой части $f(x, y) \in L_2(\Omega)$ и заданной функции $\psi(x) \in C^3[0, r/2]$.

В заключение отметим, что априорные оценки решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева—Бицадзе, подобные оценке (25), были получены в работах автора [3, 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиханов А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифф. уравн. — 2010. — 46, № 5. — С. 658–664.
2. Бабенко К. И. К теории уравнений смешанного типа // Усп. мат. наук. — 1953. — 80, № 3. — С. 3–160.
3. Балкизов Ж. А., Сокуров А. А. Об априорной оценке решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева—Бицадзе // Вестн. КРАУНЦ. Сер. физ.-мат. науки. — 2016. — 4-1 (16). — С. 15–20.
4. Балкизов Ж. А., Сокуров А. А. Об одном разностном методе решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева—Бицадзе // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. — 2017. — 21, № 2. — С. 221–235.
5. Баранцев Р. Г. Лекции по трансзвуковой газовой динамике. — Ленинград: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1965.
6. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. — М.: ИЛ, 1961.
7. Бицадзе А. В. К проблеме уравнений смешанного типа. — М.: Изд-во АН СССР, 1953.
8. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981.
9. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. — М.: Изд-во АН СССР, 1959.
10. Девингталь Ю. В. О существовании и единственности решения одной задачи Ф. И. Франкля // Изв. вузов. Мат. — 1958. — № 2. — С. 39–51.
11. Жегалов В. И. Исследование краевых задач со смещением для уравнений смешанного типа / дисс. на соиск. уч. степ. доктора физ.-мат. наук. — Новосибирск: Ин-т мат. им. С. Л. Соболева СО АН СССР, 1988.
12. Жегалов В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничным условием на обеих характеристиках с разрывами на переходной линии // Уч. зап. Казан. гос. ун-та. — 1962. — 122, № 3. — С. 3–16.
13. Жегалов В. И. К краевым задачам со смещениями для уравнения Лаврентьева—Бицадзе // Изв. вузов. Мат. — 1986. — № 3. — С. 61–64.
14. Кароль И. Л. К теории уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. — 1953. — 88, № 3. — С. 397–400.
15. Кароль И. Л. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптического-гиперболического типа // Докл. АН СССР. — 1953. — 88, № 2. — С. 197–200.
16. Крикунов Ю. М. Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986.
17. Лаврентьев М. А., Бицадзе А. В. К проблеме уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. — 1950. — 70, № 3. — С. 373–376.
18. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. — М.: Наука, 2006.

19. *Нахушев А. М.* К априорным оценкам для задач Трикоми и Дарбу// Диффер. уравн. — 1972. — 8, № 1. — С. 107–117.
20. *Нахушев А. М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа// Диффер. уравн. — 1969. — 5, № 1. — С. 44–59.
21. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Наука, 1995.
22. *Пулькин С. П.* Задача Трикоми для общего уравнения Лаврентьева—Бицадзе// Докл. АН СССР. — 1958. — 118, № 1. — С. 38–41.
23. *Сабитов К. Б.* К теории уравнений смешанного типа. — М.: Физматлит, 2014.
24. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. — М.: Наука, 1966.
25. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. — М.: Наука, 1970.
26. *Солдатов А. П.* Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева—Бицадзе// Диффер. уравн. — 1994. — 30, № 11. — С. 2001–2009.
27. *Солдатов А. П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. — М.: Высшая школа, 1991.
28. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. — М.: ИЛ, 1957.
29. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях второго порядка смешанного типа. — М.-Л.: Гостехиздат, 1947.
30. *Франкль Ф. И.* Избранные труды по газовой динамике. — М.: Наука, 1973.
31. *Франкль Ф. И.* О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1945. — 9, № 2. — С. 121–142.
32. *Gellerstedt S.* Quelques problemes mixtes pour l'equation $y^m Z_{xx} + Z_{yy} = 0$ // Ark. Math. Astr. Fysik. — 1938. — 26A, № 3. — P. 1–32.
33. *Gellerstedt S.* Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de tipe mixte. — Uppsala, 1935.

Балкизов Жираслан Анатольевич

Институт прикладной математики и автоматизации,

Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук, Нальчик

E-mail: giraslan@yandex.ru