Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. К. Буздов, Об одной двумерной краевой задаче типа Стефана, возникающей в криохирургии, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 167, 21–26

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-167-21-26>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:15:43

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 167 (2019). С. 21–26
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-167-21-26

УДК 519.711.3

ОБ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА СТЕФАНА, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В КРИОХИРУРГИИ

© 2019 г. Б. К. БУЗДОВ

Аннотация. В работе приведены постановка и метод решения задачи замораживания живой биологической ткани плоским криоаппликатором круглой формы. Модель представляет собой двумерную краевую задачу типа Стефана с нелинейными источниками тепла специального вида, обеспечивающими реально наблюдаемую пространственную локализацию температурного поля. Приведены результаты некоторых расчетов на ЭВМ.

Ключевые слова: математическое моделирование, задача Стефана, криомедицина, криобиология.

ON A TWO-DIMENSIONAL BOUNDARY-VALUE STEFAN-TYPE PROBLEM ARISING IN CRYOSURGERY

© 2019 B. K. BUZDOV

ABSTRACT. In this paper, we present the formulation and a method for solving the problem of freezing living biological tissue with a flat circular cryoapplicator. The model is a two-dimensional boundary-value problem of Stefan type with nonlinear heat sources of a special type that provide the actually observed spatial localization of the temperature field. Some results of computer simulation are presented.

Keywords and phrases: mathematical modeling, Stefan problem, cryomedicine, cryobiology.

AMS Subject Classification: 97M60

1. Введение. Вопросы прогнозирования результатов криогенного воздействия на биологические ткани приводят к исследованию задач Стефана, отличительной особенностью которых является существование стационарных решений. По физическому смыслу эволюция во времени поля температуры стабилизируется к решению соответствующей стационарной задачи. Это связано с тем, что при криогенном охлаждении биоткани отводимый поток тепла компенсируется возникающими в ней источниками тепла, крово- и лимфотока, метаболизма, окислительными химическими реакциями.

Теоретической основой воздействия низких температур на биологические объекты являются физические процессы замерзания воды — основного компонента клеточных структур всех живых организмов. Однако замораживание живой ткани существенно отличается от замерзания воды. Процесс образования кристаллов льда в живой ткани почти всегда начинается во внеклеточном пространстве с появления центров кристаллизации и только после значительного снижения температуры распространяется внутрь клеток. Для того чтобы превратить в лед межклеточную жидкость, необходимо снизить температуру среды до -5°C и ниже, для замораживания жидкости внутри клеток необходима более низкая температура (-20°C и ниже).

На сегодняшний день существует большое количество научных публикаций (см., например, [12, 14, 15] и цитируемую там литературу), в которых рассматриваются математические модели криодеструкции биологической ткани. Однако в подавляющем их большинстве за основу математической модели принимается уравнение Пеннеса (см. [13]), из которого виден линейный характер зависимости источников тепла биоткани от искомого температурного поля. Такой характер зависимости не позволяет описать реально наблюдаемую пространственную локализацию тепла. Кроме того, модель Пеннеса не учитывает того факта, что замерзание межклеточной жидкости происходит гораздо раньше, чем замерзание внутриклеточной жидкости и соответствующее этим двум процессам тепло выделяется в разные моменты времени. В [2, 9] были приведены некоторые постановки задач, учитывающие указанные особенности, однако они не были доведены до численных расчетов на ЭВМ.

2. Постановка задачи. При охлаждении биологической ткани (активной, не инертной среды) в криомедицине используются криоинструменты с различными формами охлаждающей поверхности. Криоинструменты могут располагаться как на поверхности биоткани, так и полностью внедряться в нее. С понижением температуры охлаждающей поверхности в ткани возникает нестационарное температурное поле, зависящее в общем случае от трех пространственных переменных (координат) и времени.

В случае, когда биоткань охлаждается плоским криоинструментом круглой формы радиуса r_1 , располагающимся на ее поверхности, процесс теплопередачи можно описать следующей двумерной начально-краевой задачей типа Стефана (в цилиндрической системе координат):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial z} \right) - c(u) \rho(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \\ = -w(u) + P \frac{\partial u}{\partial t} \delta(u - u_1) + P_0 \frac{\partial u}{\partial t} \delta(u - u_2), \quad 0 < z < H, \quad r_0 < r < R, \quad t > 0, \quad (1) \\ u(r, z, 0) = \bar{u} = \text{const}, \quad r_0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq z \leq H, \\ \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial z} - \alpha u = -\alpha u_A, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad z = 0, \quad t > 0, \\ u(r, z, t) = \bar{u}, \quad r = R, \quad 0 \leq z \leq H, \quad t > 0, \\ u(r, z, t) = \bar{u}, \quad z = H, \quad r_0 \leq r \leq R, \quad t > 0, \quad (2) \\ \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial z} - \gamma u = -\gamma u_c, \quad r_1 \leq r \leq R, \quad z = 0, \quad t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad r = r_0, \quad 0 \leq z \leq H, \quad t > 0, \\ u(r, z_1(r, t)t) = u_1, \quad u(r, z_2(r, t)t) = u_2. \end{aligned}$$

Здесь r — полярный радиус, r_1 — радиус криоинструмента, $u_A = u_A(t)$ — температура его охлаждающей поверхности; $\lambda(u)$, $c(u)$, $\rho(u)$ — коэффициенты теплопроводности, теплоемкости и плотности биоткани соответственно; u_c — температура окружающей среды; α — коэффициент теплообмена криоинструмента с биотканью; γ — коэффициент теплообмена с окружающей средой; $\bar{u}$ — температура биоткани, до которой еще не дошел холод; u_1 — температура замораживания биоткани (замерзает внеклеточная вода), u_2 — температура криопоражения (замерзает внутриклеточная вода); $w(u)$ — источники тепла, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; P , P_0 — известные постоянные; $0 < r_0 \leq 1$.

Область, в которой ищется распределение температуры, приведена ниже на рисунке. Определению подлежат функции $u(r, z, t)$, $z_1(r, t)$, $z_2(r, t)$. Здесь R — некоторая известная константа, характеризующаяся тем, что при $r > R$ температура биоткани постоянна и равна $\bar{u}$.

Предполагается, что коэффициенты $c(u)$, $\rho(u)$, $\lambda(u)$ могут иметь разрывы типа скачка при $u = u_1$ и $u = u_2$, а также

$$c(u) \geq c_{\min} > 0, \quad \rho(u) \geq \rho_{\min} > 0, \quad \lambda(u) \geq \lambda_{\min} > 0.$$

3. Источники тепла. Характерной особенностью процесса теплопроводности при охлаждении живой биоткани является стабилизация к предельному стационарному состоянию с четкой пространственной локализацией температурного поля. Указанная особенность моделируется специальным образом подобранной нелинейной функциональной зависимостью источников тепла от температуры. По теплофизическому смыслу функциональная зависимость источников тепла от температуры должна быть ограниченной, непрерывной и монотонно убывающей в интервале положительных температур $u_1 \leq u \leq \bar{u}$, а в интервале отрицательных температур — ограниченной и монотонно возрастающей (см. [1]). Для существования пространственной локализации необходимым является условие вертикального вхождения кривой $w = w(u)$ в точку $(\bar{u}, 0)$, т.е. необходимо, чтобы $w_u(\bar{u}) = -\infty$. Оно имеет следующий смысл: при сколь угодно малом возмущении начальной температуры биоткани в ней мгновенно возникают источники тепла. Отмеченные качественные характеристики должны учитываться при выборе конкретных функциональных зависимостей $w = w(u)$.

При проведении численных расчетов на ЭВМ использовались следующие функции источников:

$$w_1(u) = \begin{cases} w_0(\bar{u} - u)^\beta & \text{при } u_1 \leq u < \bar{u}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad w_2(u) = \begin{cases} w_0 \ln(\bar{u} - u) & \text{при } u_1 \leq u < \bar{u}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$w_3(u) = \begin{cases} w_0(\bar{u} - u)^\beta, & u_1 \leq u < \bar{u}, \\ -\frac{w_0 \bar{u}^\beta}{u_A}(u - u_A), & u_A \leq u < u_1, \\ 0, & u < u_A. \end{cases}$$

Содержащиеся в указанных зависимостях параметры w_0 и $0 < \beta < 1$ определяются экспериментально.

4. Метод решения. Введем функцию «теплосодержания» (см. [5])

$$H(u) = \int_0^u c(\xi)\rho(\xi)d\xi + P\eta(u - u_1) + P_0\eta(u - u_2),$$

где $\eta(x)$ — функция Хевисайда, и перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial H(u)}{\partial t} = -w(u), \quad 0 < z < H, \quad r_0 < r < R, \quad t > 0. \quad (3)$$

Отметим, что условия (2) на изотермических поверхностях уже содержатся в уравнении (3).

Производная функции $H(u)$ по u при $u = u_1$ и $u = u_2$ обращается в бесконечность, а сама $H(u)$ при $u = u_1$ и $u = u_2$ имеет разрывы первого рода соответственно со скачками

$$H(u_1 + 0) - H(u_1 - 0) = P, \quad H(u_2 + 0) - H(u_2 - 0) = P_0.$$

Поэтому непосредственное применение разностных схем к уравнению (1) не дает практически пригодных результатов. Чтобы применение разностных схем к уравнению (1) сделать более эффективным, целесообразно функции $\lambda(u)$, $c(u)$, $\rho(u)$, $H(u)$ подвергнуть сглаживанию (в настоящей работе применялось сглаживание нулевого порядка; см. [6]).

Далее, после добавления к уравнению (3) начальных и граничных условий проводится «сглаживание» разрывных функций $\lambda(u)$, $c(u)$, $\rho(u)$, $H(u)$ (см. [6]) и для «сглаженной» задачи строится локально-одномерная разностная схема.

Введем в рассматриваемой области пространственно-временную сетку. Для простоты будем рассматривать равномерные сетки по каждому из направлений. Введем следующие обозначения:

$$\overline{W}_r = \{r_i = ih_r, i = 0, 1, \dots, N-1, N\}, \quad \overline{W}_z = \{z_j = jh_z, j = 0, 1, \dots, M-1, M\},$$

$$\overline{W}_t = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots\},$$

где $r_N = R$, $r_0 = r_0$; $z_0 = 0$, $z_M = H$, $t_0 = 0$. Тогда на множестве $\overline{W} = \overline{W}_r \cdot \overline{W}_z \cdot \overline{W}_t$ вместо функции непрерывных аргументов $u(r, z, t)$ будем рассматривать функцию дискретных аргументов

Рис. 1. Область, в которой решается задача

ν_{ij}^n , значения которой вычисляются в узлах сетки $\overline{W}$. Обозначим $\overline{W}_{rz} = \overline{W}_r \cdot \overline{W}_z$. Для сеточной функции ν_{ij}^n получаем следующую схему (считаем, что r_1 попадает в узел сетки и имеет индекс m):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}B(\nu_{ij}^{n+1/2}) \cdot \frac{\nu_{ij}^{n+1/2} - \nu_{ij}^n}{\tau} &= \Lambda_1 \nu_{ij}^{n+1/2} + \frac{1}{2}w(\nu_{ij}^{n+1/2}), \quad (r_i, z_j) \in \overline{W}_{rz}, \\
 \nu_{Nj}^{n+1/2} &= \bar{u}, \quad \nu_{1j}^{n+1/2} = \nu_{0j}^{n+1/2}, \quad 0 < j < M, \\
 \Lambda_1 \nu_{ij}^{n+1/2} &= \frac{1}{r_i} \frac{1}{h_r} \left(r_{i+1/2} \lambda(\nu_{i+1/2,j}^{n+1/2}) \frac{\nu_{i+1,j}^{n+1/2} - \nu_{ij}^{n+1/2}}{h_r} - r_{i-1/2} \lambda(\nu_{i-1/2,j}^{n+1/2}) \frac{\nu_{i,j}^{n+1/2} - \nu_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_r} \right), \\
 \frac{1}{2}B(\nu_{ij}^{n+1}) \frac{\nu_{ij}^{n+1} - \nu_{ij}^{n+1/2}}{\tau} &= \Lambda_2 \nu_{ij}^{n+1} + \frac{1}{2}w(\nu_{ij}^{n+1}), \quad (r_i, z_j) \in W_{rz}, \\
 \nu_{i0}^{n+1} &= \frac{\lambda(\nu_{i0}^{n+1})}{r_i \gamma h_z + \lambda(\nu_{i0}^{n+1})} \cdot \nu_{i1}^{n+1} + \frac{h_z \gamma u_c r_i}{r_i \gamma h_z + \lambda(\nu_{i0}^{n+1})}, \quad m < i < N, \\
 \Lambda_2 \nu_{ij}^{n+1} &= \frac{1}{h_z} \cdot \left(\lambda(\nu_{i,j+1/2}^{n+1}) \cdot \frac{\nu_{i,j+1}^{n+1} - \nu_{i,j}^{n+1}}{h_z} - \lambda(\nu_{i,j-1/2}^{n+1}) \cdot \frac{\nu_{i,j}^{n+1} - \nu_{i,j-1}^{n+1}}{h_z} \right), \\
 \nu_{0j}^{n+1/2} &= \frac{\lambda(\nu_{0j}^{n+1})}{\alpha h_z + \lambda(\nu_{0j}^{n+1})} \nu_{ij}^{n+1} + \frac{h_z \alpha u_A}{\alpha h_z + \lambda(\nu_{0j}^{n+1})}, \quad 0 < j \leq m, \\
 \nu_{i,M}^{n+1} &= \bar{u}, \quad 0 \leq i \leq N, \\
 \nu_{i,j}^0 &= \bar{u}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad 0 \leq j \leq M.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \nu_{i+1/2,j} &= 0,5(\nu_{i,j} + \nu_{i+1,j}), \quad \nu_{i,j+1/2} = 0,5(\nu_{i,j} + \nu_{i,j+1}), \\
 r_{i+1/2} &= 0,5(r_i + r_{i+1}), \quad r_{i-1/2} = 0,5(r_i - r_{i-1}), \quad B(u) = H'(u).
 \end{aligned}$$

Для нахождения значений сеточной функции ν на $(n+1)$ -м временном слое по известному значению на n -м временном слое необходимо последовательно решать две серии одномерных задач, соответственно по координатам r и z . Каждая такая задача представляет собой нелинейную алгебраическую систему с трехдиагональной матрицей, и для ее решения лучше использовать метод прогонки совместно с каким-либо итерационным методом (в работе применялся метод Ньютона). При этом при определении ν^{n+1} коэффициенты c , ρ , λ можно брать на предыдущей итерации.

5. Заключение. Расчеты проводились при следующих значениях теплофизических характеристик биоткани:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0,56 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2,22 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}, \quad w_0 = 48,5 \cdot 10^3 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}, \\ c_1 \cdot \rho_1 &= 3,6 \cdot 10^6 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}}, \quad c_2 \cdot \rho_2 = 2,01 \cdot 10^6 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}}, \quad c_3 \cdot \rho_3 = 1,08 \cdot 10^6 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}}, \\ P &= 300 \cdot 10^6 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}^3}, \quad P_0 = 0,3 \cdot P, \quad \alpha = 100-2 \cdot 10^5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}, \\ u_A &= -90, \quad \bar{u} = 36,7.\end{aligned}$$

Индексы 1, 2, 3 относятся соответственно к охлажденной, замороженной и криопораженной области биоткани.

Отличительными чертами примененного для расчета метода сглаживания коэффициентов являются логическая простота и возможность использования большого шага по времени. Анализ результатов показывает, что область определения сглаживающей функции лучше выбирать так, чтобы охватывалось 2-3 расчетные точки. В то же время можно сделать вывод, что вид самой функции (т.е. порядок сглаживания) слабо влияет на результаты счета. Итерационный метод Ньютона сходится достаточно быстро: в среднем 5-7 итераций для первых двух функций источников и 3-5 итераций для третьей функциональной зависимости. Достаточные условия сходимости метода прогонки выполняются не всегда, однако практика показывает, что он вполне пригоден для решения получающихся систем линейных уравнений.

Сравнение полученных результатов показывает схожий характер движения изотерм замораживания и криопоражения для всех трех рассмотренных тепловых источников. Обратим внимание на то, что вторая из функциональных зависимостей содержит только один экспериментально определяемый параметр.

6. Выводы. 1. Одной из важных особенностей задач типа Стефана в криохирургии является реально наблюдаемый эффект *пространственной локализации тепла*, связанный с наличием в биоткани нелинейных источников тепла специального вида. Этот эффект, хотя и усложняет математические модели (в уравнении появляется нелинейный член, зависящий от искомого температурного поля), позволяет перейти от постановок задач в неограниченной области к постановкам в ограниченной области.

2. Нелинейные источники тепла зависят от экспериментально определяемых числовых параметров, что представляет самостоятельную достаточно сложную задачу.

3. Используемая методика сквозного расчета с предварительным сглаживанием разрывных функций не зависит от размерности задачи.

4. Связь между шагами по времени и пространству, обнаруженная при проведении численных экспериментов, указывает на то, что построенные разностные схемы являются условно устойчивыми.

5. Результаты счета вполне согласуются с результатами счета других двумерных задач, рассмотренных ранее автором (см. [7, 8]), а также с результатами, полученными другими авторами (см. [3]) при рассмотрении одномерных нестационарных задач типа Стефана, возникающих в криохирургии.

6. Анализ выполненных расчетов позволил проследить стабилизацию как поля температуры, так и поля изотерм к предельному стационарному состоянию.

7. При исходных данных $r_1 = 2,5 \text{ мм}$, $u_A = -90^\circ\text{C}$, $\beta = 0,5$ получены следующие результаты: стабилизация к предельному стационарному состоянию достигается примерно через 6 минут; радиус зоны поражения колеблется около отметки 22 мм, радиус зоны замороженной биоткани $\approx 31 \text{ мм}$, а радиус зоны охлажденной биоткани $\approx 46 \text{ мм}$ (при проведении расчетов брали $u_c = 20^\circ\text{C}$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березовский А. А.* Одномерная локальная задача Стефана плоскопараллельной криодеструкции биологической ткани// в кн.: Задачи теплопроводности с подвижными границами. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. — С. 3–8.
2. *Березовский А. А.* Двумерные математические модели криодеструкции биоткани// в кн.: Математическое моделирование физических процессов. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989.
3. *Березовский А. А., Жураев К. О., Юртин И. И.* Нестационарные задачи сферически симметричной гипотермии биоткани// в кн.: Задачи Стефана со свободными границами. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. — С. 9–20.
4. *Березовский А. А., Леонтьев Ю. В.* Математическое прогнозирование криовоздействия на биологические ткани// в кн.: Кробиология. — Киев: Наукова думка, 1989. — С. 7–13.
5. *Будак Б. М., Васильев Ф. П., Успенский А. Б.* Разностные методы решения некоторых краевых задач типа Стефана// в кн.: Численные методы в газовой динамике. — М.: Изд-во МГУ, 1965. — С. 139–183.
6. *Будак Б. М., Соловьева Е. Н., Успенский А. Б.* Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задачи Стефана// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1965. — 5. — С. 828–840.
7. *Буздов Б. К.* Моделирование криодеструкции биологической ткани// Мат. модел. — 2011. — 23, № 3. — С. 27–37.
8. *Буздов Б. К.* Численное исследование одной двумерной математической модели с переменным коэффициентом теплообмена, возникающей в криохирургии// Сиб. ж. индустр. мат. — 2017. — 20, № 4. — С. 22–28.
9. *Митропольский Ю. А., Березовский А. А.* Задачи Стефана с предельным стационарным состоянием в спецэлектрометаллургии, криохирургии и физике моря// Мат. физ. нелин. мех. — 1987. — № 7. — С. 50–60.
10. *Самарский А. А.* Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1963. — 3, № 3. — С. 431–466.
11. *Самарский А. А., Моисеенко Б. Д.* Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1965. — 5, № 5. — С. 816–827.
12. *Baissalov R., Sandison G. A., Donnelly B. J., Saliken J. C., McKinnon J. G., Muldrew K., Rewcastle J. C.* A semi-empirical treatment planning model for optimization of multiprobe cryosurgery// Phys. Med. Biol. — 2000. — 45. — P. 1085–1098.
13. *Pennes H. H.* Analysis of tissue and arterial blood temperature in the resting human forearm// J. Appl. Physiol. — 1948. — 1. — P. 93–102.
14. *Rabin Y., Shitzer A.* Numerical solution of the multidimensional freezing problem during cryosurgery// ASME J. Biomech. Eng. — 1998. — 120, № 1. — P. 32–37.
15. *Rossi M. R., Rabin Y.* Experimental verification of numerical simulations of cryosurgery with application to computerized planning// Phys. Med. Biol. — 2007. — 52. — P. 4553–4567.

Буздов Беслан Каральбиевич

Институт информатики и проблем регионального управления,

Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук, Нальчик

E-mail: beslan2801@yandex.ru