Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Х. Геккиева, М. А. Керефов, Краевая задача для нелокального уравнения
влагопереноса Аллера—Лыкова, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее
прил. Темат. обз.*, 2019, том 167, 27–33

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-167-27-33>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 17:52:48

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 167 (2019). С. 27–33
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-167-27-33

УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА АЛЛЕРА—ЛЫКОВА

© 2019 г. С. Х. ГЕККИЕВА, М. А. КЕРЕФОВ

Аннотация. В работе исследована краевая задача для неоднородного уравнения влагопереноса Аллера—Лыкова с дробной по времени производной Римана—Лиувилля. Рассматриваемое уравнение является обобщением уравнения Аллера—Лыкова посредством введения понятия фрактальной скорости изменения влажности, которая объясняет наличие потоков против потенциала влажности. Существование решения первой краевой задачи доказано методом Фурье. С помощью метода энергетических неравенств для решения задачи получена априорная оценка в терминах дробной производной Римана—Лиувилля, из которой следует единственность решения.

Ключевые слова: уравнение влагопереноса Аллера—Лыкова, дробная производная Римана—Лиувилля, метод Фурье, априорная оценка, метод энергетических неравенств.

BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE ALLER—LYKOV NONLOCAL MOISTURE TRANSFER EQUATION

© 2019 S. KH. GEKKIEVA, M. A. KEREF OV

ABSTRACT. In this paper, a boundary-value problem for the inhomogeneous Aller–Lykov moisture transfer equation with a fractional Riemann–Liouville time derivative is examined. The equation considered is a generalization of the Aller–Lykov equation obtained by introducing the fractal rate of change of humidity, which explains the appearance of flows directed against the potential of humidity. The existence of a solution to the first boundary-value problem is proved by the Fourier method. Using the method of energy inequalities for solutions of the problem, we obtain an a priori estimate in terms of the fractional Riemann–Liouville derivative, which implies the uniqueness of the solution.

Keywords and phrases: Aller–Lykov moisture transfer equation, Riemann–Liouville fractional derivative, Fourier method, a priori estimate, method of energy inequalities.

AMS Subject Classification: 35L99

1. Введение. Вопросы тепловлагопереноса в почвах являются фундаментальными при решении многих задач гидрологии, агрофизики, строительной физики и других областей науки. Исследователи при этом концентрируют свое внимание на возможности отражения в характере исходных уравнений специфических особенностей изучаемых массивов, их структуры, физических свойств, протекающих в них процессов (см. [13, гл. 6]). В связи с этим возникает качественно новый класс дифференциальных уравнений состояния и переноса с дробной производной, являющихся основой большинства математических моделей, описывающих широкий класс физических и химических процессов в средах с фрактальной структурой и памятью (см. [9, гл. 5]).

Настоящая работа посвящена исследованию обобщенного уравнения влагопереноса Аллера—Лыкова:

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} u + D_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + A D_{0t}^{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1)$$

где D_{0t}^γ — оператор дробного дифференцирования Римана—Лиувилля (см. [9, с. 9]), $0 < \alpha < 1$, $A_1, A = \text{const} > 0$, $k(x, t)$ — коэффициент диффузии.

Такого рода уравнения в локальной постановке ($\alpha = 1$) рассматривались в работах многих авторов и решались методом разделения переменных, методом априорных оценок, а также численными методами. Среди последних отметим работы [1, 8], в которых получены априорные оценки для решения нелокальных задач для уравнения влагопереноса Аллера—Лыкова в дифференциальной и разностной трактовках, а также работу [4], в которой исследовано уравнение влагопереноса Аллера—Лыкова с дробной по времени производной.

Исследование уравнения (1) будем проводить методом Фурье и методом априорных оценок.

Ранее методом Фурье краевые задачи для уравнений с дробной производной исследовались в работах С. Х. Геккиевой (см. [3]), О. Р. Agrawal (см. [15]), В. А. Нахушевой (см. [10]), О. Х. Масасевой (см. [16]), Б. Х. Турметова (см. [17]) и других авторов, в том числе методом априорных оценок в [6, 14].

2. Постановка задачи. В области $\Omega_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение (1). *Регулярным решением* уравнения (1) в области Ω_T назовем функцию $u = u(x, t)$ из класса

$$D_{0t}^{\alpha-1}u(x, t), D_{0t}^\alpha u(x, t) \in C(\overline{\Omega}_T), \quad D_{0t}^{\alpha+1}u(x, t), u_{xx}(x, t), D_{0t}^\alpha u_{xx}(x, t) \in C(\Omega_T),$$

которая удовлетворяет уравнению (1) во всех точках $(x, t) \in \Omega_T$. Сформулируем первую краевую задачу для уравнения (1).

Задача 1. Найти регулярное решение $u(x, t)$ уравнения (1) в области Ω_T , удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

и начальным условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1}u(x, t) = \tau(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^\alpha u(x, t) = \nu(x), \quad (3)$$

где $\tau(x), \nu(x)$ — заданные функции.

3. Решение задачи для неоднородного уравнения влагопереноса. Рассмотрим задачу (1)–(3) для неоднородного нелокального уравнения Аллера—Лыкова в случае $k(x, t) \equiv 1$.

Разложим функцию $f(x, t)$ в интервале $(0, l)$ в ряд Фурье по синусам:

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right), \quad f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin\left(\frac{\pi k}{l}\xi\right) d\xi. \quad (4)$$

В силу теоремы Стеклова (см. [2, с. 342]) разложение (4) справедливо, если

$$f(x, t) \in C^2(\overline{\Omega}_T), \quad f(0, t) = f(l, t) = 0 \quad (5)$$

и при любом фиксированном $t \geq 0$ имеет кусочно непрерывную производную по x с точками разрыва первого рода.

Будем искать решение задачи в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{\pi k}{l}x, \quad (6)$$

считая при этом t параметром и предполагая, что начальные функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ представимы в виде

$$\tau(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right), \quad \nu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right), \quad (7)$$

где

$$\tau_k = \frac{2}{l} \int_0^l \tau(\xi) \sin\left(\frac{\pi k}{l}\xi\right) d\xi, \quad \nu_k = \frac{2}{l} \int_0^l \nu(\xi) \sin\left(\frac{\pi k}{l}\xi\right) d\xi.$$

Подставляя предполагаемую форму решения (6) в уравнение (1) и в начальные условия (3), с учетом (4), (7), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi k}{l} x \left\{ A_1 D_{0t}^{\alpha+1} u_k(t) + D_{0t}^{\alpha} u_k(t) + \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 u_k(t) + A \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 D_{0t}^{\alpha} u_k(t) - f_k(t) \right\} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi k}{l} x \left[\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u_k(t) - \tau_k \right] = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi k}{l} x \left[\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha} u_k(t) - \nu_k \right] = 0.$$

Эти равенства возможны тогда и только тогда, когда для всех $k = 1, 2, \dots$ выполняются соотношения

$$D_{0t}^{\alpha+1} u_k(t) + a_k D_{0t}^{\alpha} u_k(t) + b_k u_k(t) = f_k(t), \quad (8)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u_k(t) = \tau_k, \quad \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha} u_k(t) = \nu_k, \quad (9)$$

где

$$a = a_k = \frac{1 + A\lambda}{A_1}, \quad b = b_k = \frac{\lambda}{A_1}, \quad \lambda = \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Таким образом, задача (1)–(3) сведена к нелокальной задаче Коши (8)–(9), единственное решение которой задается формулой

$$u_k(t) = u_k^{(1)}(t) + u_k^{(2)}(t), \quad (10)$$

где¹

$$u_k^{(1)}(t) = (\nu_k + a_k \tau_k) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^n (-1)^n \binom{n}{s} \frac{a_k^{n-s} b_k^s t^{n+s\alpha+\alpha}}{\Gamma(n+s\alpha+\alpha+1)} +$$

$$+ \tau_k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^n (-1)^n \binom{n}{s} \frac{a_k^{n-s} b_k^s t^{n+s\alpha+\alpha-1}}{\Gamma(n+s\alpha+\alpha)} \quad (11)$$

— решение однородного уравнения с заданными начальными условиями (см. [5]); здесь $u_k^{(2)}(t)$ — решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями.

Найдем $u_k^{(2)}(t)$. Подействовав на уравнение (8) оператором дробного интегрирования порядка $\alpha + 1$, получим

$$u_k^{(2)}(t) + \int_0^t u_k^{(2)}(\tau) \left[a + \frac{b}{\Gamma(\alpha+1)(t-\tau)^{-\alpha}} \right] d\tau = F_k(t), \quad F_k(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha} f_k(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Найдем решение интегрального уравнения (12) аналогично тому, как это было проделано в [5]:

$$u_k^{(2)}(t) = F_k(t) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{s=0}^{n+1} \binom{n+1}{s} \frac{a_k^{n+1-s} b_k^s}{\Gamma(n+1+s\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n+s\alpha} F_k(t) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t \frac{f_k(\tau)}{(t-\tau)^{-\alpha}} d\tau + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{s=0}^{n+1} \binom{n+1}{s} +$$

$$+ \frac{a_k^{n+1-s} b_k^s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1+s\alpha)} \int_0^t \int_0^{\tau} \frac{(t-\tau)^{n+s\alpha} f_k(\tau_1)}{(\tau-\tau_1)^{-\alpha}} d\tau_1 d\tau. \quad (13)$$

¹Здесь $\binom{n}{s} = \frac{n!}{s!(n-s)!}$ — биномиальный коэффициент.

В правой части (13) вычислим двойной интеграл. Изменив порядок интегрирования и сделав замену $\tau = \tau_1 + z(t - \tau)$, находим:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^\tau \frac{(t - \tau)^{n+s\alpha} f_k(\tau_1)}{(\tau - \tau_1)^{-\alpha}} d\tau_1 d\tau &= \int_0^t f_k(\tau_1) d\tau_1 \int_{\tau_1}^t (t - \tau)^{n+s\alpha} (\tau - \tau_1)^\alpha d\tau = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(n + s\alpha + 1)}{\Gamma(n + 2 + s\alpha + \alpha)} \int_0^t (t - \tau_1)^{n+s\alpha+\alpha+1} f_k(\tau_1) d\tau_1 \end{aligned}$$

и окончательно

$$\begin{aligned} u_k^{(2)}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^t \frac{f_k(\tau)}{(t - \tau)^{-\alpha}} d\tau + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{s=0}^{n+1} \binom{n+1}{s} \frac{a_k^{n+1-s} b_k^s}{\Gamma(n + 2 + s\alpha + \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{n+s\alpha+\alpha+1} f_k(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^t \left[\frac{(t - \tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{s=0}^{n+1} \binom{n+1}{s} \frac{a_k^{n+1-s} b_k^s}{\Gamma(n + 2 + s\alpha + \alpha)} (t - \tau)^{n+s\alpha+\alpha+1} \right] f_k(\tau) d\tau. \quad (14) \end{aligned}$$

Таким образом, из (14) получаем, что согласно (6) и (10) искомое решение задачи (1)–(3) запишется в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(1)}(t) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) + \int_0^t \int_0^l G^\alpha(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} G^\alpha(x, \xi, t - \tau) &= \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} E_k(t, \tau) \sin \frac{\pi k}{l} x \sin \frac{\pi k}{l} \xi, \\ E_k(t, \tau) &= \frac{(t - \tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{s=0}^{n+1} \binom{n+1}{s} \frac{a_k^{n+1-s} b_k^s (t - \tau)^{n+s\alpha+\alpha+1}}{\Gamma(n + 2 + s\alpha + \alpha)}. \end{aligned}$$

Сходимость ряда (15) и рядов производных

$$\begin{aligned} D_{0t}^{\alpha+1} u(x, t) &\sim \sum_{k=1}^{\infty} D_{0t}^\alpha u_k, & D_{0t}^\alpha u(x, t) &\sim \sum_{k=1}^{\infty} D_{0t}^\alpha u_k, \\ u_{xx}(x, t) &\sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}, & D_{0t}^\alpha u_{xx}(x, t) &\sim \sum_{k=1}^{\infty} D_{0t}^\alpha u_k \end{aligned}$$

обеспечивается условиями (5).

Теорема 1. Пусть $k(x, t) = 1$, $f(x, t) \in C^2(\overline{\Omega}_T)$, $\tau \in C^3[0, l]$, $\nu \in C^2[0, l]$ и выполнены условия согласования

$$f(0, t) = f(l, t) = 0, \quad \tau(0) = \tau(l) = \tau''(0) = \tau''(l) = 0, \quad \nu(0) = \nu(l) = 0.$$

Тогда регулярное решение $u(x, t)$ задачи 1 представимо в виде (15).

4. Единственность решения задачи для неоднородного уравнения Аллера—Лыкова с дробной производной по времени. Предположим, что существует регулярное решение задачи 1.

Теорема 2. Если $k_x(x, t)$, $k_t(x, t)$, $f(x, t) \in C(\overline{\Omega}_T)$, $\nu(x) \in C[0, l]$, $\tau(x) \in C^2[0, l]$, $k \geq c_1 > 0$, $k_t \leq 0$ всюду на $\overline{\Omega}_T$ и выполнено условие $\tau(0) = \tau(l) = 0$. Тогда для решения задачи 1 справедлива априорная оценка

$$\|D_{0t}^\alpha u\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha u_x\|_{2, \Omega_t}^2 + \|D_{0t}^\alpha u\|_{2, \Omega_t}^2 \leq M_1(t) \left(\|f\|_{2, \Omega_t}^2 + \|\tau''(x)\|_0^2 + \|\nu(x)\|_0^2 \right). \quad (16)$$

Доказательство. Аналогично [7], введем новую неизвестную функцию $g(x, t)$, полагая

$$u(x, t) = g(x, t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau(x);$$

таким образом, $g(x, t)$ представляет собой отклонение функции $u(x, t)$ от известной функции $\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau(x)$. С учетом соотношений

$$D_{0t}^{\alpha+1} t^{\alpha-1} = 0, \quad D_{0t}^\alpha t^{\alpha-1} = 0$$

(см. [11, с. 15]) функция $g(x, t)$ определяется как решение уравнения

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} g + D_{0t}^\alpha g - (kg_x)_x - AD_{0t}^\alpha g_{xx} = F(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (17)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} g(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} \left(u(x, t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau(x) \right) = \tau(x) - \frac{\tau(x)}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} t^{\alpha-1} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^\alpha g(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^\alpha \left(u(x, t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau(x) \right) = \nu(x) - \frac{\tau(x)}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^\alpha t^{\alpha-1} = \nu(x) \end{aligned} \quad (18)$$

и граничными условиями

$$g(0, t) = g(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (19)$$

где

$$F(x, t) = f(x, t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (k_x \tau'(x) + k \tau''(x)).$$

Получим априорную оценку в терминах дробной производной Римана—Лиувилля, для чего умножим уравнение (17) скалярно на $D_{0t}^\alpha g$:

$$\left(A_1 D_{0t}^{\alpha+1} g, D_{0t}^\alpha g \right) + \left(D_{0t}^\alpha g, D_{0t}^\alpha g \right) - \left((kg_x)_x, D_{0t}^\alpha g \right) - \left(AD_{0t}^\alpha g_{xx}, D_{0t}^\alpha g \right) = \left(F, D_{0t}^\alpha g \right), \quad (20)$$

где

$$(u, v) = \int_0^l uv \, dx, \quad (u, u) = \|u\|_0^2.$$

Преобразуем слагаемые тождества (20) с учетом (18), (19):

$$\begin{aligned} \left(A_1 D_{0t}^{\alpha+1} g, D_{0t}^\alpha g \right) &= A_1 \int_0^l \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx = \\ &= \frac{A_1}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} (D_{0t}^\alpha g)^2 dx = \frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2, \end{aligned}$$

$$\left(D_{0t}^\alpha g, D_{0t}^\alpha g \right) = \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2,$$

$$\begin{aligned}
\left((kg_x)_x, D_{0t}^\alpha g \right) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l (kg_x)_x \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ kg_x(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \Big|_0^l - \int_0^l kg_x(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx \right\} = \\
&= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l kg_x(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx, \\
\left(AD_{0t}^\alpha g_{xx}, D_{0t}^\alpha g \right) &= A \int_0^l \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_{xx}(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx = \\
&= \frac{A}{\Gamma^2(1-\alpha)} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_{xx}(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx = \\
&= \frac{A}{\Gamma^2(1-\alpha)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx \right\} = \\
&= -A \int_0^l \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \right)^2 dx = -A \|D_{0t}^\alpha g_x\|_0^2.
\end{aligned}$$

Для оценки правой части воспользуемся неравенством Коши—Буняковского и ε -неравенством (см. [12, с. 100]):

$$(F, D_{0t}^\alpha g) \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_0^2 + \varepsilon \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2, \quad \varepsilon > 0.$$

С учетом полученных неравенств из (20) получим:

$$\begin{aligned}
\frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l kg_x(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{g_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} dx + A \|D_{0t}^\alpha g_x\|_0^2 \leq \\
\leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_0^2 + \varepsilon \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2. \quad (21)
\end{aligned}$$

Проинтегрируем (21) по τ от 0 до t :

$$\begin{aligned}
\frac{A_1}{2} \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \int_0^t \|D_{0t}^\alpha g(x, \tau)\|_0^2 d\tau + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t d\tau \int_0^l kg_x(x, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \frac{g_x(x, \tau_1) d\tau_1}{(\tau-\tau_1)^\alpha} dx + \\
+ A \int_0^t \|D_{0t}^\alpha g_x(x, \tau)\|_0^2 d\tau \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_{2, Q_t}^2 + \varepsilon \int_0^t \|D_{0t}^\alpha g(x, \tau)\|_0^2 d\tau + \frac{A_1}{2} \|D_{0t}^\alpha g(x, 0)\|_0^2.
\end{aligned}$$

Предположим, что $k_t \leq 0$. Тогда неотрицательность интеграла в левой части последнего неравенства доказывается так же, как в [9, с. 43]. Усиливая это неравенство, получим:

$$A_1 \|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + 2A \|D_{0t}^\alpha g_x\|_{2, \Omega_t}^2 + 2\varepsilon_1 \|D_{0t}^\alpha g\|_{2, \Omega_t}^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_{2, \Omega_t}^2 + A_1 \|\nu(x)\|_0^2,$$

где

$$\|D_{0t}^\alpha g\|_{2,\Omega_t}^2 = \int_0^t \|D_{0t}^\alpha g(x, t)\|_0^2 d\tau, \quad \varepsilon_1 = 1 - \varepsilon.$$

Отсюда следует оценка

$$\|D_{0t}^\alpha g\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha g_x\|_{2,\Omega_t}^2 + \|D_{0t}^\alpha g\|_{2,\Omega_t}^2 \leq M(t) \left(\|F\|_{2,\Omega_t}^2 + \|\nu(x)\|_0^2 \right).$$

Возвращаясь к $u(x, t)$, получим (16), откуда следует единственность решения задачи 1. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архестова С. М., Шхануков-Лафишев М. Х. Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера—Лыкова с нелокальным условием // Изв. КБНЦ РАН. — 2012. — № 3. — С. 7–16.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.
3. Геккиева С. Х. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной по времени // Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. акад. наук. — 1994. — 1, № 1. — С. 16–19.
4. Геккиева С. Х. Первая краевая задача для уравнения влагопереноса Аллера—Лыкова с дробной по времени производной // Всеросс. конф. «Устойчивое развитие: проблемы, концепции, модели». — Нальчик, 2017. — С. 99–102.
5. Геккиева С. Х., Керевов М. А. Краевые задачи для обобщенного уравнения влагопереноса // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2018. — № 1 (21). — С. 21–32.
6. Керевов М. А. Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной / Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Нальчик, 2000.
7. Керевов М. А., Геккиева С. Х. Первая краевая задача для неоднородного нелокального волнового уравнения // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат. информ. — 2016. — № 4. — С. 76–86.
8. Лафишева М. М., Керевов М. А., Дышкова Р. В. Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера—Лыкова с нелокальным условием // Владикавказ. мат. ж. — 2017. — 19, № 1. — С. 50–58.
9. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
10. Нахушева В. А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. — М.: Наука, 2006.
11. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.
12. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989.
13. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв. — М.: Наука, 1976.
14. Шогенов В. Х., Кумыкова С. К., Шхануков-Лафишев М. Х. Обобщенное уравнение переноса и дробные производные // Докл. НАН Украины. — 1997. — № 12. — С. 47–54.
15. Agrawal O. P. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain // Nonlin. Dynam. — 2002. — 29. — P. 145–155.
16. Maseeva O. Kh. Uniqueness of solutions to Dirichlet problems for generalized Lavrent'ev–Bitsadze equations with a fractional derivative // Electron. J. Differ. Eqs. — 2017. — 2017. — P. 1–8.
17. Turmetov B. Kh., Torebek B. T. On solvability of some boundary value problems for a fractional analogue of the Helmholtz equation // New York J. Math. — 2014. — 20. — P. 1237–1251.

Геккиева Сакинат Хасановна

Институт прикладной математики и автоматизации,

Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук, Нальчик

E-mail: gekkieva_s@mail.ru

Керевов Марат Асланбиевич

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик

E-mail: kerefov@mail.ru