Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Кожанов, Краевые задачи для уравнений соболевского типа с необратимым оператором при старшей производной, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 167, 34–41

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-167-34-41>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 07:58:31

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 167 (2019). С. 34–41
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-167-34-41

УДК 517.946

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С НЕОБРАТИМЫМ ОПЕРАТОРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

© 2019 г. А. И. КОЖАНОВ

Аннотация. Работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений вида

$$(\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\Delta)u_{tt} - Bu_t - Cu = f(x, t),$$

в которых Δ — оператор Лапласа, действующий по пространственным переменным, B и C — также дифференциальные операторы второго порядка, действующие по пространственным переменным. Особенностью рассматриваемых уравнений является то, что какая-либо знакоопределенность функций $\alpha_0(t)$ и $\alpha_1(t)$ на интервале $(0, T)$ изменения временной переменной не требуется; в частности, оператор $\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\Delta$ в любых точках интервала $(0, T)$, в том числе и на любых строго внутренних отрезках, может быть необратимым. Для изучаемых задач доказаны теоремы существования и единственности регулярных (т.е. имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, необратимый операторный коэффициент, регулярное решение, существование, единственность.

BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR SOBOLEV-TYPE EQUATIONS WITH IRREVERSIBLE OPERATOR COEFFICIENT OF THE HIGHEST DERIVATIVES

© 2019 А. И. KOZHANOV

ABSTRACT. This paper is devoted to the study of the solvability of boundary-value problems for differential equations of the form

$$(\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\Delta)u_{tt} - Bu_t - Cu = f(x, t),$$

where Δ is the Laplace operator acting with respect to spatial variables and B and C are also second-order differential acting with respect to spatial variables. A feature of the equations considered is the condition that the functions $\alpha_0(t)$ and $\alpha_1(t)$ may not possess the fixed sign property on the range $(0, T)$ of the temporal variable; in particular, the operator $\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\Delta$ may be irreversible at any point of the interval $(0, T)$, including any strictly inner segments. For problems considered, we prove theorems on the existence and uniqueness of regular solutions (i.e., solutions possessing all generalized derivatives in the Sobolev sense).

Keywords and phrases: Sobolev-type equation, irreversible operator coefficient, regular solution, existence, uniqueness.

AMS Subject Classification: 35M20

1. Введение. Дифференциальные уравнения вида

$$Au_{tt} - Bu_t - Cu = f(x, t) \quad (1)$$

с линейными или нелинейными операторами A , B и C , действующими по пространственным переменным, называют в последнее время уравнениями соболевского типа (в другой терминологии — псевдогиперболическими уравнениями, или уравнениями составного типа). Подобные уравнения активно изучаются в последнее время (см., например, монографии [1, 2, 7, 10–17]); интерес к этим уравнениям объясняется, с одной стороны, потребностями общей теории краевых задач для дифференциальных уравнений, с другой — тем обстоятельством, что уравнения соболевского типа возникают во многих задачах математического моделирования, связанных с физическими, механическими, биологическими и т.д. процессами (см. [2, 5–7, 10, 13]).

Одним из направлений в теории уравнений соболевского типа указанного выше вида является направление, связанное с исследованием разрешимости для них задачи Коши и начально-краевых задач в случае, когда оператор A имеет ненулевое ядро (см. [12, 16, 17]). В настоящей работе будем изучать близкую, но в то же время новую ситуацию: оператор A может быть необратимым, но не при всех значениях переменной t . Для уравнений (1) с таким оператором A в работе будут представлены условия, обеспечивающие существование и единственность регулярных (имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение) решений первой начально-краевой задачи. В конце работы будут описаны некоторые обобщения и усиления полученных результатов.

2. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с границей Γ класса C^2 , Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, $S = \Gamma \times (0, T)$ — боковая граница цилиндра Q ; $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $b^{ij}(x, t)$, $b^i(x, t)$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_0(x, t)$, $c_1(x, t)$, $c_0(x, t)$ и $f(x, t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$, B и C — дифференциальные операторы второго порядка, действующие по пространственным переменным, причем оператор B есть оператор общего вида:

$$Bv = b^{ij}(x, t)v_{x_i x_j} + b^i(x, t)v_{x_i} + b_0(x, t)v,$$

а оператор C имеет для простоты специальный вид:

$$Cv = c_1(x, t)\Delta v + c_0(x, t)v$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n).

Рассмотрим следующую краевую задачу: *найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$(\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\Delta)u_{tt} - Bu_t - Cu = f(x, t) \quad (2)$$

и удовлетворяющую условиям

$$u(x, t)|_S = 0, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Введем в рассмотрение пространство

$$V = \left\{ v(x, t) : v(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)), \right. \\ \left. v_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)), \right. \\ \left. v_{tt}(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)) \right\}.$$

с нормой

$$\|v\|_V = \left(\|v\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega))}^2 + \|v_t\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega))}^2 + \|v_{tt}\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega))}^2 \right)^{1/2}.$$

Очевидно, что пространство V , снабженное этой нормой, является банаховым пространством.

3. Существование и единственность решений. Пусть $w(x)$ — функция из пространства $\dot{W}_2^1(\Omega)$. Имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} w^2(x) dx \leq d_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x) dx, \quad (5)$$

в котором число d_0 определяется лишь областью Ω (см. [4, 8]). Это неравенство и само число d_0 нам понадобятся ниже.

Обозначим через $F(x, t, \beta, \lambda_0, \lambda)$ следующую квадратичную форму, определенную при $(x, t) \in \overline{Q}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$F(x, t, \beta, \lambda_0, \lambda) = \left\{ \frac{1}{d_0} \left[\beta + \frac{1}{2} \alpha_1'(t) \right] + \frac{1}{2} b_{x_i}^i(x, t) - \frac{1}{2} b_{x_i x_j}^{ij}(x, t) - b_0(x, t) - \frac{1}{2} \alpha_0'(t) \right\} \lambda_0^2 + \\ + c_{1x_i}(x, t) \lambda_0 \lambda_i - \frac{1}{2} c_{1t}(x, t) |\lambda|^2. \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

- I. $b^{ij}(x, t) \in C^2(\overline{Q})$, $b^i(x, t) \in C^1(\overline{Q})$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_0(x, t) \in C(\overline{Q})$,
 $b^{ij}(x, t) = b^{ji}(x, t)$ при $(x, t) \in \overline{Q}$, $i, j = 1, \dots, n$,
 $b^{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \beta_0 |\xi|^2$, $\beta_0 > 0$, $(x, t) \in \overline{Q}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$;
- II. $c_1(x, t) \in C^1(\overline{Q})$, $c_0(x, t) \in C^1(\overline{Q})$, $\alpha_1(t) \in C^1([0, T])$, $\alpha_0(t) \in C^1([0, T])$;
- III. $c_{0t}(x, t) \geq 0$, $F(x, t, \beta_0, \lambda_0, \lambda) \geq \beta_1 \lambda_0^2$, $\beta_1 > 0$, $(x, t) \in \overline{Q}$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$;
- IV. $c_0(x, 0) < 0$ или $c_1(x, 0) > 0$ при $x \in \overline{\Omega}$;
- V. $c_1(x, T) \geq 0$, $c_0(x, T) = c_{01}(x) + c_{02}(x)$, $c_{01}(x) \leq 0$, $c_{02}(x) \geq 0$,
 $c_1(x, T) - d_0 c_{02}(x) \geq 0$ при $x \in \overline{\Omega}$;
- VI. $\alpha_0(0) > 0$ или $\alpha_1(0) < 0$;
- VII. $\alpha_1(T) \leq 0$, $\alpha_0(T) = \alpha_{01} + \alpha_{02}$, $\alpha_{01} \geq 0$, $\alpha_{02} \leq 0$,
 $\alpha_1(T) - d_0 \alpha_{02} \leq 0$.

Тогда краевая задача (2)–(4) не может иметь в пространстве V более одного решения.

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — решение краевой задачи (2)–(4) в случае $f(x, t) \equiv 0$, принадлежащее пространству V . Рассмотрим равенство

$$\int_Q \left[(\alpha_0(t) + \alpha_1(t) \Delta) u_{tt} - B u_t - C u \right] u_t dx dt = 0.$$

После интегрирования по частям это равенство преобразуется в следующее:

$$\int_Q \left[b^{ij} u_{x_i t} u_{x_j t} + \frac{1}{2} \alpha_1' \sum_{i=1}^n u_{x_i t}^2 \right] dx dt + \\ + \int_Q \left\{ \left[\frac{1}{2} b_{x_i}^i - \frac{1}{2} b_{x_i x_j}^{ij} - b_0 - \frac{1}{2} \alpha_0' \right] u_t^2 - \frac{1}{2} c_{1t} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + c_{1x_i} u_{x_i} u_t \right\} dx dt + \\ + \frac{1}{2} \int_Q c_{0t} u^2 dx dt + \frac{\alpha_0(T)}{2} \int_{\Omega} u_t^2(x, T) dx - \frac{\alpha_1(T)}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t}^2(x, T) dx + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} c_1(x, T) u_{x_i}^2(x, T) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} c_0(x, T) u^2(x, T) dx = 0. \quad (7)$$

Используя далее условие эллиптичности оператора B , применяя неравенство (5), условия III, V и VII, нетрудно получить, что следствием равенства (7) будет неравенство

$$\beta_1 \int_Q u_t^2 dx dt \leq 0.$$

Из этого неравенства и из условия (4) вытекает, что $u(x, t)$ есть тождественно нулевая в Q функция. А это и означает, что краевая задача (2)–(4) не может иметь в пространстве V более одного решения. $\square$

Разрешимость краевой задачи (2)–(4) в пространстве V будет доказана с помощью метода регуляризации.

Пусть ε — положительное число. Рассмотрим следующую краевую задачу: *найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$\varepsilon \Delta u_{ttt} + (\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\Delta)u_{tt} - Bu_t - Cu = f(x, t) \quad (8)$$

и удовлетворяющую условиям (3) и (4), а также условию

$$u_{tt}(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (9)$$

Введем в рассмотрение пространство

$$\tilde{V} = \left\{ v(x, t) : v(x, t) \in V, v_{ttt}(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)) \right\}.$$

Разрешимость краевой задачи (8), (3), (4), (9) в пространстве $\tilde{V}$ при фиксированном ε будет установлена с помощью метода продолжения по параметру (см. [9]). Поскольку и для применения теоремы о методе продолжения по параметру, и для осуществления предельного перехода в уравнении (8) необходимы будут априорные оценки, установим вначале их наличие.

Утверждение 1. *Пусть выполняются условия I–VII, а также условие*

$$\text{VIII. } \beta_0 + \frac{1}{2}\alpha'(t) > 0 \text{ при } t \in [0, T].$$

Тогда для решений $u(x, t)$ краевой задачи (8), (3), (4), (9), принадлежащих пространству $\tilde{V}$, будет выполняться оценка

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i tt}^2 dx dt + \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i t}^2 dx dt \leq N_1 \int_Q f^2 dx dt, \quad (10)$$

в которой постоянная N_1 определяется функциями $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $b^{ij}(x, t)$, $b^i(x, t)$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_0(x, t)$, $c_1(x, t)$ и $c_0(x, t)$, а также областью Ω .

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — решение краевой задачи (8), (3), (4), (9), принадлежащее пространству $\tilde{V}$. Рассмотрим равенство

$$\int_Q \left\{ \varepsilon \Delta u_{ttt} + (\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\Delta)u_{tt} - Bu_t - Cu \right\} u_t dx dt = \int_Q f u_t dx dt. \quad (11)$$

Интегрируя по частям, применяя условия III, V и VII, неравенство (5), а также неравенство Юнга, нетрудно показать, что следствием равенства (11) будет оценка

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i tt}^2 dx dt + \int_Q u_t^2 dx dt \leq N'_1 \int_Q f^2 dx dt, \quad (12)$$

в которой постоянная N'_1 определяется функциями $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $b^{ij}(x, t)$, $b^i(x, t)$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_0(x, t)$, $c_1(x, t)$ и $c_0(x, t)$, а также областью Ω .

Вторично рассматривая равенство (11), но теперь применяя условие VIII и учитывая оценку (12), получим, что для решений $u(x, t)$ краевой задачи (8), (3), (4), (9), принадлежащих пространству $\tilde{V}$, будет выполнена оценка

$$\sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i t}^2 dx dt \leq N_1'' \int_Q f^2 dx dt, \quad (13)$$

в которой постоянная N_1'' вновь определяется функциями $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $b^{ij}(x, t)$, $b^i(x, t)$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_0(x, t)$, $c_1(x, t)$ и $c_0(x, t)$, а также областью Ω .

Из оценок (12) и (13) и вытекает требуемая оценка (10). Утверждение доказано. $\square$

Положим

$$B(x, t) = \frac{1}{d_0} \left[\beta_0 - \frac{1}{2} \alpha_1'(t) \right] + \frac{1}{2} b_{x_i}^i(x, t) - \frac{1}{2} b_{x_i x_j}^{ij}(x, t) - b_0(x, t) + \frac{1}{2} \alpha_0'(t).$$

Утверждение 2. Пусть выполняются условия I–V, VII и VIII, условие

IX. $B(x, t) \geq B_0 > 0$ при $(x, t) \in \bar{Q}$, $\beta_0 - \frac{1}{2} \alpha_1'(t)$ при $t \in [0, T]$,

а также одно из следующих условий:

X. $\alpha_0(0) > 0$, $\alpha_1(0) \leq 0$;

XI. $\alpha_1(0) < 0$, $\alpha_0(0) = \alpha_0^1 + \alpha_0^2$, $\alpha_0^1 \geq 0$, $\alpha_1(0) - d_0 \alpha_0^2 \leq 0$.

Тогда для решений $u(x, t)$ краевой задачи (8), (3), (4), (9), принадлежащих пространству $\tilde{V}$, будет выполняться оценка

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i t t t}^2 dx dt + \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i t t}^2 dx dt \leq N_2 \int_Q f^2 dx dt, \quad (14)$$

в которой постоянная N_2 определяется функциями $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $b^{ij}(x, t)$, $b^i(x, t)$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_0(x, t)$, $c_1(x, t)$ и $c_0(x, t)$, областью Ω , а также числом ε .

Доказательство. Для решений $u(x, t)$ краевой задачи (8), (3), (4), (9), принадлежащее пространству $\tilde{V}$, выполняется равенство

$$- \int_Q \left\{ \varepsilon \Delta u_{t t t} + (\alpha_0(t) + \alpha_1(t) \Delta) u_{t t} - B u_t - C u \right\} u_{t t t} dx dt = - \int_Q f u_{t t t} dx dt. \quad (15)$$

Это равенство после интегрирования по частям преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i t t t}^2 dx dt + \int_Q \left\{ \left[b^{ij} u_{x_i t t} u_{x_j t t} - \frac{1}{2} \alpha_1' \sum_{i=1}^n u_{x_i t t}^2 \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{1}{2} b_{x_i}^i - \frac{1}{2} b_{x_i x_j}^{ij} - b_0 + \frac{1}{2} \alpha_0' \right] u_{t t}^2 \right\} dx dt + \frac{\alpha_0(0)}{2} \int_{\Omega} u_{t t}^2(x, 0) dx - \frac{\alpha_1(0)}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t t}^2(x, 0) dx = \\ & = \int_Q \left\{ b_t^i u_{x_i t} u_{t t} - b_t^{ij} u_{x_i t} u_{x_j t t} - b_{x_j t}^{ij} u_{x_i t} u_{t t} + b_{0 t} u_t u_{t t} + c_1 u_{x_i t} u_{x_i t t} + c_{1 x_i} u_{x_i t} u_{t t} + \right. \\ & \quad \left. + c_{1 t} u_{x_i} u_{x_i t t} + c_{1 x_i t} u_{x_i} u_{t t} - c_0 u_t u_{t t} - c_{0 t} u u_{t t} \right\} dx dt - \int_Q f u_{t t t} dx dt. \quad (16) \end{aligned}$$

Поскольку условия I–VIII автоматически выполняются, то для решения $u(x, t)$ имеет место оценка (10). Применяя к правой части равенства (16) неравенство Юнга, используя условия X и IX, нетрудно получить требуемую оценку (14). Утверждение доказано. $\square$

Утверждение 3. Пусть выполняются условия I–V, VII–IX, а также одно из условий X или XI. Тогда для решений $u(x, t)$ краевой задачи (8), (3), (4), (9), принадлежащих пространству $\tilde{V}$, будет выполняться оценка

$$\varepsilon \int_Q (\Delta u_{tt})^2 dx dt + \sum_{i,j=1}^n \int_Q u_{x_i x_j t}^2 dx dt \leq N_3 \int_Q f^2 dx dt, \quad (17)$$

в которой постоянная N_3 определяется функциями $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $b^{ij}(x, t)$, $b^i(x, t)$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_0(x, t)$, $c_1(x, t)$ и $c_0(x, t)$, областью Ω , а также числом ε .

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$- \int_Q \left\{ \varepsilon \Delta u_{ttt} + (\alpha_0(t) + \alpha_1(t) \Delta) u_{tt} - B u_t - C u \right\} \Delta u_t dx dt = - \int_Q f \Delta u_t dx dt. \quad (18)$$

Это равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_Q (\Delta u_{tt})^2 dx dt + \int_Q \left(B u_t + \frac{\alpha'_1}{2} \Delta u_t \right) \Delta u_t dx dt - \frac{1}{2} \int_Q c_{1t} (\Delta u)^2 dx dt + \frac{\alpha_0(T)}{2} \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i t}^2(x, T) dx - \\ - \frac{\alpha_1(T)}{2} \int_\Omega [\Delta u_t(x, T)]^2 dx = - \int_Q c_0 u \Delta u_t dx dt - \int_Q f \Delta u_t dx dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Оператор $B + \frac{1}{2} \alpha'_1$ эллиптичен. Второе основное неравенство для эллиптических операторов (точнее говоря, второе основное неравенство для пары эллиптических операторов; см. [3, 4]) вместе с (10) означают, что выполняется оценка

$$\sum_{i,j=1}^n \int_Q u_{x_i x_j t}^2 dx dt \leq K_1 \int_Q \left(B u_t + \frac{\alpha'_1}{2} \Delta u_t \right) \Delta u_t dx dt + K_2 \quad (20)$$

с положительными постоянными K_1 и K_2 , определяемыми лишь коэффициентами $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $b^{ij}(x, t)$, $b^i(x, t)$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_0(x, t)$, $c_1(x, t)$ и $c_0(x, t)$, а также областью Ω . Из этой оценки из того, что остальные слагаемые в левой части (19) неотрицательны, все слагаемые в правой части (19) с помощью неравенства Юнга подчиняются левой части неравенства (20), и следует, что выполняется требуемая оценка (17). Утверждение доказано. $\square$

Утверждение 4. Пусть выполняются условия I–V, VII–IX, а также одно из условий X или XI. Тогда для решений $u(x, t)$ краевой задачи (8), (3), (4), (9), принадлежащих пространству $\tilde{V}$, будет выполняться оценка

$$\varepsilon \int_Q (\Delta u_{ttt})^2 dx dt + \sum_{i,j=1}^n \int_Q u_{x_i x_j tt}^2 dx dt \leq N_4 \int_Q f^2 dx dt, \quad (21)$$

в которой постоянная N_4 определяется функциями $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $b^{ij}(x, t)$, $b^i(x, t)$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_0(x, t)$, $c_1(x, t)$ и $c_0(x, t)$, областью Ω и числом ε .

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — решение краевой задачи (8), (3), (4), (9), принадлежащее пространству $\tilde{V}$. Рассмотрим равенство

$$\int_Q \left\{ \varepsilon \Delta u_{ttt} + (\alpha_0(t) + \alpha_1(t) \Delta) u_{tt} - B u_t - C u \right\} \Delta u_{ttt} dx dt = \int_Q f \Delta u_{ttt} dx dt. \quad (22)$$

Преобразуя данное равенство с помощью интегрирования по частям, учитывая далее эллиптичность оператора $B + \frac{1}{2} \alpha'_1$ и вновь применяя второе основное неравенство для пары эллиптических операторов, получим требуемую оценку (21). Утверждение доказано. $\square$

Утверждение 5. Пусть выполняются условия I–V, VII–IX, а также одно из условий X или XI. Тогда для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$ краевая задача (8), (3), (4), (9) при фиксированном ε имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $\tilde{V}$.

Доказательство. Пусть λ — число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим семейство следующих краевых задач: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$\varepsilon \Delta u_{ttt} + \lambda \left[(\alpha_0(t) + \alpha_1(t) \Delta) \Delta u_{tt} - B u_t - C u \right] = f(x, t) \quad (23)$$

и удовлетворяющую условиям (3), (4), (9).

Очевидно, что краевая задача (8), (3), (4), (9) имеет решение, принадлежащее пространству $\tilde{V}$. Далее, из утверждений 1–4 следует, что для всевозможных решений $u(x, t)$ краевой задачи (8), (3), (4), (9) выполняется равномерная по λ априорная оценка

$$\|u\|_{\tilde{V}} \leq R_0.$$

Согласно теореме о методе продолжения по параметру (см. [9, гл. III, § 14]), из разрешимости в пространстве $\tilde{V}$ краевой задачи (8), (3), (4), (9) и из этой оценки следует, что краевая задача (8), (3), (4), (9) будет разрешима в пространстве $\tilde{V}$ для всех чисел $\lambda \in [0, 1]$, в том числе и для $\lambda = 1$, что и требовалось. Утверждение доказано. $\square$

Все вспомогательные утверждения доказаны, перейдем к доказательству основной теоремы (теоремы существования).

Теорема 2. Пусть выполняются условия I–V, VII–IX, а также одно из условий X или XI. Тогда для любой функции $f(x, t)$, удовлетворяющей условиям $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t) \in L_2(Q)$, $f(x, 0) = 0$ при $x \in \bar{\Omega}$, краевая задача (2)–(4) имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V .

Доказательство. Пусть $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ — такая последовательность положительных чисел, что $\varepsilon_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Обозначим через $u_m(x, t)$ решение краевой задачи (8), (3), (4), (9). Повторяя для семейства $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^{\infty}$ доказательство оценок (11), (14), (17) и (20), но при этом в правых частях равенств (15) и (22) выполняя интегрирование по частям по переменной t , нетрудно получить оценку

$$\varepsilon_m \int_Q (\Delta u_{mttt})^2 dx dt + \|u_m\|_V^2 \leq N_0 \int_Q (f^2 + f_t^2) dx dt, \quad (24)$$

в которой постоянная N_0 определяется функциями $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $b^{ij}(x, t)$, $b^i(x, t)$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_0(x, t)$, $c_1(x, t)$ и $c_0(x, t)$, а также областью Ω . Из оценки (24) и свойства рефлексивности гильбертова пространства (см. [9]) следует, что существуют такая последовательность $\{\varepsilon_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$, что для нее и для соответствующих функций $\{u_{m_k}(x, t)\}_{k=1}^{\infty}$ имеют место следующие сходимости при $k \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{m_k} \Delta u_{m_k ttt}(x, t) &\rightarrow 0 \text{ слабо в } L_2(Q), \\ u_{m_k}(x, t) &\rightarrow u(x, t) \text{ слабо в } V, \end{aligned}$$

причем предельная функция $u(x, t)$ вновь будет принадлежать пространству V . Очевидно, что предельная функция $u(x, t)$ будет искомым решением краевой задачи (2)–(4). $\square$

4. Замечания. 1. Очевидно, что в уравнении (2) оператор Лапласа можно заменить более общим оператором, например, эллиптическим оператором A_0 второго порядка, действие которого определяется равенством

$$A_0 v = \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x) v_{x_j}) + a_0(x) v.$$

2. Функции α_0 и α_1 в уравнении (2) могут зависеть и от переменной x , оператор C может быть общим дифференциальным оператором второго порядка, действующим по пространственным переменным. Такие функции α_0 и α_1 и оператор C не приводят к каким-либо принципиальным трудностям, но громоздкость выкладок и условий при этом существенно увеличатся.

3. Простейшим примером уравнений, подобных уравнению (2), но для которых не выполняются условия теорем 1 и 2 и при этом краевая задача (2)–(4) будет некорректной, является уравнение

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} = 0,$$

в котором λ — собственное число задачи Дирихле для оператора Лапласа:

$$\Delta w(x) = \lambda w(x), \quad w(x)|_{\Gamma} = 0,$$

где $w(x)$ — соответствующая собственная функция.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Копачевский Н. Д.* Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве. — Симферополь: Таврический национальный университет, 2012.
2. *Корпусов М. О.* Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. — М.: Либроком, 2011.
3. *Ладыженская О. А.* Об интегральных оценках сходимости приближенных методов и решениях в функционалах для линейных эллиптических операторов // Вестн. ЛГУ. Сер. мат. мех. астрон. — 1958. — 7, № 2. — С. 60–69.
4. *Ладыженская О. А., Уралцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973.
5. *Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н.* Нелинейные уравнения переменного типа. — Новосибирск: Наука, 1983.
6. *Маслов В. П., Мосолов П. П.* Уравнения одномерного баротропного газа. — М.: Наука, 1990.
7. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. — М.: Физматлит, 2007.
8. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.
9. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.
10. *Умаров Х. Г.* Полугруппы операторов и точные решения задач анизотропной фильтрации. — М.: Физматлит, 2009.
11. *Demidenko G. V., Uspenskii S. V.* Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to Highest Order Derivatives. — New York: Marcel Dekker, 2003.
12. *Favini A., Yagi A.* Degenerate Differential Equations in Banach Spaces. — New York: Marcel Dekker, 1999.
13. *Hayashi N., Kaikina E. I., Naumkin P. I., Shismarev I. A.* Asymptotics for Dissipative Nonlinear Equation. — Berlin: Springer-Verlag, 2006.
14. *Kozhanov A. I.* Composite-Type Equations and Inverse Problems. — Utrecht: VSP, 1999.
15. *Kozlov V., Maz'ya V.* Differential Equation with Operator Coefficients with Applications to Boundary-Value Problems for Partial Differential Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1999.
16. *Pyatkov S. G.* Operator Theory Nonclassical Problems. — Utrecht: VSP, 2003.
17. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev-Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — Utrecht: VSP, 2003.

Кожанов Александр Иванович

Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск

E-mail: kozhanov@math.nsc.ru