Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Псху, Функция Грина первой краевой задачи для дробного диффузионно-волнового уравнения в многомерной прямоугольной области, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 167, 52–61

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-167-52-61>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:27:26

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 167 (2019). С. 52–61
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-167-52-61

УДК 517.956

ФУНКЦИЯ ГРИНА ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДРОБНОГО ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В МНОГОМЕРНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

© 2019 г. А. В. ПСХУ

Аннотация. В работе построены функции Грина первой краевой задачи для дробного диффузионно-волнового уравнения в многомерных (ограниченных и неограниченных) гиперпрямоугольных областях.

Ключевые слова: диффузионно-волновое уравнение, функция Грина, дробная производная, оператор Джрбашяна—Нерсесяна, краевая задача, условие А. Н. Тихонова.

GREEN FUNCTION OF THE FIRST BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE FRACTIONAL DIFFUSION WAVE EQUATION IN A MULTIDIMENSIONAL RECTANGULAR DOMAIN

© 2019 А. V. PSKHU

ABSTRACT. In this paper, the Green functions of the first boundary-value problem for the fractional diffusion wave equation in multidimensional (bounded and unbounded) hyper-rectangular domains are constructed.

Keywords and phrases: diffusion wave equation, Green function, fractional derivative, Dzhrbashyan–Nersesyan operator, boundary-value problem, Tikhonov condition.

AMS Subject Classification: 35R11, 35K20

1. **Введение.** Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma} - \Delta_x \right) u(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

где $\partial^\sigma / \partial y^\sigma$ — дробная производная порядка σ по переменной y с началом в точке $y = 0$; $\sigma \in (0, 2)$;

$$\Delta_x = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

— оператор Лапласа по переменной x , $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S \subset \mathbb{R}^n$.

Уравнение (1) является уравнением диффузии при $\sigma = 1$ и превращается в волновое уравнение при $\sigma = 2$. Поэтому при $\sigma \in (0, 2)$ уравнение (1) принято называть *диффузионно-волновым уравнением*. Это уравнение интенсивно исследовалось в последние десятилетия. Укажем в этой связи работы [2, 4, 6–8, 14, 16–19, 21, 26, 30], содержащие основные подходы к исследованию дробных диффузионных и диффузионно-волновых уравнений и более полную библиографию.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18–51–45005).

Укажем, также, монографии [5, 9, 12, 20, 23–25], посвященные теории дробного исчисления и дифференциальных уравнений дробного порядка.

Цель данной работы — построить функцию Грина краевой задачи для уравнения (1) в многомерной цилиндрической области, в основании которой лежит гиперпрямоугольная (ограниченная или неограниченная) область.

В одномерном случае функции Грина первой, второй и смешанных краевых задач были построены в [10, 11]. Укажем также работу [1], в которой строится решение первой краевой задачи для уравнения диффузии в многомерной области.

Отметим, что интерес к дифференциальным уравнениям дробного порядка стимулируется, также, различными приложениями в физике и механике (см. [5, 13, 15, 22, 27]).

2. Дробное дифференцирование. Оператор Джрбашяна—Нерсесяна порядка σ с началом в точке $y = \eta$, ассоциированный с последовательностью

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}, \quad 0 < \gamma_k \leq 1, \quad \sigma = \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_m - 1 \quad (2)$$

(см. [3]) определяется соотношением

$$\frac{\partial^\sigma}{\partial(y-\eta)^\sigma} = D_{\eta y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}} \equiv D_{\eta y}^{\gamma_m-1} D_{\eta y}^{\gamma_{m-1}} \dots D_{\eta y}^{\gamma_0},$$

где $D_{\eta y}^{\gamma_m-1}$ и $D_{\eta y}^{\gamma_k}$ — дробные интеграл и производные Римана—Лиувилля. Оператор дробного интегро-дифференцирования Римана—Лиувилля с началом в точке $y = \eta$ порядка $\gamma \in \mathbb{R}$ определяется равенствами

$$D_{\eta y}^\gamma h(y) = \frac{\text{sign}(y-\eta)}{\Gamma(-\gamma)} \int_\eta^y |y-t|^{-\gamma-1} h(t) dt, \quad \gamma < 0; \quad D_{\eta y}^0 h(y) = h(y);$$

$$D_{\eta y}^\gamma = \text{sign}^n(y-\eta) \frac{\partial^p}{\partial y^p} D_{\eta y}^{\gamma-p}, \quad p-1 < \gamma \leq p, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Несложно заметить, что производная Римана—Лиувилля $D_{\eta y}^\sigma$ и производная Капуто $\partial_{\eta y}^\sigma$ являются частными случаями оператора Джрбашяна—Нерсесяна:

$$D_{\eta y}^\sigma = D_{\eta y}^{\{\sigma-m+1, 1, \dots, 1\}}, \quad \partial_{\eta y}^\sigma = D_{\eta y}^{\{1, 1, \dots, 1, \sigma-m+1\}}.$$

3. Область. Уравнение (1) будем рассматривать в цилиндрической области Ω , имеющей основанием n -мерной гиперпрямоугольник, каждое из ребер которого есть отрезок, луч или прямая, а именно,

$$\Omega = S \times (0, T),$$

где

$$S = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n), \quad -\infty \leq a_k < b_k \leq \infty, \quad k = \overline{1, n}.$$

Таким образом, цилиндрическая область Ω , как и ее основание S , определяется упорядоченным набором пар $\{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$; при этом некоторые из a_k и b_k могут принимать значения $-\infty$ и $+\infty$. Свяжем с этим набором подмножества K_{ij} ($i, j = 0, 1$) множества $\{1, 2, \dots, n\}$, определяемые следующим образом:

$$K_{00} = \{k : a_k = -\infty, b_k = \infty\}, \quad K_{01} = \{k : a_k = -\infty, b_k < \infty\}, \\ K_{10} = \{k : -\infty < a_k, b_k = \infty\}, \quad K_{11} = \{k : -\infty < a_k, b_k < \infty\},$$

т.е. K_{00} — множество всех $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, для которых вся ось Ox_k является ребром прямоугольника S . Множества K_{01} и K_{10} содержат все k , для которых ребро прямоугольника S , лежащее на оси Ox_k , есть луч. Наконец, если $k \in K_{11}$, то соответствующее ребро является отрезком. Очевидно, что эти множества попарно не пересекаются, а их объединение дает $\{1, 2, \dots, n\}$.

Для всех $k \in K_{10} \cup K_{11}$ обозначим через S_k^a гипергрань прямоугольника S , лежащую в гиперплоскости $x_k = a_k$, т.е. S_k^a — множество внутренних точек (в топологии $\mathbb{R}^{n-1}$) множества $\partial S \cap \{x_k = a_k\}$ (как обычно, ∂S обозначает границу множества S). В случае, если $k \in K_{01} \cup K_{11}$, то S_k^b — внутренние точки множества $\partial S \cap \{x_k = b_k\}$.

4. Постановка задачи. Для точки $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, через $x_{(k)}$ будем обозначать ее проекцию на $\mathbb{R}^{n-1}$ вдоль x_k : $x_{(k)} = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, и

$$S_{(k)} = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_{k-1}, b_{k-1}) \times (a_{k+1}, b_{k+1}) \times \dots \times (a_n, b_n).$$

Рассматривается следующая задача: найти регулярное решение уравнения

$$\left(D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} - \Delta_x \right) u(x, y) = f(x, y) \quad (3)$$

в области Ω , удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_j\}} u(x, y) = \tau_j(x), \quad x \in S, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (4)$$

и краевым условиям

$$u(x, y)|_{x_k=a_k} = \varphi_k(x_{(k)}, y), \quad k \in K_{10} \cup K_{11}, \quad x_{(k)} \in S_{(k)}, \quad y \in (0, T), \quad (5)$$

$$u(x, y)|_{x_k=b_k} = \psi_k(x_{(k)}, y), \quad k \in K_{01} \cup K_{11}, \quad x_{(k)} \in S_{(k)}, \quad y \in (0, T). \quad (6)$$

Под *регулярным решением* уравнения (3) в области Ω мы подразумеваем такую функцию $u = u(x, y)$, что $y^{1-\mu} u(x, y) \in C(\overline{\Omega})$, $D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_j\}} u(x, y) \in C(\Omega \cup \{x \in S, y = 0\})$, $j = \overline{1, m-1}$; в области Ω функция $u(x, y)$ имеет непрерывные производные до второго порядка по каждой из переменных x_k , $k = \overline{1, n}$, а функции $D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_j\}} u(x, y)$, $j = \overline{1, m-1}$, непрерывно дифференцируемы по y ; $D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}} u(x, y) \in C(\Omega)$; $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (3) во всех точках области Ω .

Заметим, что для $k \in K_{11}$ область S ограничена с двух сторон гипергранями S_k^a и S_k^b , перпендикулярными оси Ox_k . В этом случае на каждой гипергранни задаются условия, соответственно (5) и (6). Если $k \in K_{10} \cup K_{01}$, то область S ограничена только с одной стороны вдоль x_k , и для этих индексов условия задаются либо на S_k^a , либо на S_k^b (одно из условий (5) или (6)). Вдоль осей Ox_k , для которых $k \in K_{00}$, множество S неограниченно, и поэтому для этих индексов краевые условия отсутствуют. В частности, если множество $K_{10} \cup K_{11}$ ($K_{01} \cup K_{11}$) пусто, то условия (6) (условия (5)) не накладываются. Если же $K_{10} \cup K_{01} \cup K_{11} = \emptyset$, то задача ставится без условий (5) и (6).

5. Вспомогательные утверждения. Для произвольной функции $g = g(t)$, заданной на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, введем в рассмотрение оператор

$$\mathbf{J}^{a,b} g = (\mathbf{J}^{a,b} g)(s, \theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g(s - \theta + 2j(b-a)) - g(s + \theta - 2a + 2j(b-a)). \quad (7)$$

Относительно переменных и параметров s, θ, a и b полагаем

$$a < s, \theta < b, \quad s \neq \theta; \quad -\infty \leq a < b \leq \infty.$$

В случае, когда один или оба из параметров a и b принимают бесконечное значение, оператор (7) доопределяется следующим образом:

$$\mathbf{J}^{a,b} g = \begin{cases} g(s - \theta) - g(s + \theta - 2a), & \text{если } -\infty < a, b = \infty, \\ g(s - \theta) - g(s + \theta - 2b), & \text{если } a = -\infty, b < \infty, \\ g(s - \theta), & \text{если } a = -\infty, b = \infty. \end{cases} \quad (8)$$

Предполагается, что поведение функции $g(t)$ при $|t| \rightarrow \infty$ обеспечивает сходимость ряда в (7). Для наших целей достаточно потребовать существование предела

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |t|^\gamma g(t) = 0 \quad (9)$$

для некоторого $\gamma > 1$. Если условие (9) выполнено, то ряд в (7), очевидно, сходится.

Далее для удобства будем писать $g(t) \in B_\gamma$, если функция $g(t)$ удовлетворяет условию (9). Также в дальнейшем буквой C будем обозначать положительные константы, вообще говоря, разные в разных случаях, указывая в случае необходимости параметры, от которых они могут зависеть: $C = C(\alpha, \beta, \dots)$.

Лемма 1. Пусть $g(t) \in C^p(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $g^{(i)}(t) \in B_\gamma$, $i = \overline{0, p}$, $\gamma > 1$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда справедливы соотношения

$$(\mathbf{J}^{a,b}g)(s, \theta) = g(s - \theta) + H(s, \theta),$$

где

$$H(s, \theta) \in C^p([a, b] \times (a, b)) \cap C^p((a, b) \times [a, b]); \quad (10)$$

$$\frac{\partial^i}{\partial s^i}(\mathbf{J}^{a,b}g)(s, \theta) = (\mathbf{J}^{a,b}g^{(i)})(s, \theta), \quad i \leq p; \quad (11)$$

$$\frac{\partial^{2i}}{\partial \theta^{2i}}(\mathbf{J}^{a,b}g)(s, \theta) = (\mathbf{J}^{a,b}g^{(2i)})(s, \theta), \quad 2i \leq p. \quad (12)$$

Доказательство. Если $a = -\infty$ или $b = \infty$, то включение (10), очевидно, следует из определения (8). Рассмотрим случай, когда $a > -\infty$ и $b < \infty$. Будем считать, что s и θ могут изменяться в промежутках

$$a + \delta_1 \leq s \leq b - \delta_1, \quad a + \delta_2 \leq \theta \leq b - \delta_2, \quad \text{где } \delta_1, \delta_2 \geq 0, \quad \delta = \max\{\delta_1, \delta_2\} > 0.$$

Для $j \neq 0$ выражение $|s - \theta + 2j(b - a)|$ можно записать в виде

$$|s - \theta + 2j(b - a)| = (2|j| - 1)(b - a) + Q,$$

где

$$Q = (b - a) + (s - \theta) \operatorname{sign} j \geq b - \max\{s, \theta\} + \min\{s, \theta\} - a > \delta.$$

Так как $\gamma > 1$, отсюда следует, что

$$|s - \theta + 2j(b - a)|^\gamma \geq (2|j| - 1)^\gamma (b - a)^\gamma + \delta^\gamma, \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13)$$

Аналогично преобразуем $|s + \theta - 2a + 2j(b - a)|$. Учитывая, что $s + \theta - 2a > \delta$, для $j \geq 0$ имеем

$$|s + \theta - 2a + 2j(b - a)|^\gamma \geq [2j(b - a)]^\gamma + \delta^\gamma, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Если же $j < 0$, то

$$|s + \theta - 2a + 2j(b - a)| = (2|j| - 1)(b - a) + 2b - s - \theta \geq (2|j| - 1)(b - a) + \delta,$$

т.е.

$$|s + \theta - 2a + 2j(b - a)|^\gamma \geq (2|j| - 1)^\gamma (b - a)^\gamma + \delta^\gamma, \quad j = -1, -2, \dots \quad (15)$$

Из неравенств (13), (14) и (15), в силу (9), следует, что

$$\left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} [g(s - \theta + 2j(b - a)) - g(s + \theta - 2a + 2j(b - a))] - g(s - \theta) \right| \leq C \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{[i(b - a)]^\gamma + \delta^\gamma}.$$

Это означает, что данный ряд сходится равномерно относительно любого замкнутого подмножества одного из множеств $(a, b) \times [a, b]$ или $[a, b] \times (a, b)$. Отсюда следует включение (10) при $p = 0$.

Далее, условие (9) для $g^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, \dots, p$, гарантирует возможность дифференцировать под знаком суммы в (7). Отсюда следует справедливость (10) для $p > 0$, а формулы (11) и (12) получаются почленным дифференцированием в (7) и (8). $\square$

Лемма 2. Пусть $g(t) \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $g(t) \in B_\gamma$, $\gamma > 1$. Тогда

$$\lim_{\theta \rightarrow a+} (\mathbf{J}^{a,b}g)(s, \theta) = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow b-} (\mathbf{J}^{a,b}g)(s, \theta) = 0, \quad s \in (a, b). \quad (16)$$

Доказательство. Если $a = -\infty$ или $b = \infty$, то утверждение леммы следует непосредственно из (8) и (9). В случае, когда оба параметра a и b конечны, как было показано выше (см. доказательство леммы 1), условие (9) обеспечивает равномерную сходимость ряда в (7) на замкнутых подмножествах $(a, b) \times [a, b]$ или $[a, b] \times (a, b)$. Поэтому можно перейти к пределу под знаком суммы, т.е.

$$\lim_{\theta \rightarrow a} \mathbf{J}^{a,b}g = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lim_{\theta \rightarrow a} [g(s - \theta + 2j(b - a)) - g(s + \theta - 2a + 2j(b - a))] = 0.$$

Также в случае $\theta \rightarrow b$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow b} \mathbf{J}^{a,b} g &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} g(s-b+2j(b-a)) - g(s+b-2a+2j(b-a)) = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} g(s-b+2j(b-a)) - g(s-b+2(j+1)(b-a)) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Далее, для функции $g_\lambda(t)$, зависящей от параметра $\lambda \in \Lambda$, будем писать $g_\lambda(t) \in B_\gamma(\Lambda)$, если существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |t|^\gamma g_\lambda(t) = 0,$$

равномерный относительно Λ .

Лемма 3. Пусть $g_\lambda(t) \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, функция $g_\lambda(t)$ зависит от параметра $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$ и $g_\lambda(t) \in B_\gamma(\Lambda)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) если для любого $t \neq 0$ существует предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} g_\lambda(t) = h(t),$$

то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} (\mathbf{J}^{a,b} g_\lambda)(s, \theta) = (\mathbf{J}^{a,b} h)(s, \theta); \quad (17)$$

(2) если $g_\lambda(t)$ интегрируема на $(\lambda_0, \lambda_1) \subset \Lambda$ как функция λ при каждом $t \neq 0$, то

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} (\mathbf{J}^{a,b} g_\lambda)(s, \theta) d\lambda = \left(\mathbf{J}^{a,b} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} g_\lambda d\lambda \right) (s, \theta); \quad (18)$$

(3) если $g_\lambda(t)$ дифференцируема по λ при $t \neq 0$ и $\partial g_\lambda(t)/\partial \lambda \in B_\gamma$, то

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (\mathbf{J}^{a,b} g_\lambda)(s, \theta) = \left(\mathbf{J}^{a,b} \frac{\partial}{\partial \lambda} g_\lambda \right) (s, \theta). \quad (19)$$

При этом сходимость в (17) и сходимость интеграла в (18) являются равномерными относительно s и θ из замкнутых подмножеств множеств

$$(a, b) \times [a, b] \setminus \{s = \theta\} \quad \text{или} \quad [a, b] \times (a, b) \setminus \{s = \theta\}.$$

Доказательство. Если $a = \infty$ или $b = \infty$, то утверждение леммы следует из (8). В случае, когда a и b конечны, так же, как и при доказательстве леммы 1, можно показать, что ряд, определяющий $\mathbf{J}^{a,b} g_\lambda$ (за вычетом слагаемого $g_\lambda(s - \theta)$), сходится равномерно на замкнутых подмножествах множеств $(a, b) \times [a, b] \times \Lambda$ или $[a, b] \times (a, b) \times \Lambda$. Это обеспечивает возможность перехода к пределу под знаком суммы и почленного интегрирования соответствующих рядов и доказывает (17) и (18). Кроме того, вместе с условием $\partial g_\lambda(t)/\partial \lambda \in B_\gamma(\Lambda)$, это дает возможность дифференцировать под знаком суммы, и мы приходим к (19). $\square$

6. Фундаментальное решение. Рассмотрим функцию (см. [7])

$$\Gamma_{\sigma,n}(x, y) = C_n y^{\beta(2-n)-1} f_\beta(|x|y^{-\beta}; n-1, \beta(2-n)), \quad n \in \mathbb{N}; \quad (20)$$

здесь и далее

$$C_n = 2^{-n} \pi^{(1-n)/2}, \quad \beta = \frac{\sigma}{2},$$

$$f_\beta(z; \mu, \delta) = \begin{cases} \frac{2}{\Gamma(\mu/2)} \int_1^\infty \phi(-\beta, \delta; -zt) (t^2 - 1)^{\mu/2-1} dt, & \mu > 0, \\ \phi(-\beta, \delta; -z), & \mu = 0, \end{cases}$$

где

$$\phi(\gamma, \delta; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j! \Gamma(\gamma j + \delta)}, \quad \gamma > -1,$$

— функция Райта (см. [28, 29]).

Приведем ряд утверждений, касающихся функции (20), которые нам понадобятся в дальнейшем. Доказательства можно найти в [7].

Лемма 4. Пусть $\zeta \in \mathbb{R}$. Функция $\Gamma_{\sigma,n}(x - \xi, y - \eta)$ на множестве $\{|x - \xi| > 0, \eta < y\}$, $\xi, x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяет уравнению

$$(D_{\eta y}^{\sigma} - \Delta_x) D_{\eta y}^{\zeta} \Gamma_{\sigma,n}(x - \xi, y - \eta) = 0 \quad (21)$$

как функция переменных x и y и уравнению

$$(D_{y\eta}^{\sigma} - \Delta_{\xi}) D_{y\eta}^{\zeta} \Gamma_{\sigma,n}(x - \xi, y - \eta) = 0 \quad (22)$$

как функция переменных ξ и η .

Введем следующие обозначения:

$$E(z, \rho) = \exp(-\rho z^{1/(1-\beta)}), \quad \gamma_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \leq 3, \\ |\ln z| + 1 & \text{при } n = 4, \\ z^{4-n} & \text{при } n \geq 5. \end{cases}$$

Лемма 5. Пусть $\zeta \in \mathbb{R}$. Справедливы неравенства

$$\left| D_{\eta y}^{\zeta} \Gamma_{\sigma,n}(x, y) \right| \leq C y^{\beta(2-n)-\zeta-1} \gamma_p(|x| y^{-\beta}) E(|x| y^{-\beta}, \rho), \quad (23)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_k} D_{\eta y}^{\zeta} \Gamma_{\sigma,n}(x, y) \right| \leq C |x_k| y^{-\beta n - \zeta - 1} \gamma_{p+2}(|x| y^{-\beta}) E(|x| y^{-\beta}, \rho), \quad (24)$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} D_{\eta y}^{\zeta} \Gamma_{\sigma,n}(x, y) \right| \leq C y^{-\beta n - \zeta - 1} \gamma_q(|x| y^{-\beta}) E(|x| y^{-\beta}, \rho), \quad (25)$$

где

$$p = \begin{cases} n, & \text{если } \zeta \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ n+2, & \text{если } \zeta \notin \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{cases} \quad q = \begin{cases} n+2, & \text{если } \zeta \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ или } n=1, \\ n+4, & \text{если } \zeta \notin \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ и } n \geq 2, \end{cases}$$

$C = C(n, \sigma, \rho)$, а значение ρ может быть выбрано любым из условия $\rho < (1 - \beta)\beta^{\beta/(1-\beta)}$.

7. Функция Грина. Далее, если оператор $\mathbf{J}^{a,b}$ применяется к функции, зависящей от нескольких переменных, условимся писать $\mathbf{J}_{s,\theta}^{a,b}$, указывая в нижнем индексе переменные образа.

Рассмотрим функцию

$$G(x, y, \xi, \eta) = \mathbf{J}_{x_1, \xi_1}^{a_1, b_1} \mathbf{J}_{x_2, \xi_2}^{a_2, b_2} \dots \mathbf{J}_{x_n, \xi_n}^{a_n, b_n} \Gamma_{\sigma,n}(x, y - \eta). \quad (26)$$

Далее будем обозначать $\Omega_y = \{(\xi, \eta) : \xi \in S, \eta \in (0, y)\}$.

Сформулируем ряд свойств функции (26).

1. Функция (26) может быть представлена в виде

$$G(x, y, \xi, \eta) = \Gamma_{\sigma,n}(x - \xi, y - \eta) + H(x, y, \xi, \eta), \quad (27)$$

где $H(x, y, \xi, \eta)$ как функция переменных x и ξ (при фиксированных y и η , $0 < \eta < y < T$) принадлежит пространству $C^\infty(\overline{S} \times S) \cap C^\infty(S \times \overline{S})$. Представление (27) и гладкость функции $H(x, y, \xi, \eta)$ с учетом оценки (23) следуют из леммы 1.

2. Для любого $\zeta \in \mathbb{R}$ функция $H(x, y, \xi, \eta)$ на множестве $\Omega \times \Omega_y$ удовлетворяет уравнению

$$(D_{\eta y}^{\sigma} - \Delta_x) D_{\eta y}^{\zeta} H(x, y, \xi, \eta) = 0 \quad (28)$$

как функция переменных x и y и уравнению

$$(D_{y\eta}^{\sigma} - \Delta_{\xi}) D_{y\eta}^{\zeta} H(x, y, \xi, \eta) = 0 \quad (29)$$

как функция переменных ξ и η . Равенства (28) и (29), с учетом неравенств (23), (24) и (25), а также леммы 3, следуют из соотношений (11), (12), (21) и (22).

3. Для любой фиксированных $(x, y) \in \Omega$ и $\eta < y$ справедливы соотношения

$$\lim_{\xi_k \rightarrow a_k+} G(x, y, \xi, \eta) = 0, \quad k \in K_{10} \cup K_{11}, \quad (30)$$

$$\lim_{\xi_k \rightarrow b_k-} G(x, y, \xi, \eta) = 0, \quad k \in K_{01} \cup K_{11}. \quad (31)$$

Предельные соотношения (16) вместе с оценкой (23) дают (30) и (31).

4. Для любого $\zeta \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\lim_{\eta \rightarrow y} D_{\eta y}^{\zeta} H(x, y, \xi, \eta) = 0, \quad x \in S, \quad \xi \in S. \quad (32)$$

Предельное соотношение (32) следует из (17) и (23).

Приведенные выше свойства позволяют назвать функцию $G(x, y, \xi, \eta)$ *функцией Грина* задачи (4), (5), (6) для уравнения (3).

8. Представление решения. В дальнейшем положим

$$\mu_j = \sum_{i=0}^j \gamma_i,$$

где, как и раньше, γ_i — элементы последовательности (2), с которой ассоциирован оператор дробного дифференцирования в уравнении (3).

Теорема 1. Пусть $u(x, y)$ — такое регулярное решение задачи (3)–(6), что $\partial u(x, y)/\partial x_k \in L(\partial S \times (0, T))$, и для некоторого $\nu > 0$ справедливы включения

$$\begin{aligned} y^{1-\mu} f(x, y) &\in C(\bar{S} \times [0, T]), \\ y^{1-\mu} \varphi_k(x_{(k)}, y) &\in C(\bar{S}_{(k)} \times [0, T]), \quad k \in K_{10} \cup K_{11}; \\ y^{1-\mu} \psi_k(x_{(k)}, y) &\in C(\bar{S}_{(k)} \times [0, T]), \quad k \in K_{01} \cup K_{11}; \\ \tau_j(x) &\in C(S), \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Пусть также в случае $K_{00} \cup K_{01} \cup K_{10} \neq \emptyset$ выполнены предельные соотношения

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \tau_j(x) \exp(-\rho|x|^{2/(2-\sigma)}) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (33)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} y^{1-\mu} f(x, y) \exp(-\rho|x|^{2/(2-\sigma)}) = 0, \quad (34)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} y^{1-\mu} u(x, y) \exp(-\rho|x|^{2/(2-\sigma)}) = 0, \quad (35)$$

где $\rho < (1 - \beta)(\beta/T)^{\beta/(1-\beta)}$. Тогда функция $u(x, y)$ представима в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{j=0}^{m-1} \int_S \tau_j(\xi) \left[D_{y\eta}^{\sigma-\mu_j} G(x, y, \xi, \eta) \right]_{\eta=0} d\xi + \\ &+ \sum_{k \in K_{10} \cup K_{11}} \int_0^y \int_{S_{(k)}} \varphi_k(\xi_{(k)}, \eta) \left[\frac{\partial}{\partial \xi_k} G(x, y, \xi, \eta) \right]_{\xi_k=a_k} d\xi_{(k)} dy - \\ &- \sum_{k \in K_{01} \cup K_{11}} \int_0^y \int_{S_{(k)}} \psi_k(\xi_{(k)}, \eta) \left[\frac{\partial}{\partial \xi_k} G(x, y, \xi, \eta) \right]_{\xi_k=b_k} d\xi_{(k)} dy + \\ &+ \int_0^y \int_S f(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (36) \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $K_{00} \cup K_{01} \cup K_{10} = \emptyset$ (т.е. область S ограничена). В силу (30) и (31) имеем

$$G(x, y, \xi, \eta)|_{(\xi, \eta) \in \partial S \times (0, T)} = 0.$$

Кроме того, из (22), (27) и (29) следует, что

$$\left(D_{y\eta}^\sigma - \Delta_\xi\right)G(x, y, \xi, \eta) = 0, \quad (\xi, \eta) \in S \times (0, y).$$

Таким образом, формула (36) следует из общего представления решения диффузионно-волнового уравнения (см. [7, теорема 1]).

Пусть теперь $K_{00} \cup K_{01} \cup K_{10} \neq \emptyset$, т.е. область S содержит бесконечную компоненту. Для положительного R обозначим n -мерный куб (декартово произведение интервалов $-R < x_k < R$) через $I_R = (-R, R) \times \dots \times (-R, R)$ и

$$S_R = S \cap I_R.$$

Обозначим через $S_{(k),R}$ проекцию вдоль x_k части границы области S_R , которая при больших R остается внутри S (это будет иметь место для индексов $k \in K_{10} \cup K_{01} \cup K_{11}$). Кроме того, символом $G_R(x, y, \xi, \eta)$ будем обозначать функцию Грина, соответствующую области S_R , которая, очевидно, ограничена. Поэтому, с учетом вышесказанного, для любых $x \in S_R$ и $y \in (0, R)$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \sum_{j=0}^{m-1} \int_{S_R} \tau_j(\xi) \left[D_{y\eta}^{\sigma-\mu_j} G_R(x, y, \xi, \eta) \right]_{\eta=0} d\xi + \\ & + \sum_{k \in K_{10} \cup K_{11}} \int_0^y \int_{S_{(k)}} \varphi_k(\xi_{(k)}, \eta) \left[\frac{\partial}{\partial \xi_k} G_R(x, y, \xi, \eta) \right]_{\xi_k=a_k} d\xi_{(k)} dy - \\ & - \sum_{k \in K_{01} \cup K_{11}} \int_0^y \int_{S_{(k)}} \psi_k(\xi_{(k)}, \eta) \left[\frac{\partial}{\partial \xi_k} G_R(x, y, \xi, \eta) \right]_{\xi_k=b_k} d\xi_{(k)} dy + \\ & + \int_0^y \int_{S_R} f(\xi, \eta) G_R(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta + \Phi_{k,R}(x, y) + \Psi_{k,R}(x, y), \quad (37) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{k,R}(x, y) = & \sum_{k \notin K_{10} \cup K_{11}} \int_0^y \int_{S_{(k),R}} \left[u(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \xi_k} G_R(x, y, \xi, \eta) \right]_{\xi_k=-R} d\xi_{(k)} dy, \\ \Psi_{k,R}(x, y) = & - \sum_{k \notin K_{01} \cup K_{11}} \int_0^y \int_{S_{(k),R}} \left[u(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \xi_k} G_R(x, y, \xi, \eta) \right]_{\xi_k=R} d\xi_{(k)} dy. \end{aligned}$$

Равенство (37) справедливо для любого достаточно большого R . В силу (24) и (35)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Phi_{k,R}(x, y) = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \Psi_{k,R}(x, y) = 0.$$

Поэтому, устремляя R к бесконечности, учитывая (23), (24), (33) и (34), приходим к (36). $\square$

Заметим, что из теоремы 1, вообще говоря, не следует, что любая функция вида (36) является регулярным решением задачи (3)–(6). Чтобы это имело место, необходимы дополнительные условия на гладкость правой части и функций в начальных и краевых условиях, а также на распределение параметров γ_k (см. [7]). Однако из представления (36) следует единственность решения рассматриваемой задачи. При этом в случае $K_{00} \cup K_{01} \cup K_{10} \neq \emptyset$ (т.е. если область S не

ограничена), единственность решения имеет место в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия А. Н. Тихонова:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} y^{1-\mu} u(x, y) \exp \left(-\omega |x|^{2/(2-\sigma)} \right) = 0$$

для некоторого $\omega > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вагабов А. И. Представление решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в виде интегралов Пуассона и их приложения// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 4. — С. 439–442.
2. Ворошилов А. А., Килбас А. А. Задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто// Диффер. уравн. — 2006. — 42, № 5. — С. 599–609.
3. Джрбашян М. М., Нерсисян А. Б. Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка// Изв. акад. наук Арм. ССР. — 1968. — 3, № 1. — С. 3–28.
4. Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка// Диффер. уравн. — 1990. — 26, № 4. — С. 660–670.
5. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
6. Псху А. В. Решение краевой задачи для уравнения с частными производными дробного порядка// Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 8. — С. 1092–1099.
7. Псху А. В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка// Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — 73, № 2. — С. 141–182.
8. Псху А. В. Первая краевая задача для дробного диффузионно-волнового уравнения в нецилиндрической области// Изв. РАН. Сер. мат. — 2017. — 81, № 6. — С. 158–179.
9. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.
10. Псху А. В. Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка// Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 9. — С. 1286–1289.
11. Псху А. В. Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина// Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 10. — С. 1430–1433.
12. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
13. Тарасов В. Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. — М.-Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2011.
14. Agrawal O. P. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain// Nonlin. Dynam. — 2002. — 29, № 1. — P. 145–155.
15. Atanacković T. M., Pilipović S., Stanković B., Zorica D. Fractional Calculus with Applications in Mechanics. — London: Wiley, 2014.
16. Eidelman S. D., Kochubei A. N. Cauchy problem for fractional diffusion equations// J. Differ. Equ. — 2004. — 199. — P. 211–255.
17. Fujita Ya. Integrodifferential equation which interpolates the heat equation and the wave equation, I// Osaka J. Math. — 1990. — 27, № 2. — P. 309–321.
18. Fujita Ya. Integrodifferential equation which interpolates the heat equation and the wave equation, II// Osaka J. Math. — 1990. — 27, № 4. — P. 797–804.
19. Gorenflo R., Iskenderov A., Luchko Yu. Mapping between solutions of fractional diffusion-wave equations// Fract. Calcul. Appl. Anal. — 2000. — 3, № 1. — P. 75–86.
20. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: North-Holland, 2006.
21. Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation// Appl. Math. Lett. — 1996. — 9, № 6. — P. 23–28.
22. Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models. — Singapore: World Scientific, 2010.
23. Miller K., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equation. — New York: Wiley, 1993.
24. Oldham K., Spanier J. Fractional Calculus. — New York: Academic Press, 1974.
25. Podlubny I. Fractional Differential Equations. — San Diego–New York–London: Academic Press, 1999.
26. Schneider W. R., Wyss W. Fractional diffusion and wave equations// J. Math. Phys. — 1989. — 30, № 1. — P. 134–144.

27. *Uchaikin V. V.* Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. — Berlin–Beijing: Springer, 2013.
28. *Wright E. M.* On the coefficients of power series having exponential singularities// J. London Math. Soc. — 1933. — 8, № 29. — P. 71–79.
29. *Wright E. M.* The generalized Bessel function of order greater than one// Quart. J. Math. Oxford Ser. — 1940. — 11. — P. 36–48.
30. *Wyss W.* The fractional diffusion equation// J. Math. Phys. — 1986. — 27, № 11. — P. 2782–2785.

Псху Арсен Владимирович
 Институт прикладной математики и автоматизации,
 Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук, Нальчик
 E-mail: pskhu@list.ru