Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Учайкин, Атомы и фотоны: кинетические уравнения с запаздыванием, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 167, 62–96

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-167-62-96>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 11:18:57

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 167 (2019). С. 62–96
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-167-62-96

УДК 517.44

АТОМЫ И ФОТОНЫ: КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2019 г. В. В. УЧАЙКИН

Посвящается академику Адаму Маремовичу Нахушеву

Аннотация. В своих недавних работах автор обращал внимание на то, что выделение из замкнутой гамильтоновой системы ее части переводит исходное известное дифференциальное уравнение Лиувилля в интегро-дифференциальное уравнение с запаздывающим временным аргументом, описывающее динамику выделенной подсистемы уже в статусе открытой системы; было показано, что интегральный оператор может быть представлен в форме дробного дифференциального оператора распределенного порядка. В настоящей работе показано, как преобразуется кинетическая теория системы «атомы+фотоны» при рассмотрении подсистемы, образованной возбужденными атомами, представлен вывод телеграфного уравнения с запаздыванием, выведено уравнение Бибермана–Холстейна в дробной дифференциальной форме (с оператором Лапласа дробного порядка), рассмотрены граничные эффекты в нелокальной модели переноса. Заключительный раздел посвящен лазерным технологиям, включающим в себя лазеры на свободных электронах и лазерное охлаждение атомов.

Ключевые слова: уравнение баланса, пленение излучения, перераспределение частот, телеграфное уравнение, лазерный луч, фрактальная среда.

ATOMS AND PHOTONS: KINETIC EQUATIONS WITH DELAY

© 2019 V. V. UCHAIKIN

ABSTRACT. In his recent works, the author drew attention to the fact that extraction of a part of a closed Hamiltonian system turns the original well-known Liouville differential equation into an integro-differential equation with a delayed time argument, which describes the dynamics of the selected subsystem considered as an open system. It was shown that the integral operator can be represented in the form of a fractional differential operator of distributed order. In this paper, we show how the kinetic theory of the system “atoms+photons” is transformed for the subsystem consisting of excited atoms. We present the derivation of the telegraph equation with delay, derive the Bieberman–Holstein equation in the fractional differential form (with the fractional Laplace operator), and discuss boundary effects in the nonlocal transport model. The final section is devoted to laser technologies, which include free electron lasers and laser cooling of atoms.

Keywords and phrases: balance equation, radiation trapping, frequency redistribution, telegraph equation, laser beam, fractal medium.

AMS Subject Classification: 65P40

СОДЕРЖАНИЕ

1. Кинетические основания эффекта запаздывания	63
2. Математическая модель эффекта запаздывания	67
3. Резонансный перенос возбуждений	72
4. Дробно-дифференциальная модель переноса	81
5. Квантовая оптика	86
Список литературы	95

1. КИНЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ ЭФФЕКТА ЗАПАЗДЫВАНИЯ

1.1. Об обобщенной газодинамике. Математическую основу процессов переноса в газах и плазме образует газокинетическое уравнение Больцмана, в пространственно-однородном случае имеющее вид

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \mathbf{B}_0[\varphi(\mathbf{v}, t)], \quad (1)$$

где $\mathbf{B}_0$ — больцмановский билинейный оператор столкновений, действующий на одночастичную плотность распределения молекул в пространстве скоростей $\varphi(\mathbf{v}, t)$:

$$\mathbf{B}_0[\varphi(\mathbf{v}, t)] \equiv \int d\mathbf{u} \int \sigma(\Theta; g) [\varphi(\mathbf{v}', t)\varphi(\mathbf{u}', t) - \varphi(\mathbf{v}, t)\varphi(\mathbf{u}, t)] d\Omega. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ — скорости сталкивающихся молекул до или после (со штрихом) столкновения, $g = |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$ — их относительная скорость, Θ — угол рассеяния, $\sigma(\Theta; g)d\Omega$ — дифференциальное сечение рассеяния в телесный угол $d\Omega$.

Предположения, лежащие в основе вывода этого уравнения, существенно упрощают решение газодинамических задач, но до сих пор не считаются достаточно обоснованными для плотных газов и жидкостей. Для них получены *обобщенные кинетические уравнения*, связанные с именами ван Хоа, Пригожина, Браута, Резибуа, Цванцига, Монтролла. Выведенные при более слабых ограничениях, эти уравнения сохраняют важнейшее свойство больцмановского уравнения: описывают необратимый процесс релаксации к равновесию. Главным же математическим отличием обобщенных уравнений является учет запаздывания в интеграле столкновения путем дополнительного интегрирования по сдвинутому временному аргументу одночастичной плотности распределения под знаком нелинейного оператора столкновений $\mathbf{B}_\tau[\varphi(\mathbf{v}, t)] \equiv \mathbf{B}_0[\varphi(\mathbf{v}, t - \tau)]b(\tau)$:

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \int_0^t \mathbf{B}_\tau[\varphi(\mathbf{v}, t)] d\tau + f(\mathbf{v}, t). \quad (3)$$

В случае равновесного состояния решение уравнения Больцмана не зависит от времени, $\varphi(\mathbf{v}, t) = \varphi_{\text{равн}}(\mathbf{v})$, и влияние запаздывания исчезает.

1.2. Постулаты обобщенной кинетики. Напомним основные моменты вывода уравнений (1)–(2). Из канонических уравнений Гамильтона для системы N взаимодействующих молекул без всяких дополнительных предположений выводится *уравнение Лиувилля* для фазовой плотности $\rho^N \equiv \rho^N(\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}; t)$:

$$\frac{\partial \rho^N}{\partial t} = \mathbf{L}^N \rho^N,$$

где $\mathbf{L}^N$ — *оператор Лиувилля*. В данном виде оно непригодно для решения и применения к конкретным задачам из-за астрономически большого числа переменных N .

Введением *проекционного оператора Цванцига—Мори* $\mathbf{P}$, выполняющего усреднение фазовой плотности по пространству конфигураций,

$$\mathbf{P}\rho^N = \frac{1}{V^N} \int_V \cdots \int_V \rho^N(\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}; t) \prod_{j=1}^N d\mathbf{r} \equiv \varphi^N(\{\mathbf{v}\}; t),$$

уравнение Лиувилля преобразуется в эквивалентное ему *формальное кинетическое уравнение*

$$\frac{\partial \varphi^N}{\partial t} = \int_0^t C_\tau^N [\varphi^N(\{\mathbf{v}\} | t - \tau)] d\tau + f^N(\{\mathbf{v}\}, t),$$

где C_τ^N — оператор взаимодействия молекул между собой. Интеграл по времени появился в результате разложения решения ρ^N на две компоненты — «существенную» $\varphi^N = P\rho^N$ и «несущественную» $(1 - P)\rho^N$ — и исключения последней из образовавшейся в результате этого разделения системы двух уравнений. Никаких новых процессов и ограничений на старые здесь не введено. Таким свойством обладает любой марковский процесс: усреднение по части переменных порождает интегрирование по времени, свидетельствующее о немарковском характере *редуцированного* процесса (справедливо и обратное: подходящим расширением фазового пространства немарковский процесс может быть преобразован в марковский). Свободный член уравнения f_N зависит от начального значения только «несущественной» части. Число независимых переменных, хотя и уменьшилось в два раза, все еще чрезвычайно велико, а само уравнение теперь стало незамкнутым.

Чтобы сократить N -частичный набор переменных до одночастичного и вместе с тем замкнуть уравнение, вводится *гипотеза молекулярного хаоса*: случайные скорости вступающих во взаимодействие молекул взаимно независимы:

$$\varphi^N(\{\mathbf{v}\}, t - \tau) = \prod_{j=1}^N \varphi(\mathbf{v}_j, t - \tau),$$

где $\varphi(\mathbf{v}_j; t - \tau)$ — одночастичные плотности в пространстве скоростей. В результате приходим к *обобщенному кинетическому уравнению* (3):

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \int_0^t B_\tau [\varphi(\mathbf{v}, t)] d\tau + f(\mathbf{v}, t),$$

где

$$B_\tau [\varphi(\mathbf{v}, t)] \equiv \text{TL} \int \cdots \int C_\tau^N [\{\varphi(\mathbf{v} | t - \tau)\}] \prod_{j=2}^N d\mathbf{v}_j;$$

интегрирование предполагается по всем пронумерованным скоростям (индекс 1 опущен), а TL означает термодинамический предел. В модели *мгновенных столкновений* $b(\tau) = \delta(\tau)$, и процесс становится марковским.

1.3. Столкновения и релаксация. В определенных условиях (скажем, при высоких плотностях) столкновения молекул уже нельзя считать мгновенными, и необходимо учитывать их продолжительность. Характерное время столкновения $\tau_{\text{ст}}$ становится теперь соизмеримым с временем релаксации $\tau_{\text{рел}}$, что легко понять из следующих соображений. Характерное время бинарных столкновений (по крайней мере при низких плотностях) оценивается отношением радиуса взаимодействий r_0 к средней скорости движения молекул $\bar{v}$:

$$\tau_{\text{coll}} \approx \frac{r_0}{\bar{v}}.$$

Время же релаксации оценивается сведением кинетического уравнения к релаксационному типу

$$\frac{\partial(\varphi - \varphi_{\text{равн}})}{\partial t} \approx -nr_0^2\bar{v}(\varphi - \varphi_{\text{равн}})$$

и имеет вид

$$\tau_{\text{рел}} \approx \frac{1}{nr_0^2\bar{v}}.$$

Таким образом,

$$\frac{\tau_{\text{ст}}}{\tau_{\text{рел}}} \approx nr_0^3,$$

и если при низких плотностях время столкновений пренебрежимо мало по сравнению со временем релаксации, то с повышением плотности ситуация меняется. Вывод этот, в частности, следует из известного разложения обратного времени релаксации по степеням концентрации молекул газа C (см. [24]):

$$\tau_{\text{ст}}^{-1} = r_0^2 C \bar{v} [1 + r_0^3 C + (r_0^3 C)^2 + \dots].$$

Отношение рассматриваемых времен

$$\frac{\tau_{\text{ст}}}{\tau_{\text{рел}}} = r_0^3 C + (r_0^3 C)^2 + \dots,$$

так что если желательно сохранить поправку $(r_0^3 C)^2$, не следует считать столкновения мгновенными.

Второй член в правой части обобщенного кинетического уравнения (3) не имеет аналога в уравнении Больцмана. Он описывает распад пространственных корреляций *центров масс* молекул, могущих существовать в начальный момент времени. Можно показать, что если в начальный момент времени такие корреляции отсутствуют, то $f(\mathbf{v}; t) = 0$ при всех $t > 0$. Допустим теперь, что в начальный момент времени корреляции простираются на расстояния порядка радиуса взаимодействия r_0 . Хаотически направленные скорости входящих в корреляционный кластер частиц ведут к их взаимному разбеганию, расплыванию кластера, и через время $\tau_{\text{ст}} r_0 / \bar{v}$ частицы перестают взаимодействовать друг с другом и следует ожидать, что

$$f(\mathbf{v}; t) \approx 0, \quad t \gg \tau_{\text{ст}}.$$

Расчеты подтверждают это в случае газа слабо отталкивающихся молекул, но строгого доказательства этого свойства в общем случае не найдено. Аналогичная ситуация имеет место и с операторным членом. Принято считать, что

$$b(\tau) \leq A e^{-a\tau}, \quad \tau \gg \tau_{\text{ст}}.$$

Однако многие теоретики (Пригожин, Резибуа, Балеску) полагают это условие некорректным и предпочитают ему *степенной закон убывания*

$$b(\tau) \leq A \tau^{-\nu}, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Хотя это предпочтение основано скорее на убеждении, чем на строгих доказательствах или экспериментальных свидетельствах, оно подтверждается модельными вычислениями и косвенно — результатами некоторых экспериментов. Степенное поведение характеризует длинные хвосты временных распределений, для объяснения которых требуются дополнительные аргументы: конечные времена столкновений и даже заметный вклад тройных и более столкновений ответственны в первую очередь за кратковременные корреляции.

Долгое время считалось, что гидродинамика применима на временах, на много порядков больших «кинетических» времен: времени столкновения ($\sim 10^{-15}$ с) и времени между последовательными столкновениями (для типичных жидкостей, например, воды, $\sim 10^{-14}$ с). Численное моделирование показало, что в ряде случаев обычная гидродинамика применима и на гораздо меньших временных масштабах — примерно до 30 столкновений, т.е. до времен порядка 10^{-13} с. Заметим, что в приложениях математической статистики число 30 также играет заметную роль: считается, что для типичных выборок такого объема уже применима центральная предельная теорема, эквивалентная диффузионному приближению в гидродинамике.

Обобщенная гидродинамика явилась следствием распространения гидродинамического подхода с макроскопических на микроскопические масштабы. Уравнения Навье—Стокса сохранили при этом свою форму, но коэффициенты переноса стали зависеть от радиуса действия градиентов и от длительности их приложения. Тем самым включились масштабные факторы длины и времени, что позволило выйти за пределы модели непрерывной среды и учесть ее молекулярную структуру. Жидкость, характеризуемая обобщенной вязкостью $\eta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$, обладает двумя свойствами: *нелокальностью* и *памятью*: сигнал, рожденный в момент времени t' в точке $\mathbf{r}'$, придет в точку $\mathbf{r}$ в более поздний момент t . Это запаздывание обусловлено не столько инерционными свойствами жидкости, сколько диффузионным характером распространения флуктуаций. В любом случае, для перестройки расположения молекул требуется некоторое время.

Кроме того, выяснилась также необходимость учета корреляций с партнерами по предшествующим столкновениям. Ранее распад корреляций предполагался экспоненциальным и в гидродинамических масштабах корреляции представлялись несущественными (гипотеза молекулярного хаоса). Численное моделирование показало наличие долговременного хвоста автокорреляционной функции для скорости жидкости при промежуточных плотностях: скорость частицы даже после нескольких сотен столкновений обнаруживает корреляцию со своим начальным значением, спадающую по степенному закону. В макроскопической гидродинамике этот факт известен со времен Стокса, установившего его при рассмотрении движения шарика в сплошной среде. Однако никто и не предполагал, что этот вывод останется справедливым и для шариков атомных размеров.

1.4. Квантовая интерпретация эффекта памяти. Квантовым аналогом уравнения Больцмана является кинетическое уравнение Паули для вероятности $P(\nu, t)$ обнаружить систему в состоянии с квантовыми числами ν в момент времени t :

$$\frac{dP(\nu, t)}{dt} = \sum_{\mu} [W(\nu, \mu)P(\mu, t) - W(\mu, \nu)P(\nu, t)],$$

где $W(\nu, \mu)$ — вероятность перехода из μ в ν в единицу времени. Для крупноструктурной (сглаженной) плотности вероятности $p(\nu, \nu_0; t)$ того, что система, находившаяся в начальный момент времени в состоянии с набором квантовых чисел ν_0 , спустя t секунд окажется в состоянии, принадлежащем единичному интервалу в окрестности ν , уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{dp(\nu, \nu_0; t)}{dt} = 2\pi\lambda^2 \int d\mu [w(\nu, \mu)p(\mu, \nu_0, t) - w(\mu, \nu)p(\nu, \nu_0; t)].$$

К нему следует добавить начальное условие $p(\nu, \nu_0; 0) = \delta(\nu - \nu_0)$. Уравнение Паули выведено для систем со слабым взаимодействием ($\lambda^2\tau_{\text{рел}} \simeq 1$) в предположении, что фазы коэффициентов $c(\nu, t)$ разложения

$$|\varphi_t\rangle = \int d\nu c(\nu, t)|\nu\rangle$$

во все моменты времени случайны, независимы и равномерно распределены по всем возможным значениям. Это допущение, аналогичное больцмановской гипотезе о молекулярном хаосе, не вполне корректно: оно выполняется только в случае, когда система находится в состоянии полного термодинамического равновесия.

Ван Хоф вывел аналог этого уравнения в предположении, что указанные свойства случайных фаз имеют место лишь в *начальный момент времени*. Обобщенное таким образом кинетическое уравнение имеет следующий вид (см. [32]):

$$\frac{dp(\nu, \nu_0; t)}{dt} = 2\pi\lambda^2 \int_0^t d\tau \int d\mu [w(\nu, \mu; \tau)p(\mu, \nu_0, t - \tau) - w(\mu, \nu; \tau)p(\nu, \nu_0; t - \tau)] + \delta(\nu - \nu_0)f(\nu; t).$$

Основное отличие этого уравнения от предыдущего проявляется в наличии интегрирования по запаздывающему временному аргументу в слагаемых, описывающих переходы, и в присутствии последнего неоднородного члена, отсутствующего в уравнении ван Хофа. При малых возмущениях интегро-дифференциальное по времени уравнение переходит в дифференциальное уравнение Паули. Исследуя процесс этого перехода, ван Хоф отмечает: «Для очень малых возмущений мы можем, следовательно, различать два временных масштаба, короткий (τ_0), не зависящий от λ , и длинный (τ_1), возрастающий пропорционально λ^2 при $\lambda \rightarrow 0$ » (см. [32, с. 462]). В другом месте статьи он пишет: «Обобщенное кинетическое уравнение существенно отличается от его версии низшего порядка¹ тем, что оно соответствует немарковскому процессу. Переход от точного кинетического уравнения к его приближению низшего порядка показывает существование двух временных масштабов, короткого и длинного, для очень медленных необратимых процессов... Эта

¹Так называется ван Хоф уравнение Паули (прим. авт.).

немарковская природа общего кинетического уравнения может быть объяснена интерференционными эффектами производимых возмущением волн. Эти эффекты суть проявление определенных фазовых соотношений. Они становятся пренебрежимо малыми для малых возмущений, и именно поэтому уравнение низшего порядка является марковским» (см. [32, с. 477]).

1.5. О степенном характере усредненных экспонент. Появление степенных распределений в результате усреднения экспоненциальных встречается во многих задачах статистической физики. Приведем типичный пример. Рассмотрим ансамбль частиц, находящихся в локализованных состояниях с энергией активации ε , которые для удобства будем называть *ловушками*. Время пребывания частицы в такой ловушке есть случайная величина Θ с экспоненциальным распределением

$$P(\Theta > t | \varepsilon) = e^{-t/\tau(\varepsilon)}$$

и средним значением $\tau(\varepsilon)$, равным согласно *закону Аррениуса*

$$\tau(\varepsilon) = \tau_0 \exp \frac{\varepsilon}{k_B T}.$$

Разным членам ансамбля, отвечающим разным положениям ловушек, в неоднородной среде соответствуют разные значения энергии ε , так что эту величину можно так же считать случайной. Приняв в качестве ее распределения *закон Гиббса*,

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon_0} \exp \left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right),$$

получим

$$P(\Theta > t) = \int_0^\infty P(\Theta > t | \varepsilon) p(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^\infty \exp \left(-\frac{t}{\tau_0} e^{-\varepsilon/kT} \right) \frac{1}{\varepsilon_0} e^{-\varepsilon/\varepsilon_0} d\varepsilon = \alpha \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{-\alpha} \int_0^{t/\tau_0} e^{-z} z^{\alpha-1} dz,$$

где $\alpha = kT/\varepsilon_0$. При $t \rightarrow 0$ эта вероятность, как и положено, стремится к 1, а в асимптотике больших времен

$$P(\Theta > t) \sim \Gamma(1 + \alpha) \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{-\alpha},$$

и, соответственно,

$$p_\Theta(t) \sim \alpha \Gamma(1 + \alpha) \tau_0^\alpha t^{-1-\alpha}, \quad t \rightarrow \infty.$$

На первый взгляд, ситуация мало напоминает ту, которая рассматривается в нашей работе. Однако, если мы посмотрим на процесс последовательных соударений движущегося в газе атома в подпространстве скоростей, то увидим продолжительные пребывания представляющей атом точки в геометрических точках пространства скоростей (т.е. ловушки), и асимптотически степенной характер усредненной по ансамблю продолжительности состояний с постоянной скоростью представляется довольно правдоподобной.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭФФЕКТА ЗАПАЗДЫВАНИЯ

2.1. Определение. Интересный класс процессов, обладающих свойством запаздывания, определен термином *дробный пуассоновский процесс*. Напомним, что стандартный пуассоновский процесс (СПП) интенсивности μ есть поток (временная последовательность) мгновенных событий (импульсов), длины промежутков между которыми (времена ожидания) T являются независимыми случайными величинами с экспоненциальной плотностью распределения

$$\psi_1(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad t > 0.$$

Характеристическая функция Лапласа этого распределения

$$\hat{\psi}_1(\lambda) \equiv \int_0^\infty \psi_1(t) e^{-\lambda t} dt = \frac{\mu}{\mu + \lambda}.$$

Дробный пуассоновский процесс (ДПП) порядка $\alpha \in (0, 1]$ интенсивности μ — поток импульсов с плотностью распределения времени ожидания $\psi_\alpha(t)$, характеризуемой образом Лапласа

$$\widehat{\psi}_\alpha(\lambda) = \frac{\mu}{\mu + \lambda^\alpha}. \quad (4)$$

Перепишав (4) в виде

$$[\lambda^\alpha + \mu] \widehat{\psi}_\alpha(\lambda) = \mu$$

и выполнив обратное преобразование, приходим к дробно-дифференциальному уравнению

$${}_0D_t^\alpha \psi_\alpha(t) + \mu \psi_\alpha(t) = \mu \delta(t). \quad (5)$$

При $\alpha < 1$ решение этого уравнения выражается через двухпараметрическую функцию Миттаг-Леффлера

$$\psi_\alpha(t) = \mu t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\mu t^\alpha), \quad E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}. \quad (6)$$

Используя известную формулу

$$\int_0^{\infty} e^{-u} E_{\alpha,\alpha}(u^\alpha x) u^{\alpha-1} du = \frac{1}{1-x},$$

легко убедиться, что плотности (6) действительно соответствует трансформанта (4).

Функция распределения времени ожидания $\Psi_\alpha(t) \equiv P(T < t)$ выражается через однопараметрическую функцию Миттаг-Леффлера:

$$\Psi_\alpha(t) = \int_0^t \psi_\alpha(\tau) d\tau = 1 - E_\alpha(-\mu t^\alpha).$$

При $\alpha = 1$ «дробная экспонента» $\psi_\alpha(t)$ превращается в обычное экспоненциальное распределение $\mu e^{-\mu t}$, а дробный пуассоновский процесс (ДПП) — в стандартный пуассоновский процесс (СПП).

Существует еще одно представление плотности распределения времени ожидания:

$$\psi_\alpha(t) = \frac{1}{t} \int_0^{\infty} e^{-x} \phi_\alpha(\mu t/x) dx, \quad \phi_\alpha(\xi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi [\xi^\alpha + \xi^{-\alpha} + 2 \cos(\alpha\pi)]},$$

позволяющее установить асимптотику поведения плотности при $\alpha \neq 1$ на больших и малых временах:

$$\psi_\alpha(t) \sim \begin{cases} \frac{\mu^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, & t \rightarrow 0, \\ \frac{\alpha \mu^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha-1}, & xt \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Рассмотрим еще несколько свойств, присущих ДПП.

2.2. Время первого достижения. Пусть $T_1, T_2, \dots$, — времена ожиданий между последовательными событиями ДПП, а

$$T^{(n)} = T_1 + T_2 + \dots + T_n$$

— случайный момент времени достижения процессом заданного уровня n : $N(T^{(n)}) = n$. Плотность распределения $T^{(n)}$ дается сверткой $\psi_\alpha^{*n}(t)$. Для СПП

$$\psi_1^{*n}(t) = \mu \frac{(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu t},$$

и согласно центральной предельной теореме

$$\Psi^{(n)}(t) \equiv \frac{\sqrt{n}}{\mu} \psi_1^{*n} \left(\frac{n}{\mu} + t \frac{\sqrt{n}}{\mu} \right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Функция $\Psi^{(n)}(t)$ практически достигает предельной формы уже при $n = 10$. При этом

$$\langle T^{(n)} \rangle = \frac{n}{\mu}, \quad \sigma_n \equiv \sqrt{\langle T^{(n)2} \rangle - \langle T^{(n)} \rangle^2} = \frac{\sqrt{n}}{\mu}.$$

В случае ДПП

$$\langle T \rangle = \int_0^\infty \psi_\alpha(t) t dt = \infty,$$

и центральная предельная теорема неприменима. Применение обобщенной предельной теоремы, основанной на теории устойчивых законов дает

$$\Psi_\alpha^{(n)}(t) \equiv b_n(\alpha) \psi_\alpha^{*n}(b_n(\alpha)t) = n^{1/\alpha} \overset{\circ}{\psi}_\alpha^{*n}(tn^{1/\alpha}) \Rightarrow g_+(t; \alpha), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$b_n(\alpha) = \left(\frac{n}{\mu}\right)^{1/\alpha}, \quad \overset{\circ}{\psi}_\alpha(t) = \psi_\alpha(t)|_{\mu=1} = t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-t^\alpha).$$

В терминах случайных величин предельное соотношение запишется в виде

$$T^{(n)} = \sum_{j=1}^n T_j \stackrel{d}{\sim} \mu^{-1} n^{1/\alpha} S_+^{(\alpha)}, \quad n \rightarrow \infty.$$

где $S_+^{(\alpha)}$ — случайная величина с характеристической функцией

$$\langle e^{-\lambda S_+^{(\alpha)}} \rangle \equiv \int_0^\infty g_+(s; \alpha) e^{-\lambda s} ds = e^{-\lambda^\alpha},$$

называемая за односторонность своего распределения *субординатором*. Ее математическое ожидание бесконечно, но плотность одновершинна, поэтому для указания ее характерных значений удобно пользоваться положением $\hat{S}_+^{(\alpha)}$ вершины (максимума плотности), придавая ее координате s_α смысл наиболее вероятного значения:

$$g'_+(s_0; \alpha) = 0.$$

Более информативные оценки достигаются введением p -интервалов распределения $(s_1, s_2)_p$, определяемых уравнениями

$$G_+(s_1; \alpha) = 1 - G_+(s_2; \alpha) = \frac{p}{2},$$

в которых

$$G_+(t; \alpha) = \int_0^t g_+(s; \alpha) ds.$$

Количественной мерой флуктуаций может служить полуширина p -интервала

$$\Delta_p S_+(\alpha) = \frac{s_2 - s_1}{2}.$$

Применяя эту символику и к нестандартизованной случайной величине T_n , представим приведенные выше результаты в более наглядном виде:

$$\hat{T}^{(n)} \stackrel{d}{\sim} \mu^{-1} n^{1/\alpha} \hat{S}_+^{(\alpha)}, \quad \Delta_p T_n \stackrel{d}{\sim} \mu^{-1} n^{1/\alpha} \Delta_p S_+^{(\alpha)}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Видно, в частности, что с повышением уровня n обе эти величины растут по одному и тому же степенному закону $\propto n^{1/\alpha}$ с показателем, большим единицы, а относительные флуктуации

$$\delta_{T^{(n)}} \equiv \frac{\Delta_p T^{(n)}}{\hat{T}^{(n)}} \sim \delta_{S_+^{(\alpha)}}$$

при этом *не исчезают* (если только α не равно 1).

2.3. Иерархия времен ожидания. Возьмем теперь всю совокупность времен ожидания, составляющих в сумме время достижения n -го уровня

$$T^{(n)} = T_1 + T_2 + \dots + T_n,$$

и расположим слагаемые в порядке *убывания* (вероятность совпадения независимых непрерывно распределенных случайных величин равна нулю):

$$T^{(n)} = T_{[1]} + T_{[2]} + \dots + T_{[n]}, \quad T_{[1]} > T_{[2]} > \dots > T_{[n]}.$$

Назовем первое слагаемое в этой сумме $T_{[1]}$ *лидирующим слагаемым*, или просто *лидером*. Его плотность распределения дается выражением

$$f_{T_{[1]}}(t) = n \left[\int_0^t \psi_\alpha(\tau) d\tau \right]^{n-1} \psi_\alpha(t).$$

Вообще, плотность распределения k -го по величине слагаемого имеет вид

$$f_{T_{[k]}}(t) = n \binom{n-1}{k-1} \left[\int_0^t \psi_\alpha(\tau) d\tau \right]^{n-k} \left[\int_t^\infty \psi_\alpha(\tau) d\tau \right]^{k-1} \psi_\alpha(t).$$

Первый сомножитель n означает, что на k -м месте по величине может оказаться любая из n случайных величин $T_1, T_2, \dots, T_n$; последний множитель дает вероятность того, что эта случайная величина окажется в единичном интервале около точки t , а произведение трех промежуточных множителей есть вероятность такого расположения оставшихся $n-1$ слагаемых, что $k-1$ окажутся справа от точки t , т.е. будут больше $T_{[k]}$, а остальные $n-k$ расположатся слева от t , т.е. будут меньше $T_{[k]}$.

Для качественной оценки характерных значений упорядоченных времен ожидания воспользуемся их наиболее вероятными значениями $\hat{T}_{[k]}(n, \alpha)$, задаваемыми уравнением $f'_{T_{[k]}}(\hat{T}_{[k]}) = 0$, явный вид которого

$$(k-1)\Psi_\alpha - (n-k)\bar{\Psi}_\alpha = \Psi_\alpha \bar{\Psi}_\alpha \frac{\psi'_\alpha}{\psi_\alpha^2}.$$

В случае СПП ($\alpha = 1$, $\Psi_1 = 1 - e^{-\mu t}$, $\bar{\Psi}_1 = e^{-\mu t}$, $\psi_1 = \mu e^{-\mu t}$) из этого уравнения находим

$$\hat{T}_{[k]}(n, 1) = \frac{1}{\mu} \ln \frac{n}{k}.$$

В случае ДПП мы ограничимся лишь асимптотической оценкой, приняв

$$\Psi_\alpha \sim 1 - [\mu^\alpha \Gamma(1-\alpha)]^{-1} t^{-\alpha}, \quad \bar{\Psi}_\alpha \sim [\mu^\alpha \Gamma(1-\alpha)]^{-1} t^{-\alpha}, \quad \psi_\alpha \sim \alpha [\mu^\alpha \Gamma(1-\alpha)]^{-1} t^{-\alpha-1}.$$

В результате получаем

$$\hat{T}_{[k]}(n, \alpha) = \frac{1}{\mu} \left[\frac{1 + \alpha n}{\Gamma(1-\alpha)(1 + \alpha k)} \right]^{1/\alpha}.$$

Сопоставим теперь наиболее вероятные значения лидирующих членов с наиболее вероятными значениями соответствующих сумм при $n \rightarrow \infty$:

$$\hat{T}_{[1]}(n, 1) = \frac{1}{\mu} \ln n, \quad \hat{T}^{(n)}(1) \sim \frac{n}{\mu}, \quad \alpha = 1$$

и

$$\hat{T}_{[1]}(n, \alpha) \sim \frac{1}{\mu} \left[\frac{\alpha n}{\Gamma(1-\alpha)(1+\alpha)} \right]^{1/\alpha}, \quad \hat{T}^{(n)}(\alpha) \sim \mu^{-1} n^{1/\alpha} \hat{S}_+^{(\alpha)}, \quad \alpha < 1.$$

Видно, что в первом случае роль отдельного интервала в траектории процесса с увеличением их числа быстро убывает; в больших масштабах траектория выглядит почти прямой с едва заметными неровностями. Во втором вклад в траекторию лидирующего интервала остается соизмеримым с величиной всего интервала достижения *при любом* n . С повышением уровня мы увеличиваем число интервалов ожидания, но увеличивается оно пропорционально $n^{1/\alpha}$, т.е. медленнее, чем растет n . Замедление это объясняется вовлечением в процесс все более долгих времен ожидания,

среди которых появляется новый лидер, сменяющий прежнего и вновь несущий на себе основную «тяжесть» времени достижения. Траектория не выравнивается с увеличением масштаба, а остается чрезвычайно неудобной «дьявольской лестницей» с неравномерно переменными случайными размерами ступеней. Лидер, однако, не исчерпывает все время достижения. Подобно ему, в оставшейся части времени достижения доминирует следующий, меньший на ступеньку «иерарх» $T_{[2]}$ и т. д. В двойном логарифмическом масштабе зависимость

$$\hat{T}_{[k]}(n, \alpha) \sim \frac{1}{\mu} \left[\frac{1 + \alpha n}{\Gamma(1 - \alpha)\alpha k} \right]^{1/\alpha}$$

от k выглядит прямой с наклоном $-1/\alpha$. Если мы имеем траекторию процесса восстановления, записанную в терминах времен ожидания, то можно упорядочить эти времена и изобразить результат в двойном логарифмическом масштабе. Если экспериментальные точки расположатся вдоль прямой, это будет указанием на наличие степенного хвоста в распределении времени ожидания. Именно к такому типу процессов и принадлежит ДПП.

2.4. Число событий в $(0, t)$. Согласно теории восстановления

$$p_n(t) \equiv P(N(t) = n) = P\left(\sum_{j=1}^n T_j > t\right) - P\left(\sum_{j=1}^{n+1} T_j > t\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

и имеет место следующая система интегральных уравнений для $p_n(t)$:

$$p_n(t) = \delta_{n0} \int_t^\infty \psi_\alpha(\tau) d\tau + [1 - \delta_{n0}] \int_0^t \psi_\alpha(t - \tau) p_{n-1}(\tau) d\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Выполнив преобразование Лапласа, получим

$$\lambda^\alpha \tilde{p}_n(\lambda) = -\mu \tilde{p}_n(\lambda) + \mu \tilde{p}_{n-1}(\lambda) + \lambda^{\alpha-1} \delta_{n0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, q \quad \tilde{p}_{-1} = 0.$$

Обратное преобразование приводит к системе уравнений для ДПП:

$${}_0D_t^\alpha p_n(t) = \mu [p_{n-1}(t) - p_n(t)] + \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} \delta_{n0}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (7)$$

При $\alpha \rightarrow 1$ она превращается в систему для СПП:

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \mu [p_{n-1}(t) - p_n(t)] + \delta(t) \delta_{n0}.$$

Здесь использовано предельное соотношение

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} = \delta(t).$$

Решение системы (7) имеет вид

$$p_n(t) = \frac{a^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!} \frac{(-a)^m}{\Gamma((m+n)\alpha + 1)}, \quad a = \mu t^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Это дробный аналог пуассоновского распределения (ДПР), превращающийся в стандартное пуассоновское при $\alpha = 1$. Моменты этого распределения

$$m_n(t) = \frac{n! a^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}.$$

В частности, среднее значение

$$\langle N(t) \rangle = m_1(t) = \frac{\mu t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

и дисперсия

$$\sigma^2(t) = m_2(t) - m_1^2(t) + m_1(t) = m_1(t) \left\{ 1 + m_1(t) [2^{1-2\alpha} \alpha B(\alpha, 1/2) - 1] \right\}.$$

Рис. 1. Предельные дробные пуассоновские распределения при различных значениях α .

2.5. Предельное дробное пуассоновское распределение. Введем квазинепрерывную переменную $z = n/\bar{n}$. В случае стандартного пуассоновского процесса

$$f(z; \bar{n}) = \bar{n} \frac{\bar{n}^{\bar{n}z}}{\Gamma(\bar{n}z + 1)} e^{-\bar{n}} \sim \sqrt{\frac{\bar{n}}{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(z-1)^2}{2/\bar{n}} \right\} \rightarrow \delta(z-1), \quad \bar{n} \rightarrow \infty.$$

Распределение перенормированной с.в. $Z = N(t)/\langle N(t) \rangle$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к вырожденному в точке $z = 1$.

В отличие от стандартного, дробный пуассоновский процесс в асимптотике больших времен характеризуется *дробным пуассоновским распределением*

$$f_\alpha(z) = \frac{[\Gamma(\alpha+1)]^{1/\alpha}}{\alpha} g^{(\alpha)} \left(\left(\frac{z}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^{-1/\alpha} \right) z^{-1-1/\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k! \Gamma(1-(k+1)\alpha) [\Gamma(\alpha+1)]^{k+1}} \quad (8)$$

с моментами

$$\langle Z^k \rangle = \frac{[\Gamma(1+\alpha)]^k \Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k\alpha)}.$$

Распределение это получено В. В. Учайкиным (см. [29]). При $z \rightarrow 0$

$$f_\alpha(z) \rightarrow f_\alpha(0) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}.$$

Стоит заметить также, что $\langle Z^0 \rangle = 1$, $\langle Z^1 \rangle = 1$ и $\langle Z^2 \rangle = 2\alpha B(\alpha, 1+\alpha)$, так что предельные относительные флуктуации числа событий

$$\delta_\alpha \equiv \frac{\sigma_{N(t)}}{\langle N \rangle} = \sqrt{2\alpha B(\alpha, 1+\alpha) - 1} = \begin{cases} 1, & \alpha = 0, \\ \sqrt{\pi/2} - 1, & \alpha = 1/2, \\ 0, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Для $\alpha = 1/2$ может быть получено явное выражение:

$$f_{1/2}(z) = \frac{2}{\pi} e^{-z^2/\pi}, \quad z \geq 0.$$

Семейство предельных ДПР показано на рис. 1.

3. РЕЗОНАНСНЫЙ ПЕРЕНОС ВОЗБУЖДЕНИЙ

3.1. Стандартная модель РПВ. Под *резонансным излучением* (РИ) понимается электромагнитное излучение, испускаемое атомами при оптических переходах из возбужденного состояния в состояние с более низким энергетическим уровнем. Распространяясь по объему плазмы (газа), фотоны РИ поглощаются другими атомами, переходящими в состояние с более высоким энергетическим уровнем. Так происходит перенос энергии возбуждения фотонами с резонансными

Рис. 2. Траектории при разных α и в случае экспоненциального пробега (exp) в двумерном пространстве.

частотами, или, короче, *резонансный перенос возбуждений* (РПВ), определяющий в конечном итоге наблюдаемые характеристики выходящего из плазмы излучения.

Исторически проблема переноса излучения в газах и плазме возникла в связи с интерпретацией звездных спектров (астрофизический аспект). В настоящее время теория переноса РПВ играет важную роль в технологии производства современных источников света, световых экранов, панелей и прочих устройств (светотехнический аспект). Для астрофизического аспекта характерна постановка стационарных задач с постоянным источником излучения, тогда как в светотехническом аспекте представляют существенный интерес и нестационарные задачи.

Распространение РИ в низкотемпературной плазме, представляющее собой последовательность процессов поглощения и переизлучения фотонов результате столкновений с атомами, может быть описано в рамках модели многократного рассеяния со случайным временем запаздывания переизлучения. Важнейшей особенностью РПВ в спектральной линии (обычно, это линия, соответствующая переходу с первого возбужденного уровня на основной) является то, что зависимость коэффициента поглощения от частоты $k(\omega)$ в области линии повторяет форму самой линии $\varepsilon(\omega)$. Возникает специфическая ситуация: большинство излучаемых фотонов имеют очень короткий пробег и тут же снова поглощаются, и лишь малому их числу, частоты которых лежат достаточно далеко от центра линии, удастся уйти далеко от места излучения. Если отождествить переизлученный фотон с поглощенным, т.е. считать, что это «тот же самый» фотон, только с изменившимися в результате взаимодействия с атомом частотой и направлением движения, и проследить за его движением, то можно увидеть, что большую часть времени до выхода из плазмы или безызлучательного поглощения в ней он проводит в небольших областях, совершая там множество переходов на малые расстояния, перемежающихся длинными перелетами. Это явление называют *пленением излучения*. Только для фотонов с частотой, отличной от резонансной ω_0 , коэффициент $k(\omega)$ мал и плазма становится прозрачной.

В связи с этим говорят, что перенос возбуждений в плазме происходит *на крыльях спектральных линий*. Усредненная по спектру экспоненциальная функция пропускания (закон Бугера)

$$P(\xi | \omega) \equiv P(R > \xi | \omega) = e^{-k(\omega)\xi} \quad (9)$$

превращается в распределение асимптотически степенного типа

$$P(\xi) \equiv \langle P(R > \xi | \omega) \rangle \equiv \int_0^\infty P(R > \xi | \omega) \varepsilon(\omega) d\omega \sim h(\xi) \xi^{-\alpha}, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (10)$$

где $0 < \alpha \leq 1$, а $h(\xi)$ — медленно меняющаяся в смысле Караматы функция. Такое поведение распределения пробега приводит к расходимости его средней величины и всех его высших моментов.

Стандартная модель РПВ базируется на следующих предположениях.

Рис. 3. Спектральный состав $\varepsilon(k(\omega_0)L)$ излучения, прошедшего сквозь плазменный слой L оптической толщины $k(\omega_0)L$, $s = \omega - \omega_0$.

1. В процессе РПВ участвуют только два энергетических уровня атомов плазмы — основной (0) и возбужденный (1). Все атомы одинаковы и разность между этими уровнями у всех атомов одна и та же.
2. Переходы $0 \rightarrow 1$ (возбуждения) и $1 \rightarrow 0$ (девозбуждения) осуществляются только в результате взаимодействия с фотонами (поглощения в первом случае и излучения — во втором); атом-атомные столкновения не приводят к изменению состояния атомов.
3. Пространственное распределение атомов, находящихся в основном состоянии, однородно по всему объему V , занимаемому плазмой, $N_0 = \text{const}$.
4. ПВА много меньше плотности атомов, находящихся в основном состоянии, $N_1 \equiv N(\mathbf{r}, t) \ll N_0$.
5. Все фотоны, достигающие границы плазмы (невогнутой поверхности объема V , стенки), покидают ее.
6. Положение возбужденных атомов в промежутке между поглощением и переизлучением фотона не успевает измениться.
7. Сечение упругого (без возбуждения атомов) рассеяния резонансных фотонов в рассматриваемом интервале частот пренебрежимо мало по сравнению с сечением неупругого рассеяния.
8. Имеет место полное перераспределение частот (ППЧ): частота переизлученного фотона не зависит от частоты поглощенного и от времени жизни возбужденного состояния атома.
9. Случайное направление переизлученного фотона не зависит от направления поглощенного фотона и имеет изотропное распределение.

Разумеется, существуют работы, авторы которых выходят за рамки указанных ограничений, и в большинстве случаев оправданно, однако наличие стандартной модели легче позволяет оценить влияние отдельных факторов (типа диффузии возбужденных атомов, корреляций между частотами поглощенного и переизлученного фотонов или конечной скорости распространения фотонов).

3.2. Уравнения диффузии и баланса для ПВА. Возбужденные резонансным излучением атомы возвращаются в основное состояние в процессах термализации в атом-атомных столкновениях (тушения) и спонтанного излучения, которое поглощается другими атомами, переводя их

в возбужденное состояние. Случайное время жизни атомов в возбужденном состоянии распределено с плотностью

$$q(\tau) = \mu e^{-\mu\tau}, \quad (11)$$

где $\mu = \beta + \gamma$, а β и γ — вероятности столкновительного и радиационного девозбуждений атома в единицу времени.

В возбужденном (как и в основном) состоянии атом совершает тепловое движение с коэффициентом диффузии D_a , описываемое уравнением диффузии

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D_a \Delta N(\mathbf{r}, t) + Q(\mathbf{r}, t). \quad (12)$$

Средние числа переходов атомов в единице объема в единицу времени из основного состояния в возбужденное и обратно в единицу времени будем называть *скоростями возбуждений* (СВ) и *девозбуждений* (ДВ) и обозначать $F(\mathbf{r}, t)$ и $F'(\mathbf{r}, t)$ соответственно. В результате

$$Q(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r}, t) - F'(\mathbf{r}, t),$$

и уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D_a \Delta N(\mathbf{r}, t) + F(\mathbf{r}, t) - F'(\mathbf{r}, t). \quad (13)$$

Согласно (11), СД связана с ПВА соотношением

$$F'(\mathbf{r}, t) = \mu N(\mathbf{r}, t), \quad (14)$$

и (13) принимает вид уравнения диффузии с поглощением:

$$\frac{\partial N}{\partial t} - \mu N(\mathbf{r}, t) = D_a \Delta N(\mathbf{r}, t) + F(\mathbf{r}, t). \quad (15)$$

При заданном $F(\mathbf{r}, t)$, $-\infty < t < \infty$, удовлетворяющем условию $F(\mathbf{r}, t - \tau) = o(e^{\lambda\tau})$ при $\lambda < \mu$ и $\tau \rightarrow \infty$, уравнение (15) имеет решение

$$N(\mathbf{r}, t) = \int_V d\mathbf{r}' \int_0^\infty d\tau G_a(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) F(\mathbf{r}', t - \tau), \quad (16)$$

где

$$G_a(\mathbf{r}, \tau) = \frac{1}{[4\pi D_a \tau]^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{r^2}{4D_a \tau} - \mu\tau \right\}$$

— функция Грина уравнения диффузии с учетом поглощения. Интеграл от нее

$$Q(\tau) \equiv \int_V d\mathbf{r} G_a(\mathbf{r}, \tau) = e^{-\mu\tau}$$

есть вероятность выживания возбужденного состояния к моменту τ после его возникновения,

$$\int_V d\mathbf{r} G_a(\mathbf{r}, \tau) = Q(\tau),$$

так что если

$$G_a(\mathbf{r} | \tau) = \frac{1}{[4\pi D_a \tau]^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{r^2}{4D_a \tau} \right\}$$

— нормированное на единицу условное распределение случайного смещения диффундирующего атома за время τ , то

$$G_a(\mathbf{r}, \tau) = G_a(\mathbf{r} | \tau) Q(\tau).$$

В стационарном случае, когда $F(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r})$, выражение (16) принимает вид

$$N(\mathbf{r}) = \int_V d\mathbf{r}' \frac{1}{4\pi D_a |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp \left\{ -\sqrt{\frac{\mu}{D_a}} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right\} F(\mathbf{r}'). \quad (17)$$

В пренебрежении диффузией возбужденных атомов (предположение 7 стандартной модели) уравнение (13) становится уравнением баланса

$$\frac{\partial N}{\partial t} = F(\mathbf{r}, t) - F'(\mathbf{r}, t),$$

а соотношения (16) и (17) принимают соответственно вид

$$N(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty d\tau e^{-\mu\tau} F(\mathbf{r}, t - \tau), \quad N(\mathbf{r}) = \mu^{-1} F(\mathbf{r}).$$

3.3. Уравнения для скоростей переходов. Введем спектрально-угловую СВ $F(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t)$, так что произведение $F(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) d\mathbf{\Omega} d\omega$ равно скорости возбуждений в единице объема, создаваемой фотонами с направлениями из $d\mathbf{\Omega}$ и частотами из интервала $(\omega, \omega + d\omega)$. Поскольку переходы $0 \rightarrow 1$ в НТП обусловлены только радиационным механизмом, имеет место равенство

$$\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega} \int_0^\infty d\omega F(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = F(\mathbf{r}, t).$$

СД складывается из двух частей — термализационной и радиационной,

$$F'(\mathbf{r}, t) = F'_T(\mathbf{r}, t) + F'_P(\mathbf{r}, t).$$

Спектрально-угловая СД $F'(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t)$ имеет смысл лишь для радиационной компоненты (по этой причине мы опускаем индекс «р»): произведение $F'(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) d\mathbf{\Omega} d\omega$ равно скорости девозбуждений в единичном объеме, сопровождаемых излучением фотонов в телесный угол $d\mathbf{\Omega}$ в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$. Очевидно,

$$\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega} \int_0^\infty d\omega F'(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = F'_P(\mathbf{r}, t).$$

Пусть в момент времени t атом, находящийся в точке $\mathbf{r}$, поглотил фотон с частотой ω' и направлением распространения $\mathbf{\Omega}'$ и перешел в возбужденное состояние. В этом состоянии он совершает диффузию в течение случайного времени τ , после чего возвращается в основное состояние. Вероятность того, что это девозбуждение осуществится радиационным путем (вероятность «выживания» фотона) равна $p_s = \gamma/\mu$. Совершая в момент времени $t + \tau$ радиационный переход из возбужденного состояния в основное, атом испускает фотон, совместная плотность распределения («перераспределения») направления и частоты которого $W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega' \mid \tau)$. Последовательность этих процессов — возбуждения, диффузии и девозбуждения, происходящих с одним атомом и двумя фотонами, отражается следующей формулой, связывающей спектрально-угловые СВ и СД:

$$F'(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \gamma \int_V d\mathbf{r}' \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \int_0^\infty d\omega' \int_0^\infty d\tau W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega' \mid \tau) G_a(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) F(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}', \omega', t - \tau). \quad (18)$$

Излученный в момент времени t' в направлении $\mathbf{\Omega}'$ с частотой ω фотон движется в плазме со скоростью c , испытывая многократное упругое (без изменения частоты) рассеяние до следующего неупругого взаимодействия — поглощения, приводящего к возбуждению другого атома. Обозначая функцию Грина (пропагатор) такого фотона через $G_\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t \leftarrow \mathbf{r}', \mathbf{\Omega}', t' \mid \omega)$, выразим скорость возбуждений через скорость девозбуждений:

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \int_V d\mathbf{r}' \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \int_0^t dt' k(\omega) G_\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t \leftarrow \mathbf{r}', \mathbf{\Omega}', t' \mid \omega) F'(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}', \omega, t') + F_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t), \quad (19)$$

где добавлено слагаемое F_1 , описывающее возбуждения, создаваемые внешним по отношению к рассматриваемому объему плазмы источником.

Возбужденный этим фотоном другой атом через некоторое время возвращается в основное состояние и т. д. Процесс этот многократно повторяется, что ведет к дальнейшему распространению возбуждения по объему плазмы. В целом этот процесс описывается системой уравнений (18)–(19).

Принимая предположения 2, 6 и 7 стандартной модели, т.е. полагая $p_s = 1$,

$$G_a(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) \sim \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')Q(\tau)$$

и

$$G_\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t \leftarrow \mathbf{r}', \mathbf{\Omega}', t' \mid \omega) \sim cP(c(t - t') \mid \omega)\delta(\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - c(t - t')\mathbf{\Omega}'),$$

приходим к уравнениям

$$F'(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \int_0^\infty d\omega' \int_0^\infty d\tau q(\tau) W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega' \mid \tau) F(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', \omega', t - \tau) \quad (20)$$

и

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \int_0^{\xi_\Gamma} d\xi p(\xi \mid \omega) F'(\mathbf{r} - \xi\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}, \omega, t - \xi/c) + F_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t).$$

Первое из них показывает, что возбуждение, полученное атомом при поглощении фотона с направлением движения $\mathbf{\Omega}'$ и частотой ω' , снимается путем излучения фотона спустя случайное время τ , при этом атом находится в той же самой точке, а фотон испускается в случайном направлении $\mathbf{\Omega}$ со случайной частотой ω , совместное распределение которых дается плотностью $W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega' \mid \tau)$, зависящей, вообще говоря от времени τ . Второе уравнение указывает на то, что находящийся в точке $\mathbf{r}$ в основном состоянии атом плазмы может быть возбужден как фотоном стороннего источника (второй член справа), так и фотоном, испущенным другим атомом плазмы, находящемся на расстоянии случайного пробега. Фотон перемещается от испустившего его атома до поглотившего со скоростью c , его частота при этом не изменяется.

Исключив из этой системы F' или F , получим замкнутое интегральное уравнение для каждой из скоростей:

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \int_0^{\xi_\Gamma} d\xi \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \int_0^\infty d\omega' \int_0^\infty d\tau p(\xi \mid \omega) W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega' \mid \tau) q(\tau) \times \\ \times F(\mathbf{r} - \xi\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}', \omega', t - \tau - \xi/c) + F_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t), \quad (21)$$

$$F'(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \int_0^\infty d\omega' \int_0^\infty d\tau \int_0^{\xi_\Gamma} d\xi W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega' \mid \tau) q(\tau) p(\xi \mid \omega') \times \\ \times F'(\mathbf{r} - \xi\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}', \omega', t - \tau - \xi/c) + F'_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t),$$

где

$$F'_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \int_0^\infty d\omega' \int_0^\infty d\tau W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega' \mid \tau) q(\tau) F_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', \omega', t - \tau),$$

а ξ_Γ — точка на границе.

Стационарные варианты этих уравнений появляются в предположении о не зависящем от времени источнике

$$F_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = F_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega)$$

и имеют вид

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega) = \int_0^{\xi_\Gamma} d\xi \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \int_0^\infty d\omega' p(\xi | \omega) W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega') F(\mathbf{r} - \mathbf{\Omega}\xi, \mathbf{\Omega}', \omega') + F_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega),$$

$$F'(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega) = \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \int_0^\infty d\omega' \int_0^{\xi_\Gamma} d\xi W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega') p(\xi | \omega') F'(\mathbf{r} - \xi\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}', \omega') + F'_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega),$$

где

$$W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega') \equiv \int_0^\infty W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega' | \tau) q(\tau) d\tau.$$

3.4. Уравнения для потока фотонов. Поскольку возбуждение атомов в НТП осуществляется в основном радиационным путем, имеем

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = k(\omega) \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t), \quad (22)$$

где $k(\omega)$ — линейный коэффициент поглощения фотона с частотой ω , а $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t)$ — спектрально-угловая плотность потока, связанная со спектрально-угловой интенсивностью $I_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$ соотношением

$$\hbar\omega\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = I_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t).$$

Второе слагаемое в правой части (21) выражается через плотность потока нерассеянного излучения Φ_0 :

$$F_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = k(\omega) \Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t),$$

связанную с объемной плотностью сторонних источников $S(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t)$, соотношениями

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \nabla + \sigma(\omega) \right] \Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t), \quad (23)$$

$$\Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \int_0^{\xi_\Gamma} d\xi P(\xi | \omega) S(\mathbf{r} - \xi\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}, \omega, t - \xi/c) + P(\xi | \omega) \Psi(\mathbf{r} - \mathbf{\Omega}\xi_\Gamma, \mathbf{\Omega}, \omega, t). \quad (24)$$

Здесь

$$P(\xi | \omega) = \int_\xi^\infty p(\xi' | \omega) d\xi' = e^{-\sigma(\omega)\xi},$$

$\sigma(\omega) = \sigma_{\text{el}} + k(\omega)$ — линейный коэффициент взаимодействия фотона частоты ω со средой, а $\xi_\Gamma \equiv \xi_\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ — расстояние от точки $\mathbf{r}$ до границы Γ в направлении, противоположном $\mathbf{\Omega}$ (граница предполагается невогнутой неотражающей поверхностью). Функция $\Psi(\mathbf{r}_\Gamma, \mathbf{\Omega}, \omega, t)$ описывает плотность потока сторонних фотонов, падающих на границу плазмы извне.

В сумме с плотностью источников сторонних фотонов S и скоростью упругих (без возбуждения атомов и изменения частоты) рассеяний

$$S_{\text{упр}}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \sigma_{\text{эфф}} \int d\mathbf{\Omega}' V(\mathbf{\Omega} \leftarrow \mathbf{\Omega}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', \omega, t)$$

СД $F'(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t)$ дает эффективный источник фотонов с плотностью

$$S_{\text{эфф}}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = F'(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) + S_{\text{упр}}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) + S(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t),$$

на который также распространяются соотношения (23) и (24). Первое из них дает

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \nabla + \sigma(\omega) \right] \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = F'(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) + S_{\text{упр}}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) + S(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t).$$

В свою очередь, спектрально-угловая СД выражается через плотность потока соотношением, вытекающим из (20) и (22):

$$F'(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \int_0^\infty d\omega' \int_0^\infty d\tau q(\tau) W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega' | \tau) k(\omega) \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', \omega', t - \tau).$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \nabla + \sigma(\omega) \right] \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \\ = \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \int_0^\infty d\omega' \int_0^\infty d\tau q(\tau) W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega' | \tau) k(\omega') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', \omega', t - \tau) + \\ + \sigma_{\text{упр}} \int d\mathbf{\Omega}' V(\mathbf{\Omega} \leftarrow \mathbf{\Omega}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', \omega, t) + S(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t). \end{aligned} \quad (25)$$

Применяя предположение 7 стандартной модели, перепишем это уравнение в виде

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \nabla + k(\omega) \right] \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \\ = \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \int_0^\infty d\omega' \int_0^\infty d\tau q(\tau) W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega' | \tau) k(\omega') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', \omega', t - \tau) + S(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t). \end{aligned} \quad (26)$$

Эквивалентное ему интегральное уравнение переноса имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \int_0^{\xi_\Gamma} d\xi \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \int_0^\infty d\omega' \int_0^\infty d\tau P(\xi | \omega) W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega' | \tau) q(\tau) k(\omega') \times \\ \times \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{\Omega}\xi, \mathbf{\Omega}', \omega', t - \tau - \xi/c) + \Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t). \end{aligned}$$

Приведем предельные формы уравнений (25)–(26). В пределе А (формально соответствующем $q(\tau) = \delta(\tau)$) получаем уравнения

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \nabla + k(\omega) \right] \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \\ = \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \int_0^\infty d\omega' W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega' | 0) k(\omega) \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', \omega', t) + S(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t); \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \int_0^{\xi_\Gamma} d\xi \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \int_0^\infty d\omega' \times \\ \times P(\xi | \omega) W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega' | 0) k(\omega') \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{\Omega}\xi, \mathbf{\Omega}', \omega', t - \xi/c) + \Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t), \end{aligned} \quad (28)$$

первое из которых является линеаризованным уравнением Больцмана, второе — интегральным уравнением переноса, обобщающим уравнения Хвольсона (в оптике мутных сред) и Пайерлса (в нейтронной физике).

В пределе В:

$$\begin{aligned} [\mathbf{\Omega} \nabla + k(\omega)] \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \\ = \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \int_0^\infty d\omega' \int_0^\infty d\tau q(\tau) W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega' | \tau) k(\omega) \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', \omega', t - \tau) + S(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t); \end{aligned}$$

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \int_0^{\xi_\Gamma} d\xi \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \int_0^\infty d\omega' \int_0^\infty d\tau \times \\ \times P(\xi | \omega) W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega' | \tau) q(\tau) k(\omega') \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{\Omega}\xi, \mathbf{\Omega}', \omega', t - \tau) + \Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t).$$

Следует заметить, что существует по меньшей мере два косвенных определения спектрально-углового потока: через плотность (концентрацию) фотонов $n(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t)$,

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = cn(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t),$$

и через СВ,

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = k(\omega)F(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t).$$

В предельном случае А применимы оба эти определения, в случае же В первое из них теряет смысл.

3.5. Уравнения для плотности возбуждений. Вернемся к уравнениям баланса для ПВА. В соответствии с предположением 2 стандартной модели исключим из рассмотрения столкновительный механизм девозбуждения, оставив только радиационный, т.е. примем $\mu = \gamma$. Тогда

$$\frac{\partial N(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\gamma N(\mathbf{r}, t) + F(\mathbf{r}, t), \\ N(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty d\tau e^{-\gamma\tau} F(\mathbf{r}, t - \tau). \quad (29)$$

Используя предположения 8 и 9 стандартной модели,

$$W(\mathbf{\Omega}, \omega \leftarrow \mathbf{\Omega}', \omega' | \tau) = \frac{1}{4\pi} \varepsilon(\omega),$$

из (21) получим

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \int_0^{\xi_\Gamma} d\xi \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \int_0^\infty d\omega' p(\xi | \omega) \frac{1}{4\pi} \varepsilon(\omega) \int_0^\infty d\tau \gamma e^{-\gamma\tau} F(\mathbf{r} - \mathbf{\Omega}\xi, \mathbf{\Omega}', \omega', t - \tau - \xi/c) + \\ + F_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \gamma \int_0^{\xi_\Gamma} d\xi p(\xi | \omega) \frac{1}{4\pi} \varepsilon(\omega) \int_0^\infty d\tau e^{-\gamma\tau} F(\mathbf{r} - \mathbf{\Omega}\xi, t - \tau - \xi/c) + F_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \\ = \gamma \int_0^{\xi_\Gamma} d\xi p(\xi | \omega) \frac{1}{4\pi} \varepsilon(\omega) N(\mathbf{r} - \mathbf{\Omega}\xi, t - \xi/c) + F_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t).$$

Интегрируя обе части этого равенства по $\mathbf{\Omega}$ и ω и учитывая соотношение (29), находим:

$$F(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega} \int_0^\infty d\omega F(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \omega, t) = \\ = \gamma \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega} \int_0^{\xi_\Gamma} d\xi \frac{\langle p(\xi | \omega) \rangle}{4\pi} \int_0^\infty d\tau e^{-\gamma\tau} F(\mathbf{r} - \mathbf{\Omega}\xi, t - \tau - \xi/c) + F_1(\mathbf{r}, t) = \\ = \gamma \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega} \int_0^{\xi_\Gamma} d\xi \frac{\langle p(\xi | \omega) \rangle}{4\pi} N(\mathbf{r} - \mathbf{\Omega}\xi, t - \xi/c) + F_1(\mathbf{r}, t) = \\ = \mu \int_V d\mathbf{r}' K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) + F_1(\mathbf{r}, t), \quad (30)$$

где $K(\xi) = \langle p(\xi | \omega) \rangle / (4\pi\xi^2)$ и

$$\langle p(\xi | \omega) \rangle = \int_0^\infty p(\xi | \omega) \varepsilon(\omega) d\omega = \int_0^\infty k(\omega) e^{-k(\omega)\xi} \varepsilon(\omega) d\omega$$

— усредненная по частоте переизлученного фотона плотность распределения пробега. Подставляя (30) в правую часть уравнения баланса, получим интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial N(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\gamma N(\mathbf{r}, t) + \gamma \int_V d\mathbf{r}' K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) + F_1(\mathbf{r}, t). \quad (31)$$

Эквивалентное ему интегральное уравнение имеет вид

$$N(\mathbf{r}, t) = \gamma \int_0^\infty d\tau e^{-\gamma\tau} \int_V d\mathbf{r}' K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N(\mathbf{r}', t - \tau - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) + N_1(\mathbf{r}, t), \quad (32)$$

где

$$N_1(\mathbf{r}, \tau) = \int_0^\infty d\tau e^{-\gamma\tau} F_1(\mathbf{r}, t - \tau).$$

В пределе А, соответствующем $\gamma \rightarrow \infty$, оба эти уравнения (интегро-дифференциальное и интегральное) совпадают:

$$N(\mathbf{r}, t) = \int_V d\mathbf{r}' K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) + N_1(\mathbf{r}, \tau),$$

где

$$N_1(\mathbf{r}, t) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma^{-1} F(\mathbf{r}, t).$$

В противоположном пределе В мы приходим к уравнениям

$$\frac{\partial N(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\gamma N(\mathbf{r}, t) + \gamma \int_V d\mathbf{r}' K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N(\mathbf{r}', t) + F_1(\mathbf{r}, t), \quad (33)$$

$$N(\mathbf{r}, t) = \gamma \int_0^\infty d\tau e^{-\gamma\tau} \int_V d\mathbf{r}' K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N(\mathbf{r}', t - \tau) + N_1(\mathbf{r}, t),$$

первое из которых и есть уравнение Бибермана—Холстейна. В стационарном случае оба эти уравнения принимают одинаковый вид интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$N(\mathbf{r}) = \int_V d\mathbf{r}' K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N(\mathbf{r}') + N_1(\mathbf{r}). \quad (34)$$

4. ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА

4.1. Уравнение Бибермана—Холстейна. Большинство расчетов проводится в приближении полного перераспределения частот (ППЧ), в котором частота рассеянного фотона предполагается не зависящей от его начальной частоты (напомним, что речь идет об узком интервале частот вблизи центра спектральной линии ω_0):

$$W(\Omega, \omega \leftarrow \Omega', \omega' | \tau) = \frac{1}{4\pi} \varepsilon(\omega).$$

Этот процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial N(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -(\beta + \gamma) N(\mathbf{r}, t) + \gamma \int_V K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \quad (35)$$

с нормированным на единицу (в бесконечной однородной среде) сферически симметричным ядром

$$K(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^\infty k(\omega) \exp(-k(\omega)r) \varepsilon(\omega) d\omega,$$

соответствующим распределению свободных пробегов

$$P(R > \xi) = \int_0^\infty \varepsilon(\omega) \exp(-k(\omega)\xi) d\omega.$$

Важнейшей особенностью ядра является степенной характер его асимптотики:

$$K(r) \sim Ar^{-3-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1),$$

возникающий в результате использования приближения локального термодинамического равновесия ($\varepsilon(\omega) = \text{const} \cdot k(\omega)$) при усреднении по профилям спектральных линий типа Лоренца и Фойхта.

Стационарный аналог уравнения (35)

$$(\beta + \gamma)N(\mathbf{r}) = \gamma \int_V K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}'$$

впервые получен Биберманом (см. [2]). Нестационарное уравнение (35) без учета возбуждений и девозбуждений столкновительной природы было выведено Холстейном (см. [18]). По этим причинам уравнение (35) вместе с дальнейшими его модификациями, учитывающими другие факторы (переходы на другие энергетические уровни, вынужденное испускание и пр.) называют *уравнением Бибермана—Холстейна* (БХ). Объединение членов с множителем γ приводит к появлению в правой части уравнения оператора

$$\int_V K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) [N(\mathbf{r}') - N(\mathbf{r})] d\mathbf{r}',$$

в асимптотике больших расстояний в *безграничной однородной среде* ($V \rightarrow \mathbb{R}^3$) пропорционального оператору Лапласа в дробной степени $(-\Delta)^{\alpha/2}$ (см. [9, 11]), впервые введенному А. С. Мониным в задаче о турбулентной диффузии (см. [6]).

4.2. Проблема определения границ. Граница между двумя средами (или двумя фазами одной среды) в обычной (локальной) теории переноса — это непрерывная поверхность, разделяющая две области среды с разными макроскопическими характеристиками (сечением рассеяния $\Sigma_s(\mathbf{r})$, сечением захвата $\Sigma_c(\mathbf{r})$, полным сечением взаимодействия частиц со средой $\Sigma_s(\mathbf{r}) = \Sigma_s(\mathbf{r}) + \Sigma_c(\mathbf{r})$ и др. В пределах каждой из разделяемых однородных областей эти характеристики постоянны, при переходе же через границу меняются скачкообразно. В рамках газокинетической (больцмановской) концепции столкновений все ясно: подходящая к границе частица движется по прямой, вероятность ее взаимодействия со средой на предстоящем элементе пути dx определяется произведением $\Sigma(\mathbf{r}) dx$, что в безграничной среде приводит к экспоненциальному распределению (марковский процесс), а в неоднородной позволяет продолжить моделирование дальнейшего движения частицы из любой точки, которой она достигла, достаточно лишь знать направление ее движения.

В рассматриваемой нами модели БХ-процесс нелокален: взаимодействие частицы со средой описывается ядром $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ интегрального оператора, зависящего от двух точек в данной неоднородной среде, и каждая из них может находиться по любую сторону границы. Более того, отмечая отсутствие скорости в уравнении Бибермана—Холстейна, мы видим, что движение частицы в этой модели — это просто исчезновение ее на некоторое (случайное, с экспоненциальным распределением) время и появление ее в другой, возможно, весьма далекой точке пространства. Два этих события не разделены никаким временным интервалом, они происходят *одномоментно*. Таким образом, работая в рамках нелокальной теории, мы лишаемся не только понятия сечения

Рис. 4. Концентрация возбужденных атомов в бесконечном цилиндре радиусом 1, 10 и 100 ме-
дианных пробегов (источник возбуждений на оси). S_G относится к случаю гауссова начального
возбуждения. Сплошная кривая 2 соответствует безграничной среде, штриховая кривая 1 пред-
ставляет результаты конечно-разностного метода (см. [4]).

как локальной характеристики взаимодействия частицы со средой, но и самого понятия *пересечения поверхности*. Последнее обстоятельство понуждает нас к формальному определению границы, точнее, к *выбору модели границы*, поскольку решение этого вопроса неоднозначно. Заметим, что похожая (хотя и в менее острой постановке) проблема возникает и в стандартной теории переноса нейтронов. Там вводится понятие *черной среды* как среды с бесконечно большим сечением поглощения: входящая в такую среду частица (точнее, пересекающая границу с ней) сразу исчезает. В нелокальной модели понятие пересечения, как указывалось, не вполне определено: отсутствие времени не позволяет упорядочить точки столкновений, но применение метода Монте-Карло, осуществляющего *последовательное* выстраивание этих точек в рамках одной траектории $\{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots\}$, дает возможность определить *пересечение* поверхности S , отделяющей область V от остального пространства, как отрезок траектории $[\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{n+1}]$, удовлетворяющий условию $\mathbf{r}_n \in V$, $\mathbf{r}_{n+1} \in \bar{V}$, где $\bar{V}$ — область, лежащая за пределами поверхности S . Иными словами, как только очередной узел траектории, строящейся в однородной среде, оказывается за пределами геометрической области V среды, эта траектория заканчивается. Назовем обладающую таким свойством окружающую V среду *серой средой*. Результаты расчета методом Монте-Карло для цилиндров конечных радиусов и бесконечной длины, погруженных в такую среду, показаны на рис. 4.

4.3. Эффект серой границы в сферической геометрии. Путем сопоставления результатов моделирования методом Монте-Карло процесса в области, ограниченной серой поверхностью радиуса R , с аналитическим решением уравнения Бибермана—Холстейна для безграничной среды исследовано влияние границы на распределение возбуждений, генерированных дельта-источником, находящемся в центре сферы (см. рис. 5). Установлено, что существует приграничный слой, в котором концентрация возбужденных атомов спадает очень быстро, что является следствием безвозвратного ухода фотонов из сферы: чем меньше α , тем больше эта вероятность, тем тоньше этот слой, при $\alpha < 0,25$ практически исчезающим совсем. Во внутренней области

Рис. 5. Функция $b(\alpha, r, R)$ при разных $\alpha \in \{0,5; 1,0; 1,5\}$ и разных радиусах $R \in \{10^2; 10^3; 10^4\}$, выраженных в медианах пробега. Символом (exp) отмечена кривая для процесса с экспоненциальным пробегом.

сферы, не включающей эту оболочку, концентрация возбуждений убывает с увеличением расстояния от центра по степенному закону, совпадающему с решением для безграничной среды. Сопоставление распределений возбужденных атомов в сферической области однородной безграничной среды и в однородной ограниченной сфере радиуса R , помещенной в *серую среду*, показало, что величина

$$b^{(\alpha)}(r, R) = 1 - \frac{N^{(\alpha)}(r, R)}{N^{(\alpha)}(r, \infty)},$$

выраженная через α и отношение r/R , перестает зависеть от радиуса сферы R при R , превышающих несколько медианных пробегов¹. В связи с этим вместо $b^{(\alpha)}(r, R)$, имеет смысл ввести функцию

$$B^{(\alpha)}\left(\frac{r}{R}\right) = 1 - \frac{N^{(\alpha)}(r, R)}{N^{(\alpha)}(r, \infty)}.$$

Подчеркнем, что знаменатель вычитаемого по смыслу является асимптотическим решением решением уравнения Бибермана—Холстейна в безграничной однородной среде, выражающееся через устойчивые плотности Леви—Фельдгейма. С определенной осторожностью эта формула может быть использована и для оценки граничного эффекта в случае плоской границы.

4.4. Отражение от плоской границы. Отражение от плоской *прозрачной* границы, пересекая которую частица безвозвратно покидает аномально рассеивающую среду, рассматривалась в [31], посвященной астрофизической проблеме ускорения космических лучей галактиками. В стандартной теории переноса эта задача именуется проблемой Милна и допускает аналитические решения. В частности, для распределения времени возвращения фотона, попадающего в

¹Из-за расходимости среднего пробега пространственные переменные выражаются в медианных пробегах, символ ∞ в аргументе означает безграничную однородную среду

Рис. 6. Распределения числа столкновений фотона в полубесконечной фрактальной среде при различных α .

полупространство от изотропного источника на границе, дается выражением

$$w(t) = t^{-1} e^{-\sigma vt/2} I_1 \left(\frac{\sigma vt}{2} \right)$$

(см. [22]). В аномальном случае такого результата получить не удалось, но прямое моделирование методом Монте-Карло блужданий частиц с распределением пробегов $P(\xi > x) \propto x^{-\alpha}$ привело к удивительному заключению: распределение числа столкновений до выхода частицы из полупространства не зависит от распределения пробегов (в данном случае α) (рис. 6).

4.5. Нестационарный перенос в тонком длинном цилиндре. Эта задача рассматривалась В. А. Фоком в 1924 г. (см. [13]) и по своей постановке не была связана с резонансным переносом, а лишь демонстрировала модификацию диффузионного уравнения путем введения конечной скорости свободного движения частиц (в данном случае, фотонов) между столкновениями в модели одномерного блуждания. Вероятность изменения направления движения на элементе пути была взята пропорциональной длине этого элемента, так что свободные пробеги имели экспоненциальное распределение, приведшее в конечном итоге к телеграфному варианту теории диффузии. Описываемый этой моделью процесс очень похож на распространение света в длинном тонком цилиндре оптически прозрачной среды с зеркально отражающими (с внутренней стороны) боковыми поверхностями. Фотоны лишь чуть-чуть изменяют поперечные импульсы, отражаясь от стенок и двигаясь вдоль оси цилиндра. Но вот если этот цилиндр наполнен, скажем, парами ртути, то распределение пробегов существенно изменится, хотя фотоны будут по-прежнему блуждать вдоль оси. Мы получим, таким образом, одномерную модель процесса Бибермана—Холстейна, пробеги в которой характеризуются степенной асимптотикой распределений. Временная эволюция распределения возбужденных атомов в этой задаче, удовлетворяющая дробно-дифференциальному обобщению уравнения Фока, приведена в [30]. Ее асимптотическая (при $t \rightarrow \infty$) часть удовлетворяет дробно-дифференциальному аналогу одномерного уравнения Больцмана

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha + \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha \right] \Phi(x, t) = \frac{t^{-\alpha}}{2\Gamma(1-\alpha)} [\delta(x - ct) + \delta(x + ct)],$$

решение которого имеет вид

$$\Phi(x, t) = \frac{2 \sin \pi \alpha}{\pi} \frac{(1 - x^2/c^2 t^2)^{\alpha-1}}{(1 + x/ct)^{2\alpha} + (1 - x/ct)^{2\alpha} + 2(1 - x^2/c^2 t^2)^\alpha \cos(\pi \alpha)}, \quad -vt < x < vt.$$

5. КВАНТОВАЯ ОПТИКА

5.1. Уравнение лазерного луча. Обычно взаимодействие резонансного лазерного излучения с веществом рассматривается в монохроматическом приближении. Однако реальная квантовая система взаимодействует с окружающей средой, влияние которой интерпретируется как статистический шум, дополняющий «вакуумное» взаимодействие атома и поля (см. [3]). Для адекватного описания такого шума использовалась диффузионная модель (броуновское движение), телеграфная модель, предполагающая случайные переходы между двумя значениями в случайные моменты времени, амплитудные и фазовые флуктуации комплексного гауссова поля, и другие модели. В [20] в качестве модели случайной фазы ϕ стохастического поля

$$E(t) = E_0 \exp[-i\omega_L t - i\phi] + \text{к. с.}$$

использован скачкообразный процесс $\phi(t) = \sum_i \beta_i \delta(t - t_i)$ со скачками β_i , распределенными по гауссову закону с $\langle \beta_i \rangle = 0$. Очередной скачок фазы β_i зависел от предыдущего β_{i-1} через условную плотность распределения

$$p(\beta_i | \beta_{i-1}) = \frac{1}{b[2\pi(1 - \gamma^2)]^{1/2}} \exp\left[-\frac{(\beta_i - \gamma\beta_{i-1})^2}{2b^2(1 - \gamma^2)}\right],$$

где $b = \sqrt{\langle \beta^2 \rangle}$, а γ — коэффициент корреляции между последовательными скачками фазы. При $\gamma = 0$ скачки некоррелированы и, следовательно, независимы (по свойству гауссова процесса), так что модель становится марковской. При $\gamma = 1$ скачки полностью коррелированы ($\beta_i = \beta_{i-1}$), при $\gamma = -1$ имеет место полная антикорреляция ($\beta_i = -\beta_{i-1}$), и система совершает скачки между двумя состояниями. Это — телеграфный процесс, исследованный во многих работах (см. [5] и др.). Интересной особенностью модели Кофмана является зависимость спектральных компонент резонансной флюоресценции от интенсивности поля. В пределе малых скачков, когда $b^2 \ll 1$ и $|\gamma|$ не слишком близко к 1, корреляционная функция $k(t)$ подчиняется немарковскому уравнению Вольтерра

$$\frac{dk}{dt} = -\nu_0 k - \frac{2\gamma\nu_0}{\tau_0} \int_0^t e^{-\nu_\beta(t-t')} k(t') dt',$$

в котором τ_0 — среднее время между последовательными скачками, $\nu_\beta = (1 - \gamma)/\tau_0$ и $\nu_0 = b^2/2\tau_0$. При $\gamma = 0$ интегральный член исчезает, и уравнение становится марковским, приводящим к лоренцевской форме линии, тогда как при $\gamma \neq 0$ оно, очевидно, немарковское и имеет решением функцию

$$k(t) = \left[1 + \frac{\gamma b^2}{(1 - \gamma)^2}\right] e^{-\nu t} - \frac{\gamma b^2}{(1 - \gamma)^2} e^{-\nu_\beta t},$$

где $\nu = \nu_0(1 + \gamma)/(1 - \gamma)$.

5.2. Прохождение лазерного луча через фрактальную среду. А. М. Нахушев (см. [7]) рассмотрел распространение лазерного излучения через слой ($z_0 \leq z \leq z_0 + l$) поглощающей среды фрактального типа. Заменяя стандартное уравнение непрерывности для концентрации молекул $n(z, t)$ и плотности тока $q(z, t)$,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial z}$$

его дробным аналогом,

$$\tau D_t^\alpha = -\frac{\partial q}{\partial z}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

и дополнив его вторым законом Фурье с коэффициентом диффузии, являющимся линейной функцией самой концентрации,

$$q = -\frac{\partial[(an + b)n]}{\partial z}, \quad a, b = \text{const} > 0,$$

А. М. Нахушев довольно смело интерпретировал a как количественную меру синергетического характера взаимодействия лазерного луча с поглощающей средой. Объединение обоих этих уравнений дает

$$\tau D_t^\alpha n = \frac{\partial^2[(an + b)n]}{\partial z^2}.$$

Дифференцируя это уравнение по t и вводя обозначение

$$\bar{n}(z, t) = \frac{1}{l} \int_{z_0}^{z_0+l} n(z, t) dz,$$

аппроксимируем его уравнением

$$\tau D_t^{\alpha+1} n = 2a \frac{\partial \bar{n}}{\partial t} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}.$$

При специальном нелокальном условии (*условии Самарского*)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_0}^{z_0+l} n(z, t) dz = \frac{l}{2a} |t - \tau|^m \text{sign}(t - \tau), \quad m > 0,$$

заменой переменных $x = z - z_0$, $y = t - t_1$, $u(x, y) = n(x + z_0, y + t_1)$ А. М. Нахушев получил уравнение

$${}_0D_y^{\alpha+1} u(x, y) + \text{sign } y \cdot |y|^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

являющееся дробным обобщением уравнения Хеллерштадта (см. [7]).

5.3. Лазер на свободных электронах. Лазер на свободных электронах (ЛСЭ) был разработан в Стэнфордском университете (США) в конце 1970-х гг. В отличие от обычных лазеров активная среда в ЛСЭ состоит не из атомов и молекул, а из пучка свободных электронов, распространяющихся при релятивистских скоростях в пространственно-периодическом магните (ондуляторе), где электроны совершают поперечные колебания и излучают синхротронное излучение под действием силы Лоренца (см. [17]). Безразмерная амплитуда комплексного поля a описывается интегро-дифференциальным уравнением Вольтерра первого рода, вытекающим из системы уравнений Лоренца—Максвелла:

$$\frac{da(t)}{dt} = \mu \int_0^t \tau e^{i\nu\tau} a(t - \tau) d\tau, \quad a(0) = 1, \quad (36)$$

где $t \in [0, 1]$ — безразмерная временная переменная, μ — комплексная константа, пропорциональная коэффициенту усилению малого сигнала, ν — параметр расстройки. Точное замкнутое решение этой системы, подходящее для численного расчета, приведено в [16]:

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n t^{3n} \Phi^*(2n, 3n + 1; i\nu t),$$

где

$$\Phi^*(a, c; z) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{c-a-1} e^{zu} du, \quad \text{Re } a > 0, \quad \text{Re } c > 0,$$

— модифицированная функция Куммера, удовлетворяющая интегральному соотношению

$$\int_0^t \Phi^*(a, c; k\tau) \Phi^*(a', c'; k(t-\tau)) \tau^{c-1} (t-\tau)^{c'-1} d\tau = \Phi^*(a+a', c+c'; kt).$$

Дробное обобщение уравнения (36)

$${}_0D_t^\alpha a(t) = \mu \int_0^t \tau e^{i\nu\tau} a(t-\tau) d\tau$$

с начальными условиями

$${}_0D_t^{\alpha-k} a(t)|_{t=0} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad n-1 < \alpha \leq n,$$

рассматривалось в [15], где было показано, что если $a(t)$ имеет суммируемую дробную производную, то задача Коши имеет единственное решение, имеющее вид

$$a(t) = a_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^j a_j(\alpha, \nu; t),$$

где

$$a_0(t) = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)} t^{\alpha-k}.$$

Для доказательства этого утверждения авторы преобразовали исходное уравнение к виду

$$e^{-i\nu t} {}_0D_t^\alpha a(t) = \mu \int_0^t (t-\theta) e^{-\nu\theta} a(\theta) d\theta = \mu D_t^{-2} [e^{-i\nu t} a(t)],$$

из которого следует, что

$$a(t) = a_0(t) + \mu {}_0I_t^\alpha \left[\int_0^t (t-\theta) a(\theta) d\theta \right].$$

Применяя правило Дирихле

$$\int_0^t d\tau \int_0^\tau d\theta \dots = \int_0^t d\theta \int_\theta^t d\tau \dots$$

преобразуем это уравнение к эквивалентной интегральной форме:

$$a(t) = a_0(t) + \mu \int_0^t (t-\theta)^{\alpha+1} \Phi^*(2, \alpha+2; i\nu(t-\theta)) a(\theta) d\theta.$$

Это интегральное уравнение Вольтерра с непрерывным ядром; его решение можно вычислить как предел последовательности

$$a_m(t) = a_0(t) + \mu \int_0^t (t-\theta)^{\alpha+1} \Phi^*(2, \alpha+2; i\nu(t-\theta)) a(\theta) d\theta.$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи представляется в виде

$$a(t) = a_0(t) + \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{\infty} k(j, t, \theta) \right) a_0(\theta) d\theta,$$

где

$$k(j, t, \theta) = \mu^j (t-\theta)^{j(\alpha+2)-1} \Phi^*(2j, j(\alpha+2); i\nu(t-\theta)).$$

Применение интегрального соотношения для Φ^* завершает доказательство.

5.4. Новые атомные технологии. Быстрый прогресс в атомной оптике, наблюдавшийся в течение двух последних десятилетий, стимулировал разработку новых эффективных технологий (см. [1]). Области охлажденных атомов с почти нулевой скоростью были созданы путем избирательного захвата населенностей по скоростям. В [21] этот подход был распространен на создание атомного пучка с ненулевым распределением скорости. Математически этот механизм основан на теории устойчивых процессов Леви, обобщающей стандартную гауссову диффузию (см. [14]) и в математическом отношении связанной с дробно-дифференциальным аппаратом. Поведение атомов с общим типом Λ — конфигурации внутренних уровней в поле двух встречных лазерных лучей — следует из квантовых уравнений для матрицы атомной плотности с учетом эффекта отдачи, вызванного индуцированными и спонтанными переходами. В режиме слабой насыщенности $g = dE/\hbar\Gamma \ll 1$ и при условии $t \gg 1/\Gamma$ (здесь Γ — полная ширина двух уровней, $\Gamma = \gamma_0 + \gamma$), уравнения для матричных элементов плотности основного состояния $n(p, t) = \rho_{11}(p, t) + \rho_{22}(p, t)$ и $\mu(p, t) + i\nu(p, t)$ принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} &= g^2\Gamma \left[-F(p, t) + \frac{\gamma}{2\Gamma} \int_{-1}^1 F(p + 2\hbar kx, t) dx \right], \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} &= -g^2\Gamma F(p, t) + \frac{2k(p - p_0)}{m} \nu(p, t), \\ \frac{\partial \nu}{\partial t} &= -g^2\Gamma G(p, t) - \frac{2k(p - p_0)}{m} \mu(p, t),\end{aligned}\tag{37}$$

где использовано обозначение

$$\frac{n + \mu + i\nu}{1 + i(2k/m\Gamma)(p - p_0)} = F + iG.$$

Следует отметить (см. [21]), что населенности $(n + \mu)/2 \equiv n_C$ и $(n - \mu)/2 \equiv n_{NC}$ относятся к связанному ($|\psi_C\rangle = (|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$) и несвязанному ($|\psi_{NC}\rangle = (|1\rangle - |2\rangle)/\sqrt{2}$) состояниям и μ является их разностью. Процесс захвата в ловушку (пленения) атомов происходит в окрестности «темного состояния» $|\psi_{NC}(p_0)\rangle$ с ненулевым импульсом p_0 .

Интегрирование уравнения для $n(p, t)$ дает распределение

$$n(p, t) = F(p, t) + g^2\Gamma \int_0^t K(p, t - t') F(p, t') dt',$$

содержащее локальную (марковскую) и нелокальную (запаздывающую) составляющие. Последняя доминирует на больших временах, где ядро интегрального оператора может быть аппроксимировано дельта-функцией

$$K(p, t) \cong \frac{\hbar k}{4\omega_R} \sqrt{\frac{\pi g^2\Gamma}{t}} \delta(p - p_0), \quad \omega_R = \frac{\hbar k^2}{2m}.$$

В результате приходим к выражению

$$n(p, t) = F(p, t) + \delta(p - p_0) N_{\text{пл}}(t),\tag{38}$$

содержащему полное число плененных атомов

$$N_{\text{пл}}(t) = A \int_0^t \frac{F(p_0, t') dt'}{\sqrt{\pi(t - t')}},$$

где

$$A = \frac{\pi g^3 \Gamma^{3/2} \hbar k}{4\omega_R}.$$

Подстановка (38) в (37) приводит к уравнению

$$\frac{\partial F(p, t)}{\partial t} + \delta(p - p_0) A \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{F(p_0, t') dt'}{\sqrt{\pi(t - t')}} = g^2 \Gamma \left[-F(p, t) + \frac{\gamma}{2\Gamma} \int_{-1}^1 F(p + 2\hbar k x, t) dx \right],$$

левая часть которого содержит *полупроизводную* (производную дробного порядка $1/2$).

Чтобы решить дробное кинетическое уравнение и найти эволюцию во всей области $1/(g^2\Gamma) \ll t \ll \gamma/(g\omega_R)^2$, авторы работы [21] перешли к безразмерным переменным $\tau = 2\gamma g^2 t/3$, $u = p/\hbar k$, разложили подынтегральное выражение в правой части уравнения до второго порядка и выполнили преобразование Лапласа по времени. В результате было получено уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \lambda - \lambda_0 \right) \hat{F}(u, \lambda) = -\delta(u) + \sigma_0 \delta(u - u_0) \sqrt{\lambda} \hat{F}(u_0, \lambda),$$

где

$$\lambda_0 = \frac{3\gamma_0}{2\gamma}, \quad \sigma_0 = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{g^2 \Gamma}{\omega_R}, \quad u_0 = \frac{p_0}{\hbar k}.$$

Решение этого уравнения приведено в [25]. Для рассмотренного в [21] частного случая $u = u_0 > 0$

$$\hat{F}(u_0, \lambda) = \frac{\exp(-\sqrt{\lambda + \lambda_0} u_0)}{2\sqrt{\lambda + \lambda_0}} + \sigma_0 \sqrt{\lambda}, \quad N(t) \approx N_{\text{пл}}(t) \sim \frac{\tau_0}{\pi t} \exp\left(-\frac{u_0}{\sqrt{\tau_0}}\right),$$

где $\tau_0 = 1/\lambda_0$. Это означает, что распределение времен ожидания характеризуется степенным хвостом $P(T > t) \propto t^{-1/2}$, $t \rightarrow \infty$.

На основе этой теории развивается лазерное охлаждение с целью манипулирования с отдельными атомами — новый технологический процесс, в ходе которого получают атомные ансамбли с температурой в диапазоне нескольких нанокельвин, т.е. со скоростями порядка мм/с. Этот процесс обогатил достаточно широкое поле нанofизических исследований — от спектроскопии сверхвысокого разрешения и атомных часов до атомной интерферометрии и конденсации Бозе—Эйнштейна (см. [1, 14]). Вследствие обмена импульсом с фотонами лазерного излучения и за счет импульса отдачи после акта спонтанного излучения процесс эволюции атомного импульса выглядит как случайное блуждание в импульсном пространстве. Идея метода охлаждения заключается в создании ловушки в окрестности состояния покоя в импульсном пространстве ($\mathbf{p} = 0$). В процессе блуждания атомы могут оказаться в окрестности ловушки, быть захваченными (плененными) ими и оставаться там достаточно долго. В математическом смысле охлаждение характеризуется возрастанием концентрации атомов в малой окрестности точки $\mathbf{p} = 0$ импульсного пространства и уменьшении числа атомов, выполняющих блуждание за пределами этой области. История каждого атома характеризуется последовательностью взаимно независимых случайных величин $T_1, \Theta_1, T_2, \Theta_2, T_3, \Theta_3, \dots$, где Θ_j — случайная длительность j -го пленения, T_j — случайная продолжительность свободных блужданий между j -м и $(j + 1)$ -м пленениями, называемая *временем рециркуляции*. Плотности распределения этих случайных переменных обозначим $q_T(t)$ и $q_\Theta(t)$.

Специальной комбинацией сведенных в одну точку лазерных лучей достигается поведение частоты скачков в окрестности $\mathbf{p} = 0$ по закону

$$R(\mathbf{p}) \simeq \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\nu, \quad p < p_0.$$

В результате получается

$$P(\Theta_j > \theta) \propto A\theta^{-\nu}, \quad \theta \rightarrow \infty,$$

где показатель ν связан с α и размерностью пространства импульсов D отношением $\nu = D/\alpha$.

Концентрация охлажденных атомов $N_0(t)$ пропорциональна вероятности обнаружения атома в начале $f_0(t)$. Последняя функция выражается интегралом

$$f_0(t) = \int_0^t [F(t') - F'(t')] dt'$$

от разности скоростей переходов $F(t)$ and $F'(t)$, удовлетворяющих системе интегральных уравнений (при условии, что движение начинается из окрестности ловушки):

$$F(t) = q_T(t) + \int_0^t F'(t-t')q_T(t') dt', \quad F'(t) = \int_0^t F(t-t')q_\Theta(t') dt'.$$

Выполняя преобразование Лапласа и решая алгебраическое уравнение для трансформант, получим

$$\hat{f}_0(\lambda) = \frac{\hat{q}_T(\lambda)}{\lambda} \cdot \frac{1 - \hat{q}_\Theta(\lambda)}{1 - \hat{q}_T(\lambda)\hat{q}_\Theta(\lambda)}.$$

Из физических соображений следует, что

$$1 - \hat{q}_\Theta(\lambda) \sim A\lambda^\alpha, \quad 1 - \hat{q}_T(\lambda) \sim B\lambda^\beta,$$

где $0 < \alpha, \beta < 1$. В области малых значений λ функция $\hat{f}_0(\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$A\lambda^\alpha \hat{f}_0(\lambda) + B\lambda^\beta \hat{f}_0(\lambda) = A\lambda^{\alpha-1}.$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа, получим

$$[{}_0D_t^\alpha + b{}_0D_t^\beta]f_0(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha}.$$

Решение этого уравнения, получаемое методом функций Грина (см. [9]) имеет вид

$$f_0(t) = t^{\alpha-\beta}E_{\alpha-\beta, \alpha+1-\beta}(-bt^{\alpha-\beta}).$$

Найденные с его помощью численные результаты согласуются с результатами статистического моделирования методом Монте-Карло (см. [25]).

5.5. Флуоресценция нанокристаллов. Флуоресценция полупроводниковых нанокристаллов¹, облучаемых лазером, имеет мерцательный характер: периоды непрерывного излучения (*on-состояния*) чередуются с *off-состояниями*, в которых наночастица не излучает. Эксперименты показывают, что длительности пребывания в этих состояниях случайны и в первом приближении могут рассматриваться как независимые случайные величины $T_1 \equiv T_{\text{он}}$ и $T_0 \equiv T_{\text{офф}}$, распределенные (обе или по крайней мере одна) по степенным законам

$$P(T_1 > t) \equiv \Psi_1(t) \propto t^{-\alpha}, \quad P(T_0 > t) \equiv \Psi_0 \propto t^{-\beta}, \quad 0 < \alpha, \beta < 1.$$

С вероятностной точки зрения мерцающая флуоресценция может быть представлена в виде последовательности переходов системы между двумя указанными состояниями, происходящими в случайные моменты времени (см. [19, 23]). Пример траектории такого типа приведен на рис. 7(а). В действительности ситуация, конечно, сложнее; тем не менее модель двух состояний (*бинарная модель*) качественно предсказывает некоторые статистические закономерности.

Будем отсчитывать продолжительность времени наблюдения t от момента изменения состояния (перехода) и рассматривать процесс $\Theta(t)$, равный суммарной длительности излучения за время наблюдения (см. рис. 7(б)). Введем следующие обозначения:

- 1 и 0 — состояния *он* и *офф*, соответственно;
- ε_1 — вероятность того, что начальным переходом является $0 \rightarrow 1$;
- ε_2 — вероятность того, что начальным переходом является $1 \rightarrow 0$;
- $p_1(\theta | t)d\theta = P(\Theta(t) \in d\theta)$ — вероятность того, что суммарная продолжительность излучения за время наблюдения t принадлежит интервалу $(\theta, \theta + d\theta)$;
- $f_{1 \rightarrow 0}(\theta, t)d\theta dt$ — среднее число переходов $1 \rightarrow 0$ из интервала $(\theta, \theta + d\theta)$ за время $(t, t + dt)$;
- $f_{0 \rightarrow 1}(\theta, t)d\theta dt$ — среднее число переходов $0 \rightarrow 1$ в интервал $(\theta, \theta + d\theta)$ за время $(t, t + dt)$;

¹Раздел написан по материалам совместной с Р. Т. Сибатовым работы [12].

Рис. 7. Стохастическая модель мерцающей флуоресценции: (а) случайная траектория; (б) ее представление в координатах (Θ, t) .

кроме того, положим

$$\Psi_n(t) = \int_t^\infty \psi_n(t') dt' = P(T_n > t), \quad n = 0, 1.$$

Интегральные уравнения, связывающие введенные выше плотности, имеют следующий вид:

$$p_1(\theta | t) = \int_0^\theta f_{0 \rightarrow 1}(\theta - t', t - t') \Psi_1(t') dt' + \int_0^t f_{1 \rightarrow 0}(\theta, t - t') \Psi_0(t') dt', \quad (39)$$

$$f_{1 \rightarrow 0}(\theta, t) = \int_0^\theta f_{0 \rightarrow 1}(\theta - t', t - t') \psi_1(t') dt' + \varepsilon_0 \delta(\theta) \delta(t), \quad (40)$$

$$f_{0 \rightarrow 1}(\theta, t) = \int_0^t f_{1 \rightarrow 0}(\theta, t - t') \psi_0(t') dt' + \varepsilon_1 \delta(\theta) \delta(t). \quad (41)$$

Применив двойное преобразование Лапласа

$$\hat{p}_1(\lambda_1 | \lambda) = \int_0^\infty dt \int_0^t d\theta e^{-\lambda t - \lambda_1 \theta} p_1(\theta | t),$$

получаем

$$\begin{aligned} \hat{p}_1(\lambda_1 | \lambda) &= \hat{f}_{0 \rightarrow 1}(\lambda_1, \lambda) \hat{\Psi}_1(\lambda + \lambda_1) + \hat{f}_{1 \rightarrow 0}(\lambda_1, \lambda) \hat{\Psi}_0(s), \\ \hat{f}_{1 \rightarrow 0}(\lambda_1, \lambda) &= \hat{f}_{0 \rightarrow 1}(\lambda_1, \lambda) \hat{\psi}_1(\lambda + \lambda_1) + \varepsilon_0, \\ \hat{f}_{0 \rightarrow 1}(\lambda_1, \lambda) &= \hat{f}_{1 \rightarrow 0}(\lambda_1, \lambda) \hat{\psi}_0(s) + \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Разрешая эту систему, приходим к трансформантам частот переходов

$$\hat{f}_{1 \rightarrow 0}(\lambda_1, \lambda) = \frac{\varepsilon_1 \hat{\psi}_1(\lambda_1 + \lambda) + \varepsilon_0}{1 - \hat{\psi}_1(\lambda + \lambda_1) \hat{\psi}_0(\lambda)}, \quad \hat{f}_{0 \rightarrow 1}(\lambda_1, \lambda) = \frac{\varepsilon_0 \hat{\psi}_0(\lambda) + \varepsilon_1}{1 - \hat{\psi}_1(\lambda + \lambda_1) \hat{\psi}_0(\lambda)}$$

и выражению для трансформанты искомой плотности:

$$\hat{p}_1(\lambda_1 | \lambda) = \frac{\varepsilon_0 \hat{\psi}_0(\lambda) + \varepsilon_1}{1 - \hat{\psi}_1(\lambda + \lambda_1) \hat{\psi}_0(\lambda)} \frac{1 - \hat{\psi}_1(\lambda + \lambda_1)}{\lambda + \lambda_1} + \frac{\varepsilon_1 \hat{\psi}_1(\lambda + \lambda_1) + \varepsilon_0}{1 - \hat{\psi}_1(\lambda + \lambda_1) \hat{\psi}_0(\lambda)} \frac{1 - \hat{\psi}_0(\lambda)}{\lambda}. \quad (42)$$

Последнее выражение с точностью до обозначений совпадает с результатом, полученным в [19] для характеристической функции плотности распределения интенсивности макроскопической флуоресценции. В [19] эта трансформанта используется для асимптотического анализа параметра Манделя. Мы, обратив трансформанту с помощью дробно-устойчивых распределений, получим в явном виде выражение для самой асимптотической плотности распределения $p_1(\theta | t)$ и покажем, что эта плотность удовлетворяет дробно-дифференциальному уравнению.

В [26] предложен механизм мерцания, основанный на модели диффузионно-контролируемых электронных переходов, который приводит к плотностям распределения он- и off-интервалов в виде «дробных экспонент»:

$$\psi_1(t) = c_1^\alpha t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c_1^\alpha t^\alpha), \quad \psi_0(t) = c_0^\beta t^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-c_0^\beta t^\beta).$$

При $\alpha < 1$ и $\beta < 1$ у этих плотностей распределения имеются «тяжелые» степенные хвосты. При $\alpha \rightarrow 1$ и $\beta \rightarrow 1$ «дробные экспоненты» переходят в обычные экспоненты. Таким образом, изменение всего одного параметра в каждой из плотностей $\psi_1(t)$ и $\psi_0(t)$ позволяет моделировать как степенные, так и экспоненциальные распределения он- и off-интервалов.

Подставляя трансформанты Лапласа этих функций

$$\hat{\psi}_1(\lambda) = \frac{1}{1 + (\lambda/c_1)^\alpha}, \quad \hat{\psi}_0(\lambda) = \frac{1}{1 + (\lambda/c_0)^\beta} \quad (43)$$

в выражение (42), получаем:

$$\hat{p}_1(\lambda_1 | \lambda) = \frac{c_1^{-\alpha}(\lambda + \lambda_1)^{\alpha-1} + c_0^{-\beta} \lambda^{\beta-1} + c_1^{-\alpha} c_0^{-\beta} \lambda^\beta (\lambda + \lambda_1)^\alpha [\varepsilon_1(\lambda + \lambda_1)^{-1} + \varepsilon_0 \lambda^{-1}]}{c_1^{-\alpha}(\lambda + \lambda_1)^\alpha + c_0^{-\beta} \lambda^\beta + c_1^{-\alpha} c_0^{-\beta} (\lambda + \lambda_1)^\alpha \lambda^\beta}. \quad (44)$$

Перепишем последнее соотношение в виде

$$\begin{aligned} \lambda^\beta \hat{p}_1(\lambda_1 | \lambda) + C(\lambda + \lambda_1)^\alpha \hat{p}_1(\lambda_1 | \lambda) + c_1^{-\alpha}(\lambda + \lambda_1)^\alpha \lambda^\beta \hat{p}_1(\lambda_1 | \lambda) = \\ = C(\lambda + \lambda_1)^{\alpha-1} + \lambda^{\beta-1} + c_1^{-\alpha} \lambda^\beta (\lambda + \lambda_1)^\alpha [\varepsilon_1(\lambda + \lambda_1)^{-1} + \varepsilon_0 \lambda^{-1}]. \end{aligned}$$

Здесь $C = c_0^\beta / c_1^\alpha$. Выполняя двойное обратное преобразование Лапласа и учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} d\lambda \int_{\Gamma'} d\lambda_1 \exp(\lambda t + \lambda_1 \theta) (\lambda + \lambda_1)^\alpha \hat{p}_1(\lambda_1 | \lambda) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d\lambda \exp(\lambda t) \exp(-\lambda \theta) {}_0D_{\theta}^{\alpha} \exp(\lambda \theta) \hat{p}_1(\theta | \lambda) = T_t^{-\theta} {}_0D_{\theta}^{\alpha} T_t^{\theta} p_1(\theta t), \end{aligned}$$

где T_t^a — оператор сдвига по времени t на величину a :

$$T_t^a p_1(\theta | t) = p_1(\theta | t + a),$$

приходим к дробно-дифференциальному уравнению для плотности распределения суммарной длительности он-интервалов:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\beta} p_1(\theta | t) + C T_t^{-\theta} {}_0D_{\theta}^{\alpha} T_t^{\theta} p_1(\theta | t) + c_1^{-\alpha} {}_0D_t^{\beta} T_t^{-\theta} {}_0D_{\theta}^{\alpha} T_t^{\theta} p_1(\theta | t) = \\ = C \delta(t - \theta) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} + \delta(\theta) \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1 - \beta)} - \frac{c_1^{-\alpha} \theta^{-\alpha} (t - \theta)^{-\beta}}{\Gamma(1 - \alpha) \Gamma(1 - \beta)} \left(\frac{\alpha \varepsilon_0}{\theta} + \frac{\beta \varepsilon_1}{t - \theta} \right). \end{aligned}$$

Пусть процесс мерцания изучается с момента перехода из off- в он-состояние. Тогда $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_0 = 0$. Из теоремы Таубера следует, что выражение (44) в асимптотике больших времен ($t \gg c_1^{-1}$,

Рис. 8. Сравнение с результатами метода Монте-Карло (крестики).

c_0^{-1}) имеет вид

$$\hat{p}_1(\lambda_1 | \lambda) \sim \frac{C(\lambda + \lambda_1)^{\alpha-1} + \lambda^{\beta-1}}{C(\lambda + \lambda_1)^\alpha + \lambda^\beta}, \quad C = \frac{c_0^\beta}{c_1^\alpha}. \quad (45)$$

Перепишем последнее выражение в виде

$$\left[C(\lambda + \lambda_1)^\alpha + \lambda^\beta \right] \hat{p}_1(\lambda_1 | \lambda) = C(\lambda + \lambda_1)^{\alpha-1} + \lambda^{\beta-1}.$$

Выполняя двойное обратное преобразование Лапласа, приходим к асимптотическому дробно-дифференциальному уравнению для плотности распределения суммарной длительности оп-интервалов:

$${}_0D_t^\beta p_1(\theta | t) + C \, T_t^{-\theta} {}_0D_\theta^\alpha T_t^{+\theta} p_1(\theta | t) = C \, \delta(t - \theta) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} + \delta(\theta) \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1 - \beta)}. \quad (46)$$

Известно (см., например, [8]), что выражение

$$\frac{\lambda^{\beta-1}}{C\lambda_1^\alpha + \lambda^\beta}$$

является результатом двойного ($\lambda \Leftrightarrow t$, $\lambda_1 \Leftrightarrow \theta$) преобразования Лапласа функции

$$(Ct^\beta)^{-1/\alpha} q_+ \left(\theta (Ct^\beta)^{-1/\alpha}; \alpha, \beta \right),$$

где $q_+(t; \alpha, \beta)$ — дробно-устойчивая плотность, выражающаяся через односторонние устойчивые плотности $g_+(t; \alpha)$ и $g_+(t; \beta)$:

$$q_+(t; \alpha, \beta) = \int_0^\infty d\tau \, g_+(\tau; \beta) g_+(t\tau^{-\beta/\alpha}; \alpha) \tau^{\beta/\alpha}.$$

Находя оригинал трансформанты (45)

$$p(\theta | t) = [C(t - \theta)^\beta]^{-1/\alpha} q_+ \left(\theta [C(t - \theta)^\beta]^{-1/\alpha}; \alpha, \beta \right) + \\ + (C^{-1}\theta^\alpha)^{-1/\beta} q_+ \left((t - \theta)(C^{-1}\theta^\alpha)^{-1/\beta}; \beta, \alpha \right). \quad (47)$$

и учитывая соотношение для функций *дробно-устойчивых распределений* (см. [9])

$$Q_+ \left(\xi (C\tau^\beta)^{-1/\alpha}; \alpha, \beta \right) = 1 - Q_+ \left(\tau (C^{-1}\xi^\alpha)^{-1/\beta}; \beta, \alpha \right),$$

перепишем (47) в виде

$$p_1(\theta | t) = \left[1 + \frac{\alpha(t - \theta)}{\beta} \right] (C\theta^\alpha)^{-1/\beta} q_+ \left((t - \theta)(C\theta^\alpha)^{-1/\beta}; \beta, \alpha \right). \quad (48)$$

Сравнение решения (48) с результатами моделирования процесса методом Монте-Карло, представленное на рис. 8, показывает хорошее согласие.

Автор благодарен Е. В. Кожемякиной и О. П. Харловой за помощь в подготовке рукописи к публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барду Ф., Бушо Ж. Ф., Аспе А., Козн-Таннуджи К. Статистика Леви и лазерное охлаждение. — М.: Физматлит, 2005.
2. Биберман Л. М. К теории диффузии резонансного излучения// ЖЭТФ. — 1947. — 17, № 5. — С. 416–426.
3. Бурштейн А. И. Кинетика индуцированной релаксации// ЖЭТФ. — 1965. — 48, № 3. — С. 850–859.
4. Голубовский Ю. Б., Каган Ю. М., Лягущенко Р. И. О заселенности резонансных уровней в разряде цилиндрической конфигурации// Оптика и спектроскопия. — 1971. — 31, № 1. — С. 22–29.
5. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. — М.: Мир, 1965.
6. Монин А. С. Уравнения турбулентной диффузии// Докл. АН СССР. — 1955. — 105, № 2. — С. 256–260.
7. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
8. Учайкин В. В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы// Усп. физ. наук. — 2003. — 173, № 8. — С. 847–876.
9. Учайкин В. В. Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008.
10. Учайкин В. В. О дробно-дифференциальном уравнении Лиувилля как уравнении динамики открытой системы// Науч. вед. БелГУ. Сер. мат. физ. — 2014. — 25 (196), № 37. — С. 58–67.
11. Учайкин В. В., Захаров А. Ю. Дробные производные в теории плазмы// Обзор. прикл. пром. мат. — 2005. — 12. — С. 540.
12. Учайкин В. В., Сибатов Р. Т. Стохастическая модель мерцающей флуоресценции// ЖЭТФ. — 2009. — 136, № 4 (10). — С. 627–638.
13. Фок В. А. Решение одной задачи теории диффузии по методу конечных разностей и приложение его к диффузии света// Тр. ГОИ. — 1926. — 4, № 34. — С. 1–31.
14. Bardou F., Bouchaud J. P., Emile O., Aspect A., Cohen-Tannoudji C. Subrecoil laser cooling and Levy flights// Phys. Rev. Lett. — 1994. — 72. — P. 203–206.
15. Boyadjiev L., Dobner H. J. On a fractional integro-differential equation of Volterra type// Integr. Transforms Special Funct. — 2001. — 11. — P. 113–136.
16. Dattoli G., Lorenzutta S., Maino G., Tocci D., Torre A. Results for an integro-differential equation arising in a radiation evolution problem// in: Proc. Int. Workshop “Dynamics of Transport in Plasmas and Charged Beams,”. — Singapore: World Scientific, 1995. — P. 202–221.
17. Dattoli G., Renieri A., Torre A. Lectures in free-electron laser theory and related topics. — Singapore: World Scientific, 1995.
18. Holstein T. Imprisonment of resonance radiation in gases// Phys. Rev. — 1947. — 72. — P. 1212–1233.
19. Jung Y., Barkai E., Silbey R. Lineshape theory and photon counting statistics for blinking quantum dots: a Levy walk process// J. Chem. Phys.. — 284, № 1–2. — P. 181–194.
20. Kofman A. G., Zaibel R., Levine A. M., Prior Y. Non-Markovian stochastic jump processes in nonlinear optics// Phys. Rev. Lett. — 1988. — 61. — P. 251.
21. Kondrashin M. P., Schaufler S., Schleich W. P., Yakovlev V. P. Anomalous kinetics of heavy particles in light media// J. Chem. Phys. — 2002. — 284, № 1–2. — P. 319–330.
22. Kuscer I., Zweifel P. F. Time-dependent one-speed albedo problem for a semi-infinite medium// J. Math. Phys. — 1965. — 6, № 7. — P. 1125–1130.
23. Margolin G., Barkai E. Aging correlation functions for blinking nanocrystals, and other on-off stochastic processes// J. Chem. Phys. — 2004. — 121, № 3. — P. 1566–1577.
24. Prigogine I., Resibua P. On the kinetics of the approach to equilibrium// Physica. — 1961. — 27. — P. 629–646.

25. *Schaufler S., Yakovlev V. P.* Subrecoil laser cooling: Trapping versus diffusion// *Laser Phys.* — 1994. — 6. — P. 414–419.
26. *Tang J., Marcus R. A.* Mechanisms of fluorescence blinking in semiconductor nanocrystal quantum dots// *J. Chem. Phys.* — 2005. — 123. — 054704.
27. *Uchaikin V. V.* Nonlocal models of cosmic ray transport in the Galaxy// *J. Appl. Math. Phys.* — 2015. — 3. — P. 187–200.
28. *Uchaikin V. V.* On time-fractional representation of an open system response// *Fract. Calc. Appl. Anal.* — 2016. — 19, № 5. — P. 1306–1315.
29. *Uchaikin V. V., Cahoy D. O., Sibatov R. T.* Fractional processes: from Poisson to branching one// *Int. J. Bifurcation Chaos.* — 2008. — 18, № 9. — P. 2717–2725.
30. *Uchaikin V. V., Sibatov R. T.* Fractional Boltzmann equation for multiple scattering of resonance radiation in low-temperature plasma// *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2011. — 44, № 14. — 145501.
31. *Uchaikin V. V., Sibatov R. T., Harlova O. P.* Galaxies as accelerators of cosmic rays// in: *Proc. 34th Int. Conf. on Cosmic Rays.* — Netherlands, 2015. — P. 532.
32. *Van Hove L.* The approach to equilibrium in quantum statistics: A perturbation treatment to general order// *Physica.* — 1957. — 23. — P. 441–480.

Учайкин Владимир Васильевич
Ульяновский государственный университет
E-mail: vuchaikin@gmail.com