Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Федоров, А. В. Нагуманова, Линейные обратные задачи для одного класса вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 167, 97–111

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-167-97-111>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 04:59:40

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 167 (2019). С. 97–111
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-167-97-111

УДК 517.44; 517.9

ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2019 г. В. Е. ФЕДОРОВ, А. В. НАГУМАНОВА

Аннотация. В работе исследуется однозначная разрешимость линейных обратных коэффициентных задач с не зависящим от времени неизвестным коэффициентом для эволюционного уравнения в банаховом пространстве с вырожденным оператором при дробной производной Герасимова—Капуто. Полученные абстрактные результаты использованы при исследовании обратных задач с неопределенным коэффициентом, зависящим только от пространственных переменных, для уравнений с многочленами от самосопряженного эллиптического дифференциального оператора по пространственным переменным. Общие результаты применены также к исследованию однозначной разрешимости обратной задачи для системы уравнений Соболева дробного порядка по времени.

Ключевые слова: обратная коэффициентная задача, вырожденное эволюционное уравнение, дробная производная Герасимова—Капуто.

INVERSE LINEAR PROBLEMS FOR A CERTAIN CLASS OF DEGENERATE FRACTIONAL EVOLUTION EQUATIONS

© 2019 V. E. FEDOROV, A. V. NAGUMANOVA

ABSTRACT. In this paper, we study the unique solvability of linear inverse coefficient problems with a time-independent unknown coefficient for evolution equations in Banach spaces with degenerate operators acting on the Gerasimov–Caputo fractional derivative. We apply abstract results obtained in the paper to the study of inverse problems with undetermined coefficients depending only on spatial variables for equations with polynomials on a self-adjoint, elliptic differential operator with respect to spatial variables. Also, we apply general results to the study of the unique solvability of inverse problems for time-fractional Sobolev systems.

Keywords and phrases: inverse coefficient problem, degenerate evolution equation, Gerasimov–Caputo fractional derivative.

AMS Subject Classification: 35R30, 35R11, 34K29

1. Введение. Пусть $\mathcal{U}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства. Через $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ будем обозначать банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$. Множество линейных замкнутых операторов с областями определения, плотными в пространстве $\mathcal{X}$, действующих в $\mathcal{Y}$, обозначим через $Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$. При $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ эти обозначения примут вид $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ и $Cl(\mathcal{X})$ соответственно.

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013, соглашение № 02.A03.21.0011) и Министерства образования и науки РФ (задание № 1.6462.2017/БЧ)..

Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, оператор $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ имеет область определения D_M . Рассмотрим вырожденное эволюционное уравнение дробного порядка

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + B(t)u + y(t), \quad t \in [0, T]; \quad (1.1)$$

здесь D_t^α — дробная производная Герасимова—Капуто, $B : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$, $y : [0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$, $u \in \mathcal{U}$, $T > 0$. Для уравнения (1.1) зададим условия Коши

$$x^{(k)}(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1.2)$$

и условие переопределения

$$\int_0^T x(t) d\mu(t) = x_T. \quad (1.3)$$

Предполагается, что скалярная функция $\mu(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, T]$. Интеграл в условии (1.3) понимается как векторный интеграл Римана—Стилтьеса. Элементы x_k , $k = 0, 1, \dots, m-1$, x_T считаются известными.

Задача нахождения функции $x(t)$ из соотношений (1.1), (1.2) называется прямой задачей (или задачей Коши), а задача нахождения пары $(x(t), u)$ из соотношений (1.1)–(1.3) — обратной задачей. Ее решением часто будем называть элемент u .

Главная цель данной работы — исследование обратной задачи (1.1)–(1.3) и некоторых близких к ней обратных задач для уравнения (1.1).

Обратные задачи для систем, которые описываются дифференциальными уравнениями, являются важным инструментом для исследований в области геофизики, астрономии, спектрального анализа, при решении различных прикладных проблем (см. [29, 38]). Рассмотрение дифференциальных уравнений в банаховых пространствах позволяет эффективно изучать широкие классы задач для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений в частных производных. Обратные задачи для дифференциальных уравнений первого порядка в банаховых пространствах, разрешенных относительно производной, и для их конкретных реализаций исследовались в [11, 12, 15, 16, 34, 38] и многих других работах. Обратные задачи для дробных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах изучались в [3, 4, 35, 36] и др.

Многие реальные процессы описываются дифференциальными уравнениями с вырожденным оператором при производной высшего порядка по времени (см. [6, 13, 30, 39]). Обратные задачи для линейных уравнений первого порядка такого типа изучались в работах Н. Л. Абашеевой [26], В. Е. Федорова, А. В. Уразаевой и Н. Д. Ивановой [7, 10, 19, 20, 24, 25, 31, 33], А. Фавини и М. Аль Хорани [27], М. В. Фалалеева [21]. В [32] исследован класс обратных задач для уравнений вида (1.1) с неизвестным параметром $u = u(t)$, зависящим от времени. Такие задачи имеют свою специфику, в частности, данные переопределения также зависят от времени ($x_T = x_T(t)$), и условие переопределения имеет соответствующую структуру. Получены абстрактные результаты об однозначной разрешимости обратных задач, которые были применены к исследованию начально-краевой задачи для уравнения Соболева дробного порядка с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени, при заданной вектор-функции, зависящей от времени и пространственных переменных, в правой части.

Цель настоящей работы — продолжить изучение обратных задач для уравнений в банаховых пространствах с вырожденным оператором в дробной производной. В работе исследуется однозначная разрешимость линейных обратных коэффициентных задач вида (1.2), (1.3) с не зависящим от времени неизвестным коэффициентом u для эволюционного уравнения (1.1) в банаховом пространстве с вырожденным оператором L при дробной производной Герасимова—Капуто. Оператор M предполагается при этом (L, p) -ограниченным (см. [39]). В качестве начальных условий используются как условия Коши, так и обобщенные условия Шоултера—Сидорова, представляющие собой начальные условия не для всей неизвестной функции, а для ее проекции на фазовое пространство уравнения $D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t)$ (см. [22]). При этом рассмотрены задачи с условием переопределения для всей искомой функции, для ее проекции на фазовое пространство, а также для ее проекции на подпространство вырождения уравнения — дополнение к фазовому пространству.

Полученные абстрактные результаты использованы при исследовании обратных задач с неопределенным коэффициентом, зависящим только от пространственных переменных, для уравнений с многочленами от самосопряженного эллиптического дифференциального оператора по пространственным переменным. Частными случаями таких уравнений являются уравнение Баренблатта—Желтова—Кочиной, уравнение Буссинеска и другие уравнения математической физики. Кроме того, общие результаты использованы для исследования однозначной разрешимости обратной задачи для системы уравнений Соболева дробного порядка по времени с зависящим только от пространственных переменных неопределенным коэффициентом, на который действует дифференциальный оператор.

2. Обратная задача для невырожденного дробного уравнения. Введем обозначения $g_\delta(t) := t^{\delta-1}/\Gamma(\delta)$ при $\delta > 0$, $t > 0$,

$$J_t^\delta h(t) := (g_\delta * h)(t) := \int_0^t g_\delta(t-s)h(s)ds.$$

Пусть $\alpha > 0$, m — наименьшее целое число, не превосходящее число α , D_t^m — обычная производная порядка $m \in \mathbb{N}$, J_t^0 — тождественный оператор, D_t^α — дробная производная Герасимова—Капуто (см. [2, 28]), т.е.

$$D_t^\alpha h(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha} \left(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(0)g_{k+1}(t) \right).$$

Рассмотрим сначала уравнение, разрешенное относительно дробной производной:

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t)u + f(t), \quad t \in [0, T]; \quad (2.1)$$

Здесь D_t^α — дробная производная Герасимова—Капуто, A — ограниченный оператор в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$ ($A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$), $T > 0$ — число, элемент u принадлежит банахову пространству $\mathcal{U}$, $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z}))$, $f \in C([0, T]; \mathcal{Z})$. Для уравнения (2.1) зададим условия Коши

$$z^{(k)}(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2.2)$$

и условие переопределения

$$\int_0^T z(t)d\mu(t) = z_T. \quad (2.3)$$

Скалярная функция $\mu(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, T]$, заданы элементы $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$.

Рассмотрим сначала прямую задачу (2.1), (2.2); элемент $u \in \mathcal{U}$ при этом будем считать известным. Под решением задачи (2.1), (2.2) будем понимать вектор-функцию $z \in C^{m-1}([0, T]; \mathcal{Z})$, для которой

$$g_{m-\alpha} * \left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(0)g_{k+1} \right) \in C^m([0, T]; \mathcal{Z})$$

и выполняются равенства (2.1) и (2.2).

При $\alpha, \beta > 0$ введем обозначение для функции Миттаг-Леффлера

$$E_{\alpha, \beta}(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}.$$

Теорема 2.1 (см. [23, 37]). Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z}))$, $f \in C([0, T]; \mathcal{Z})$, $u \in \mathcal{U}$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$. Тогда существует единственное решение задачи (2.1), (2.2), причем оно имеет вид

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha, k+1}(At^\alpha) z_k + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(A(t-s)^\alpha) (B(s)u + f(s)) ds. \quad (2.4)$$

Теперь будем рассматривать обратную задачу (2.1)–(2.3), считая элемент u в уравнении (2.1) неизвестным. Назовем элемент $u \in \mathcal{U}$ решением задачи (2.1)–(2.3), если соответствующее решение задачи Коши (2.1), (2.2) удовлетворяет условию (2.3).

В силу формулы (2.4) элемент u является решением задачи (2.1)–(2.3) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет уравнению

$$\chi(A)u = \psi(A), \quad (2.5)$$

где $\chi(A)$ и $\psi(A)$ определены формулами

$$\begin{aligned} \chi(A) &:= \int_0^T d\mu(t) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha) B(s) ds \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z}), \\ \psi(A) &:= z_T - \int_0^T \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(At^\alpha) z_k d\mu(t) - \int_0^T d\mu(t) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha) f(s) ds \in \mathcal{Z}. \end{aligned}$$

Теорема 2.2. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z}))$, $f \in C([0, T]; \mathcal{Z})$, функция $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию. Тогда для однозначной разрешимости задачи (2.1)–(2.3) необходимо и достаточно, чтобы существовал непрерывный обратный оператор $\chi(A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}; \mathcal{U})$. При этом решение имеет вид $u = \chi(A)^{-1}\psi(A)$ и удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{\mathcal{U}} \leq C \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|z_T\|_{\mathcal{Z}} + \|f\|_{C([0, T]; \mathcal{Z})} \right). \quad (2.6)$$

Доказательство. По теореме 2.1 решение задачи Коши (2.1), (2.2) существует при любых $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $u \in \mathcal{U}$, и при этом имеет вид (2.4). Подставим решение (2.4) в условие (2.3):

$$\int_0^T d\mu(t) \left(\sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(At^\alpha) z_k + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha) (B(s)u + f(s)) ds \right) = z_T.$$

Отсюда получим формулу (2.5), из которой следует требуемое. Отметим, что если $\chi(A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}; \mathcal{U})$, то в силу теоремы Банаха об обратном операторе для u справедлива оценка устойчивости (2.6). $\square$

3. Обратные задачи для вырожденного уравнения с дробной производной.

3.1. Задачи с условиями согласования. Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, оператор L принадлежит пространству $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, оператор $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ имеет область определения D_M . Введем обозначения

$$\rho^L(M) := \left\{ \mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X}) \right\}, \quad R_\mu^L(M) := (\mu L - M)^{-1} L, \quad L_\mu^L(M) := L(\mu L - M)^{-1}.$$

Оператор M называется (L, σ) -ограниченным, если существует такое $a > 0$, что для любого $\mu \in \mathbb{C}$ из $|\mu| > a$ вытекает $\mu \in \rho^L(M)$. Для (L, σ) -ограниченного оператора M выберем в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ замкнутый контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Тогда имеют смысл следующие интегралы как интегралы от аналитических функций по замкнутому контуру:

$$P := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad Q := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma L_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}).$$

Положим

$$\mathcal{X}^0 := \ker P, \quad \mathcal{X}^1 := \operatorname{im} P, \quad \mathcal{Y}^0 := \ker Q, \quad \mathcal{Y}^1 := \operatorname{im} Q, \quad P_0 := I - P, \quad Q_0 := I - Q.$$

Через L_k и M_k обозначим сужения операторов L и M на $\mathcal{X}^k$ (отметим, что $D_{M_k} := D_M \cap \mathcal{X}^k$, $k = 0, 1$).

Теорема 3.1 (см. [23, 37, 39]). Пусть оператор M является (L, σ) -ограниченным. Справедливы следующие утверждения:

- (i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;
- (ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k; \mathcal{Y}^k)$, $k = 0, 1$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^0; \mathcal{Y}^0)$, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$;
- (iii) существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$;
- (iv) при $\alpha, \beta > 0$ семейства операторов

$$X_{\alpha, \beta}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\lambda}^L(M) E_{\alpha, \beta}(\lambda t^{\alpha}) d\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad Y_{\alpha, \beta}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L_{\lambda}^L(M) E_{\alpha, \beta}(\lambda t^{\alpha}) d\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$$

являются аналитическими на множестве $\mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} t \leq 0\}$. Кроме того,

$$X_{\alpha, \beta}(t) = E_{\alpha, \beta}(L_1^{-1} M_1 t^{\alpha}) P.$$

Введем обозначение $H := M_0^{-1} L_0$. При $p \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ оператор M называется (L, p) -ограниченным, если он (L, σ) -ограничен, $H^p \neq \mathbb{O}$ и $H^{p+1} = \mathbb{O}$.

Рассмотрим вырожденное дробное дифференциальное уравнение

$$D_t^{\alpha} Lx(t) = Mx(t) + B(t)u + y(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.1)$$

где $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y}))$, $u \in \mathcal{U}$, $y \in C([0, T]; \mathcal{Y})$. Для уравнения (3.1) зададим условия Коши

$$x^{(k)}(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.2)$$

и условие переопределения

$$\int_0^T x(t) d\mu(t) = x_T. \quad (3.3)$$

Сначала предположим, что элемент $u \in \mathcal{U}$ известен, и сформулируем теорему о разрешимости задачи Коши (3.1), (3.2). *Решением* задачи Коши (3.1), (3.2) называется вектор-функция $x \in C([0, T]; D_M) \cap C^{m-1}([0, T]; \mathcal{X})$, для которой

$$g_{m-\alpha} * \left(Lx - \sum_{k=0}^{m-1} (Lx)^{(k)}(0) g_{k+1} \right) \in C^m([0, T]; \mathcal{Y})$$

и выполняются равенства (3.1), (3.2).

Теорема 3.2 (см. [23, 37]). Пусть оператор M является (L, p) -ограниченным, $y \in C([0, T]; \mathcal{Y})$, $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y}))$, существуют

$$(D_t^{\alpha} H)^n M_0^{-1} Q_0 B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{X})), \quad (D_t^{\alpha} H)^n M_0^{-1} Q_0 y \in C([0, T]; \mathcal{X})$$

при $n = 0, 1, \dots, p$, $u \in \mathcal{U}$, $x_k \in \mathcal{X}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, и выполняются условия согласования

$$D_t^k \Big|_{t=0} \sum_{n=0}^p (D_t^{\alpha} H)^n M_0^{-1} Q_0 (B(t)u + y(t)) = -P_0 x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Тогда существует единственное решение задачи (3.1), (3.2); оно имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k X_{\alpha, k+1}(t) x_k + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} X_{\alpha, \alpha}(t-s) L_1^{-1} Q(B(s)u + y(s)) ds - \sum_{n=0}^p (D_t^{\alpha} H)^n M_0^{-1} Q_0 (B(t)u + y(s)). \quad (3.4)$$

В силу теоремы 3.1 задача (3.1)–(3.3) эквивалентна системе двух задач на взаимно дополнительных подпространствах:

$$D_t^\alpha Hx^0(t) = x^0(t) + M_0^{-1}Q_0B(t)u + M_0^{-1}Q_0y(t), \quad (3.5)$$

$$x^{0(k)}(0) = x_k^0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.6)$$

$$\int_0^T x^0(t) d\mu(t) = x_T^0 \quad (3.7)$$

на подпространстве $\mathcal{X}^0$ и

$$D_t^\alpha x^1(t) = L_1^{-1}M_1x^1(t) + L_1^{-1}QB(t)u + L_1^{-1}Qy(t), \quad (3.8)$$

$$x^{1(k)}(0) = x_k^1, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.9)$$

$$\int_0^T x^1(t) d\mu(t) = x_T^1, \quad (3.10)$$

на подпространстве $\mathcal{X}^1$, где $x^1(t) = Px(t)$, $x^0(t) = P_0x(t)$, $x \in [0, T]$.

Введем обозначения

$$\chi(L_1^{-1}M_1) := \int_0^T d\mu(t) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(L_1^{-1}M_1(t-s)^\alpha) L_1^{-1}QB(s) ds \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{X}^1),$$

$$\begin{aligned} \psi(L_1^{-1}M_1) := & Px_T - \int_0^T \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(L_1^{-1}M_1 t^\alpha) Px_k d\mu(t) - \\ & - \int_0^T d\mu(t) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(L_1^{-1}M_1(t-s)^\alpha) L_1^{-1}Qy(s) ds \in \mathcal{X}^1. \end{aligned}$$

Теорема 3.3. Пусть оператор M является (L, p) -ограниченным, $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y}))$, $y \in C([0, T]; \mathcal{Y})$, существуют

$$(D_t^\alpha H)^n M_0^{-1}Q_0B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{X})), \quad (D_t^\alpha H)^n M_0^{-1}Q_0y \in C([0, T]; \mathcal{X})$$

при всех $n = 0, 1, \dots, p$, $\chi(L_1^{-1}M_1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{U})$, функция $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, $x_k \in \mathcal{X}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $x_T \in \mathcal{X}$ таковы, что выполняются условия согласования

$$P_0x_k = -D_t^k \Big|_{t=0} \sum_{n=0}^p (D_t^\alpha H)^n M_0^{-1}Q_0 \left[B(t)\chi(L_1^{-1}M_1)^{-1}\psi(L_1^{-1}M_1) + y(t) \right], \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.11)$$

$$P_0x_T = - \int_0^T \sum_{n=0}^p (D_t^\alpha H)^n M_0^{-1}Q_0 \left[B(t)\chi(L_1^{-1}M_1)^{-1}\psi(L_1^{-1}M_1) + y(t) \right] d\mu(t). \quad (3.12)$$

Тогда задача (3.1)–(3.3) имеет единственное решение, при этом

$$\|u\|_{\mathcal{U}} \leq C \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|Px_k\|_{\mathcal{X}} + \|Px_T\|_{\mathcal{X}} + \|Qy\|_{C([0,T];\mathcal{Y})} \right). \quad (3.13)$$

Доказательство. По теореме 2.2 существует единственное решение задачи (3.8)–(3.10) тогда и только тогда, когда $\chi(L_1^{-1}M_1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{U})$, при этом $u = \chi(L_1^{-1}M_1)^{-1}\psi(L_1^{-1}M_1)$ и выполняется

оценка, с учетом непрерывности оператора L_1^{-1} эквивалентная (3.13). Согласно [23] существует единственное решение уравнения (3.5) с найденным $u \in \mathcal{U}$, которое имеет вид

$$x^0(t) = - \sum_{n=0}^p (D_t^\alpha H)^n M_0^{-1} Q_0 \left[B(t) \chi(L_1^{-1} M_1)^{-1} \psi(L_1^{-1} M_1) + y(t) \right].$$

Тогда из (3.6), (3.7) следует необходимость выполнения условий (3.11), (3.12) для разрешимости задачи (3.5)–(3.7), а значит, и задачи (3.1)–(3.3). $\square$

Условия (3.11), (3.12) перестают быть необходимыми, если потребовать, чтобы $\text{im } B(t) \subset \mathcal{Y}^1$, $y(t) \in \mathcal{Y}^1$ при $t \in [0, T]$.

Теорема 3.4. Пусть оператор M является (L, p) -ограниченным, $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y}))$, $\text{im } B \subset \mathcal{Y}^1$, $y \in C([0, T]; \mathcal{Y}^1)$, функция $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, $x_k \in \mathcal{X}^1$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $x_T \in \mathcal{X}^1$. Задача (3.1)–(3.3) имеет единственное решение в том и только в том случае, когда $\chi(L_1^{-1} M_1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{U})$; при этом

$$\|u\|_{\mathcal{U}} \leq C \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|x_k\|_{\mathcal{X}} + \|x_T\|_{\mathcal{X}} + \|y\|_{C([0, T]; \mathcal{Y})} \right).$$

Доказательство. В условиях данной теоремы $Q_0 B = \mathbb{O}$, $Q_0 y \equiv 0$, поэтому уравнение (3.5) имеет вид $D_t^\alpha H x^0(t) = x^0(t)$. В силу нильпотентности оператора H оно имеет только единственное решение. Отсюда и из условий (3.6), (3.7) следует, что x_k , $k = 0, 1, \dots, m-1$, x_T принадлежат подпространству $\mathcal{X}^1$. В таком случае задача (3.1)–(3.3) эквивалентна задаче (3.8)–(3.10). По теореме 2.2 получим требуемое. $\square$

При доказательстве двух предыдущих теорем неопределенный коэффициент u выражался из уравнения на подпространстве $\mathcal{X}^1$ с помощью условия переопределения. В некоторых ситуациях удобнее поступить по-другому и выразить u из уравнения на подпространстве $\mathcal{X}^0$. Для этого введем обозначение

$$F_z := \sum_{n=0}^p \int_0^T (D_t^\alpha H)^n M_0^{-1} Q_0 z(t) d\mu(t).$$

Теорема 3.5. Пусть оператор M является (L, p) -ограниченным, $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y}))$, $y \in C([0, T]; \mathcal{Y})$, существуют

$$(D_t^\alpha H)^n M_0^{-1} Q_0 B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{X})), \quad (D_t^\alpha H)^n M_0^{-1} Q_0 y \in C([0, T]; \mathcal{X})$$

при всех $n = 0, 1, \dots, p$, $F_B^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0; \mathcal{U})$, функция $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, $x_k \in \mathcal{X}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $x_T \in \mathcal{X}$ таковы, что выполняются условия согласования

$$P_0 x_k = D_t^k \Big|_{t=0} \sum_{n=0}^p (D_t^\alpha H)^n M_0^{-1} Q_0 \left[B(t) F_B^{-1} (P_0 x_T + F_y) - y(t) \right], \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.14)$$

$$-\chi(L_1^{-1} M_1) F_B^{-1} (P_0 x_T + F_y) = \psi(L_1^{-1} M_1). \quad (3.15)$$

Тогда задача (3.1)–(3.3) имеет единственное решение, при этом

$$\|u\|_{\mathcal{U}} \leq C \left(\|P_0 x_T\|_{\mathcal{X}} + \|Q_0 y\|_{C([0, T]; \mathcal{Y})} \right). \quad (3.16)$$

Доказательство. В силу нильпотентности оператора H существует единственное решение уравнения (3.5), которое имеет вид

$$x^0(t) = - \sum_{n=0}^p (D_t^\alpha H)^n M_0^{-1} Q_0 [B(t) u + y(t)].$$

Отсюда в силу (3.7) получаем равенство

$$u = -F_B^{-1} (P_0 x_T + F_y),$$

а в силу (3.6) — необходимость условия согласования (3.14). По теореме 2.2 задача (3.8), (3.9) однозначно разрешима, а условие (3.10) влечет необходимость условия (3.15). $\square$

3.2. Задачи без условий согласования. Кроме задачи Коши для уравнения (3.1) рассмотрим также обобщенную задачу Шоултера—Сидорова

$$(Px)^{(k)} = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.17)$$

и сформулируем результат о разрешимости задачи (3.1), (3.17) при известном элементе $u \in \mathcal{U}$.

Решением задачи (3.1), (3.17) называется вектор-функция $x \in C([0, T]; D_M)$, для которой

$$Lx \in C^{m-1}([0, T]; \mathcal{Y}), \quad g_{m-\alpha} * \left(Lx - \sum_{k=0}^{m-1} (Lx)^{(k)}(0)g_{k+1} \right) \in C^m([0, T]; \mathcal{Y}),$$

и выполняются равенства (3.1) и (3.17). Здесь используется тот факт, что при условии (L, σ) -ограниченности оператора M гладкость функции Px не меньше гладкости функции Lx , так как $Px = L_1^{-1}QLx$.

Теорема 3.6 (см. [23, 37]). *Предположим, что оператор M является (L, p) -ограниченным, $y \in C([0, T]; \mathcal{Y})$, $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y}))$, существуют*

$$(D_t^\alpha H)^n M_0^{-1} Q_0 B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{X})), \quad (D_t^\alpha H)^n M_0^{-1} Q_0 y \in C([0, T]; \mathcal{X})$$

при $n = 0, 1, \dots, p$, $u \in \mathcal{U}$, $x_k \in \mathcal{X}^1$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда существует единственное решение задачи (3.1), (3.17), имеющее вид (3.4).

Замечание 3.1. В случае $(L, 0)$ -ограниченного оператора M обобщенная задача Шоултера—Сидорова (3.17) эквивалентна задаче Шоултера—Сидорова

$$(Lx)^{(k)} = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (3.18)$$

Действительно, из равенств (3.17) следуют равенства (3.18) с $y_k = Lx_k = L_1 x_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Обратное верно, так как из $(L, 0)$ -ограниченности оператора M следует, что $L_0 = \mathbb{O}$ (см. [39]), поэтому $L = L_1 P$ и из равенства $Lx = L_1 Px = y$ следует, что $Px = L_1^{-1}y$. Таким образом, $x_k = L_1^{-1}y_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Кроме того, $(L, 0)$ -ограниченность оператора M влечет равенство $\text{im } L_1 = \mathcal{Y}^1$ (см. [39]), поэтому в условиях (3.18) выбираются $y_k \in \mathcal{Y}^1$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Использование начальных условий (3.17) и условия переопределения

$$\int_0^T Px(t) d\mu(t) = x_T \quad (3.19)$$

позволяет в теореме 3.3 избавиться от условий согласования (3.11) и (3.12) соответственно.

Теорема 3.7. Пусть оператор M является (L, p) -ограниченным, $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y}))$, $y \in C([0, T]; \mathcal{Y})$, существуют

$$(D_t^\alpha H)^n M_0^{-1} Q_0 B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{X})), \quad (D_t^\alpha H)^n M_0^{-1} Q_0 y \in C([0, T]; \mathcal{X})$$

при всех $n = 0, 1, \dots, p$, $\chi(L_1^{-1}M_1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{U})$, функция $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, $x_k \in \mathcal{X}^1$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $x_T \in \mathcal{X}^1$. Тогда задача (3.1), (3.17), (3.19) имеет единственное решение, причем выполняется (3.13).

Доказательство. Задача (3.1), (3.17), (3.19) с помощью теоремы 3.1 редуцируется к совокупности уравнения (3.5) и задачи (3.8)–(3.10). В остальном рассуждения повторяют доказательство теоремы 3.3. $\square$

Замечание 3.2. Как и для начальных условий в замечании 3.1, нетрудно показать, что в случае $(L, 0)$ -ограниченного оператора M условие переопределения (3.19) эквивалентно условию

$$\int_0^T Lx(t)d\mu(t) = y_T \quad (3.20)$$

с $y_T = L_1 x_T$. Это означает, что в условии (3.20) задается $y_T \in \mathcal{Y}^1 = \text{im } L_1$ (см. замечание 3.1).

Начальные условия (3.17) и условие переопределения

$$\int_0^T P_0 x(t)d\mu(t) = x_T \quad (3.21)$$

дают возможность избавиться от условий согласования (3.14) и (3.15) соответственно в теореме 3.5 и получить следующий результат.

Теорема 3.8. Пусть оператор M является (L, p) -ограниченным, $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y}))$, $y \in C([0, T]; \mathcal{Y})$, существуют

$$(D_t^\alpha H)^n M_0^{-1} Q_0 B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{X})), \quad (D_t^\alpha H)^n M_0^{-1} Q_0 y \in C([0, T]; \mathcal{X})$$

при всех $n = 0, 1, \dots, p$, $F_B^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0; \mathcal{U})$, функция $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, $x_k \in \mathcal{X}^1$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $x_T \in \mathcal{X}^0$. Тогда задача (3.1), (3.17), (3.21) имеет единственное решение, при этом выполняется (3.16).

Доказательство. Задача также редуцируется к совокупности обратной задачи (3.5), (3.7) и прямой задачи (3.8), (3.9), после чего воспроизводится доказательство теоремы 3.5. При этом необходимости в условиях согласования (3.14) и (3.15) не возникает, как это следует из вида условий (3.17), (3.21). $\square$

4. Приложения к уравнениям с многочленами от самосопряженного эллиптического оператора.

4.1. Общие результаты. Пусть

$$P_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i, \quad Q_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n b_i \lambda^i, \quad R_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i,$$

$a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $a_n \neq 0$. Пусть, кроме того, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, пучок операторов $A, B_1, B_2, \dots, B_r$ регулярно эллиптичен (см. [17, с. 454]), где

$$(Au)(x) = \sum_{|q| \leq 2r} a_q(x) D_x^q u(x), \quad a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l u)(x) = \sum_{|q| \leq r_l} b_{lq}(x) D_x^q u(x), \quad b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = 1, 2, \dots, r,$$

$$D_x^q = D_{x_1}^{q_1} D_{x_2}^{q_2} \dots D_{x_d}^{q_d}, \quad D_{x_i}^{q_i} = \frac{\partial^{q_i}}{\partial x_i^{q_i}}, \quad q = (q_1, q_2, \dots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d.$$

Пусть оператор $A_1 \in \mathcal{Cl}(L_2(\Omega))$, $A_1 u = Au$, с областью определения $D(A_1) = H_{\{B_l\}}^{2r}(\Omega)$ (см. [17, с. 399]) самосопряжен и имеет ограниченный справа спектр. В таком случае спектр $\sigma(A_1)$ оператора A_1 дискретный, вещественный и сгущается к $-\infty$. Пусть $0 \notin \sigma(A_1)$, $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора A_1 , занумерованных по

невозрастанию соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности. Рассмотрим обратную задачу

$$D_t^\alpha P_n(A)v(x, t) = Q_n(A)v(x, t) + R_n(A)u(x) + y(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (4.1)$$

$$B_l A^k v(x, t) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (4.2)$$

$$P_n(A)v(x, 0) = v_0(x), \quad \frac{\partial P_n(A)v}{\partial t}(x, 0) = v_1(x), \quad \dots, \quad \frac{\partial^{m-1} P_n(A)v}{\partial t^{m-1}}(x, 0) = v_{m-1}(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.3)$$

$$P_n(A)v(x, \tau) = v_\tau(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.4)$$

где $\alpha > 0$, m — наименьшее натуральное число, не превосходящее числом α , D_t^α — дробная производная Герасимова—Капуто по переменной t и $\tau \in (0, T]$.

Положим

$$\mathcal{X} = \left\{ w \in H^{2rn}(\Omega) : B_l A^k w(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad x \in \partial\Omega \right\} = \mathcal{U},$$

$$\mathcal{Y} = L_2(\Omega), \quad L = P_n(A), \quad M = Q_n(A), \quad B = R_n(A).$$

Тогда $L, M, B \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$. Уравнение (4.1) является вырожденным, если $\{k \in \mathbb{N} : P_n(\lambda_k) = 0\} \neq \emptyset$.

Теорема 4.1 (см. [22]). Пусть спектр $\sigma(A_1)$ не содержит точки 0 и общих корней многочленов $P_n(\lambda)$ и $Q_n(\lambda)$. Тогда оператор M является $(L, 0)$ -ограниченным,

$$\sigma^L(M) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \mu = Q_n(\lambda_k)/P_n(\lambda_k), \quad P_n(\lambda_k) \neq 0 \right\},$$

$$P = \sum_{P_n(\lambda_k) \neq 0} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, \quad Q = \sum_{P_n(\lambda_k) \neq 0} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

$$\mathcal{X}^0 = \mathcal{Y}^0 = \text{span} \{ \varphi_k : P_n(\lambda_k) = 0 \},$$

$\mathcal{X}^1$ является замыканием множества $\text{span} \{ \varphi_k : P_n(\lambda_k) \neq 0 \}$ в норме пространства $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}^1$ — замыкание этого же линейала в норме пространства $L_2(\Omega)$.

Теорема 4.2. Пусть спектр $\sigma(A_1)$ не содержит точки 0 и общих корней многочленов $P_n(\lambda)$ и $Q_n(\lambda)$, $c_n \neq 0$, $R_n(\lambda_k) \neq 0$ при $P_n(\lambda_k) \neq 0$, $y \in C([0, T]; L_2(\Omega))$, функции v_k , $k = 0, 1, \dots, m-1$, v_τ принадлежат замыканию линейала $\text{span} \{ \varphi_k : P_n(\lambda_k) \neq 0 \}$ в норме пространства $L_2(\Omega)$. Тогда задача (4.1)–(4.4) при достаточно малом $\tau \in (0, T]$ имеет единственное решение.

Доказательство. Заметим, что задача (4.1)–(4.4) редуцируется к задаче (3.1), (3.18), (3.20) с $y_k \in \text{im } L_1 = \mathcal{Y}^1$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $y_\tau \in \mathcal{Y}^1$ и с $(L, 0)$ -ограниченным оператором M в силу теоремы 4.1. Эта задача в силу замечаний 3.1, 3.2 эквивалентна задаче (3.1), (3.17), (3.19) с

$$x_k = L_1^{-1} v_k = \sum_{P_n(\lambda_k) \neq 0} \frac{\langle v_k, \varphi_k \rangle \varphi_k}{P_n(\lambda_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad x_\tau = L_1^{-1} v_\tau = \sum_{P_n(\lambda_k) \neq 0} \frac{\langle v_\tau, \varphi_k \rangle \varphi_k}{P_n(\lambda_k)}.$$

Здесь и далее через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначается скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$.

Проверим выполнение условий теоремы 3.7.

В этой задаче μ — функция единичного скачка в точке τ , $B = R_n(A)$ не зависит от времени. В условиях данной теоремы

$$L_1^{-1}QB = \sum_{P_n(\lambda_k) \neq 0} \frac{R_n(\lambda_k) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{P_n(\lambda_k)}, \quad (QB)^{-1} = \sum_{P_n(\lambda_k) \neq 0} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{R_n(\lambda_k)},$$

$$L_1^{-1}M_1 = \sum_{P_n(\lambda_k) \neq 0} \frac{Q_n(\lambda_k) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{P_n(\lambda_k)},$$

поэтому в силу того, что $c_n \neq 0$, для $z \in \mathcal{Y}^1$ имеем

$$\|(QB)^{-1}z\|_{\mathcal{U}}^2 = \sum_{P_n(\lambda_k) \neq 0} \frac{(1 + |\lambda_k|^{2n}) |\langle z, \varphi_k \rangle|^2}{|R_n(\lambda_k)|^2} \leq C \sum_{P_n(\lambda_k) \neq 0} |\langle z, \varphi_k \rangle|^2 = \|z\|_{\mathcal{Y}^1}^2,$$

Таким образом, $(QB)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{U})$. Оператор

$$\begin{aligned} \chi(L_1^{-1}M_1) &= \int_0^\tau t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha L_1^{-1}M_1) dt \sum_{P_n(\lambda_k) \neq 0} \frac{R_n(\lambda_k) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{P_n(\lambda_k)} = \\ &= \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(I + \tau^\alpha \Gamma(\alpha+1) L_1^{-1} M_1 E_{\alpha,2\alpha+1}(\tau^\alpha L_1^{-1} M_1) \right) \sum_{P_n(\lambda_k) \neq 0} \frac{R_n(\lambda_k) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{P_n(\lambda_k)} \end{aligned}$$

с учетом ограниченности оператора $L_1^{-1}M_1$ непрерывно обратим при достаточно малом $\tau > 0$, так как в этом случае непрерывно обратим оператор

$$I + \tau^\alpha \Gamma(\alpha+1) L_1^{-1} M_1 E_{\alpha,2\alpha+1}(\tau^\alpha L_1^{-1} M_1),$$

являющийся малым возмущением тождественного оператора. $\square$

Рассмотрим другое условие переопределения:

$$\int_0^T \sum_{P_n(\lambda_k)=0} \langle v(\cdot, t), \varphi_k \rangle \varphi_k(x) dt = v_T(x), \quad x \in \Omega. \quad (4.5)$$

Теорема 4.3. Пусть спектр $\sigma(A_1)$ не содержит точки 0 и общих корней многочленов $P_n(\lambda)$ и $Q_n(\lambda)$, $R_n(\lambda_k) \neq 0$ при $P_n(\lambda_k) = 0$, $y \in C([0, T]; L_2(\Omega))$, функции v_k , $k = 0, 1, \dots, m-1$, принадлежат замыканию линейала $\text{span} \{ \varphi_k : P_n(\lambda_k) \neq 0 \}$ в норме пространства $L_2(\Omega)$, $v_T \in \text{span} \{ \varphi_k : P_n(\lambda_k) = 0 \}$. Тогда задача (4.1)–(4.3), (4.5) имеет единственное решение.

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве предыдущей теоремы, проверим выполнение условий теоремы 3.8. Имеем $\mu(t) = t$; тот же самый оператор $B = R_n(A)$ с обратным

$$(Q_0 B)^{-1} = \sum_{P_n(\lambda_k)=0} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{R_n(\lambda_k)} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{U}).$$

При этом учитывается конечность этой суммы, так как число корней многочлена конечно. Кроме того,

$$F_B = \sum_{P_n(\lambda_k)=0} \frac{R_n(\lambda_k) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{Q_n(\lambda_k)} T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{X}^0), \quad F_B^{-1} = \frac{1}{T} \sum_{P_n(\lambda_k)=0} \frac{Q_n(\lambda_k) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{R_n(\lambda_k)} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0; \mathcal{U}).$$

По теореме 3.8 получим требуемое. $\square$

4.2. Примеры. Возьмем

$$P_1(\lambda) = a - \lambda, \quad Q_1(\lambda) = b_1 \lambda + b_0, \quad R_1(\lambda) = c_1 \lambda + c_0, \quad Au = \Delta u, \quad r = 1, \quad B_1 = I.$$

Тогда рассмотренные выше задачи примут вид обратной задачи

$$D_t^\alpha (a - \Delta) v(x, t) = (b_1 \Delta + b_0) v(x, t) + (c_1 \Delta + c_0) u(x) + y(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (4.6)$$

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial^k v}{\partial t^k}(x, t) = v_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad x \in \Omega, \quad (4.8)$$

с условием переопределения

$$(a - \Delta) v(x, \tau) = v_\tau(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.9)$$

или

$$\int_0^T \sum_{\lambda_k=a} \langle v(x, t), \varphi_k \rangle \varphi_k(x) dt = v_T(x), \quad x \in \Omega. \quad (4.10)$$

При $\alpha = 1$, $b_1 \neq 0$, $b_0 = 0$ уравнение (4.6) является уравнением Баренблатта—Желтова—Кочиной, описывающим фильтрацию в трещиновато-пористой среде (см. [1]), при $\alpha = 1$, $b_1 = 0$,

$b_0 \neq 0$ — это уравнение переходных процессов в полупроводниках (см. [13]), при $\alpha = 2$ — это уравнение Буссинеска, возникающее при описании продольных волн в стержнях, в теории длинных волн на воде, при описании волн в плазме (см. [6, 8, 18]).

Теоремы 4.2 и 4.3 позволяют утверждать об однозначной разрешимости задач (4.6)–(4.9) и (4.6)–(4.8), (4.10) в случае любого $\alpha > 0$, в том числе дробного.

Условия теоремы 4.2 о существовании единственного решения задачи (4.6)–(4.9) означают, что $b_1 a + b_0 \neq 0$, $c_1 \neq 0$, $c_1 \lambda_k + c_0 \neq 0$ при $\lambda_k \neq a$, число $\tau \in (0, T]$ достаточно мало.

Согласно теореме 4.3 для однозначной разрешимости задачи (4.6)–(4.8), (4.10) должны выполняться условия $b_1 a + b_0 \neq 0$, $c_1 a + c_0 \neq 0$.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть

$$P_1(\lambda) = 1 + \lambda, \quad Q_1(\lambda) = \lambda, \quad R_1(\lambda) = 1 - \lambda, \quad d = 1, \quad \Omega = (0, \pi), \quad Au = u''.$$

Тогда $\lambda_k = -k^2$, $\varphi_k(x) = \sin kx$, $k \in \mathbb{N}$.

В силу сказанного выше по теореме 4.2 однозначно разрешима при малых $\tau \in (0, T]$ задача (4.6)–(4.9), которая в данном случае имеет вид

$$D_t^\alpha \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) + \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x) + y(x, t), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times [0, T], \quad (4.11)$$

$$v(0, t) = v(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial^k v}{\partial x^k}(x, t) = v_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad x \in (0, \pi), \quad (4.13)$$

$$\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v(x, \tau) = v_\tau(x), \quad x \in (0, \pi). \quad (4.14)$$

При этом v_k , $k = 0, 1, \dots, m-1$, v_T предполагаются принадлежащими замыканию в норме пространства $L_2(0, \pi)$ линейала $\{\sin kx, k = 2, 3, \dots\}$.

Если же в этой задаче условие переопределения (4.14) заменить на условие

$$\int_0^T \langle v(x, t), \sin x \rangle \sin x dt = v_T(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (4.15)$$

то при v_k , $k = 0, 1, \dots, m-1$, из замыкания линейала $\{\sin kx, k = 2, 3, \dots\}$ в норме $L_2(0, \pi)$, $v_T(x) = c \sin x$ при некотором $c \in \mathbb{R}$, задача (4.11)–(4.13), (4.15) однозначно разрешима по теореме 4.3.

5. Обратная задача для системы Соболева дробного порядка по времени. Рассмотрим обратную задачу

$$\frac{\partial^k v}{\partial t^k}(x, 0) = v_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad x \in \Omega, \quad (5.1)$$

$$v_n(x, t) := \sum_{i=1}^3 v_i(x, t) n_i(x) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (5.2)$$

$$v(x, \tau) = v_\tau(x), \dots, x \in \Omega, \quad (5.3)$$

для системы уравнений Соболева дробного порядка

$$D_t^\alpha v(x, t) = [v(x, t), \bar{\omega}] - r(x, t) + \Delta u(x), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (5.4)$$

$$\nabla \cdot v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (5.5)$$

описывающей при $\alpha = 1$ динамику малых внутренних движений стратифицированной жидкости в равновесном состоянии (см. [14]). Здесь m — наименьшее натуральное число, не превосходящее числом $\alpha > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , $n = (n_1, n_2, n_3)$ — вектор внешней нормали к ее границе, $v = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор скорости движения частиц жидкости, $r =$

$(r_1, r_2, r_3) = (p_{x_1}, p_{x_2}, p_{x_3})$ — градиент нестационарного давления, $[\cdot, \bar{\omega}]$ — векторное произведение на вектор $\bar{\omega} = (0, 0, \omega) \in \mathbb{R}^3$, где ω — удвоенная угловая скорость вращения,

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

Неизвестными вектор-функциями являются v и r , неопределенный коэффициент — вектор-функция u .

Введем обозначения $\mathbb{L}_2 := (L_2(\Omega))^3$, $\mathcal{L} := \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \nabla \cdot v = 0\}$. Замыкание линеала $\mathcal{L}$ по норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$. Это гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространства $\mathbb{L}_2$. Существует представление $\mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$, где $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$. Обозначим через $\Pi : \mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{H}_\pi$ ассоциированный с этим представлением ортопроектор. Далее, $\mathbb{H}^1 := (H^1(\Omega))^3$, $\mathbb{H}_\sigma^1$ — замыкание линеала $\mathcal{L}$ по норме пространства $\mathbb{H}^1$, $\mathbb{H}_\sigma^2 := \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$.

Следуя подходу С. Л. Соболева (см. [14]), используем обобщенную постановку задачи (5.1)–(5.5), заменив уравнение несжимаемости (5.5) и граничное условие (5.2) на уравнение

$$\Pi v(\cdot, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (5.6)$$

Действительно, в силу плотности множества $\{\nabla \varphi : \varphi \in C^\infty(\Omega)\}$ в подпространстве $\mathbb{H}_\pi$ и в силу интегрального тождества

$$\int_{\Omega} \langle v, \nabla \varphi \rangle_{\mathbb{R}^3} dx = \int_{\partial \Omega} v_n \varphi ds - \int_{\Omega} (\nabla \cdot v) \varphi dx,$$

справедливого при всех $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, получим, что для функции $v \in \mathbb{H}^1 = (H^1(\Omega))^3$ выполнение равенств (5.2) и (5.5) равносильно тому, что $v \in \mathbb{H}_\sigma$, т.е. $\Pi v = 0$. Отказавшись от ограничения $v \in \mathbb{H}^1$, получим условие (5.6).

Очевидно, что оператор $V : v \rightarrow [v, \bar{\omega}]$, $\bar{\omega} = (0, 0, \omega)$, осуществляет линейное непрерывное отображение из $\mathbb{L}_2$ в $\mathbb{L}_2$, при этом $\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}_2)} = |\omega|$.

Положим $\Sigma = I - \Pi$, $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathcal{U} = \mathbb{H}_\sigma^2$, $V_\sigma = V|_{\mathbb{H}_\sigma}$,

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad M = \begin{pmatrix} \Sigma V_\sigma & \mathbb{O} \\ \Pi V_\sigma & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad B = \Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma^2; \mathbb{L}_2). \quad (5.7)$$

Лемма 5.1 (см. [5]). Пусть операторы L и M имеют вид (5.6). Тогда $M - (L, 0)$ -ограниченный оператор и

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \Pi V_\sigma & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

В силу леммы 5.1 подпространство $\mathcal{X}^1 := \text{im } P$ изоморфно $\mathbb{H}_\sigma \times \{0\}$,

$$\mathcal{X}^0 := \ker P = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi, \quad \mathcal{Y}^1 := \text{im } Q = \mathbb{H}_\sigma \times \{0\}, \quad \mathcal{Y}^0 := \ker Q = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi.$$

Теорема 5.1. Для любых $v_k \in \mathbb{H}_\sigma$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $v_\tau \in \mathbb{H}_\sigma$ при достаточно малом $\tau \in (0, T]$ существует единственное решение задачи (5.1), (5.3), (5.4), (5.6).

Доказательство. Из вида проекторов P, Q в лемме 5.1 следует, что задача (5.1), (5.3), (5.4), (5.6) редуцируется к задаче (3.1), (3.17), (3.19). При этом согласно лемме 5.1 оператор M является $(L, 0)$ -ограниченным, функция μ имеет ограниченную вариацию как функция единичного скачка в точке τ , оператор $QB = \Sigma \Delta : \mathbb{H}_\sigma^2 \rightarrow \mathbb{H}_\sigma$ непрерывно обратим (см. [9]), $L_1^{-1} M_1 = \Sigma V_\sigma$. Оператор

$$\begin{aligned} \chi(L_1^{-1} M_1)^{-1} &= \tau^{-\alpha} \Gamma(\alpha + 1) \Delta^{-1} \left(I + \tau^\alpha \Gamma(\alpha + 1) L_1^{-1} M_1 E_{\alpha, 2\alpha+1}(\tau^\alpha L_1^{-1} M_1) \right)^{-1} = \\ &= \tau^{-\alpha} \Gamma(\alpha + 1) \Delta^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tau^{\alpha k} \left[\Gamma(\alpha + 1) L_1^{-1} M_1 E_{\alpha, 2\alpha+1}(\tau^\alpha L_1^{-1} M_1) \right]^k \end{aligned}$$

существует и непрерывен при достаточно малом $\tau > 0$. По теореме 3.7 получим требуемое. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах// Прикл. мат. мех. — 1960. — 24, № 5. — С. 852–864.
2. Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения// Прикл. мат. мех. — 1948. — 12. — С. 529–539.
3. Глушак А. В. Обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Совр. мат. Фундам. напр. — 2006. — 15. — С. 126–141.
4. Глушак А. В. Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка// Мат. заметки. — 2010. — 87, № 5. — С. 684–693.
5. Гордиевских Д. М., Федоров В. Е. Решения начально-краевых задач для некоторых вырожденных систем уравнений дробного порядка по времени// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. мат. — 2015. — 12. — С. 12–22.
6. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. — Новосибирск: Научная книга, 1998.
7. Иванова Н. Д., Федоров В. Е., Комарова К. М. Нелинейная обратная задача для системы Осколкова, линеаризованной в окрестности стационарного решения// Вестн. Челябинск. гос. ун-та. Мат. Мех. Информ. — 2012. — 26 (280), № 15. — С. 49–70.
8. Икези Х. Экспериментальное исследование солитонов в плазме// в кн.: Солитоны в действии. — М.: Мир, 1981. — С. 163–184.
9. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: ГИФМЛ, 1961.
10. Плеханова М. В., Федоров В. Е. Оптимальное управление вырожденными распределенными системами. — Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2013.
11. Прилепко А. И. Метод полугрупп решения обратных, нелокальных и неклассических задач. Прогноз-управление и прогноз-наблюдение эволюционных уравнений. I// Диффер. уравн. — 2005. — 41, № 11. — С. 1560–1571.
12. Пятков С. Г., Самков М. Л. О некоторых классах коэффициентных обратных задач для параболических систем уравнений// Мат. тр. — 2012. — 15, № 1. — С. 155–177.
13. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. — М.: Физматлит, 2007.
14. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — 18. — С. 3–50.
15. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида// Мат. заметки. — 1994. — 56, № 2. — С. 99–113.
16. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера// Диффер. уравн. — 2002. — 38, № 5. — С. 637–644.
17. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
18. Уизем Д. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
19. Уразаева А. В., Федоров В. Е. Задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений гидродинамики// Диффер. уравн. — 2008. — 44, № 8. — С. 1111–1119.
20. Уразаева А. В., Федоров В. Е. О корректности задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений// Мат. заметки. — 2009. — 85, № 3. — С. 440–450.
21. Фалалеев М. В. Абстрактная задача прогноз-управление с вырождением в банаховых пространствах// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. мат. — 2010. — 3, № 1. — С. 126–132.
22. Федоров В. Е., Гордиевских Д. М. Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 1. — С. 71–83.
23. Федоров В. Е., Гордиевских Д. М., Плеханова М. В. Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной// Диффер. уравн. — 2015. — 51, № 10. — С. 1367–1375.
24. Федоров В. Е., Иванова Н. Д. Нелинейная эволюционная обратная задача для некоторых уравнений соболевского типа// Сиб. электрон. мат. изв. — 2011. — 8. — С. 363–378.

25. Федоров В. Е., Уразаева А. В. Линейная эволюционная обратная задача для уравнений соболевского типа// в кн.: Неклассические уравнения математической физики. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2010. — С. 293–310.
26. Abasheeva N. L. Some inverse problems for parabolic equations with changing time direction// J. Inv. Ill-Posed Probl. — 2004. — 12, № 4. — P. 337–348.
27. Al Horani M., Favini A. Degenerate first-order inverse problems in Banach spaces// Nonlin. Anal. — 2012. — 175, № 1. — P. 68–77.
28. Caputo M. Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent. II// Geophys. J. Astron. Soc. — 1967. — 13. — P. 529–539.
29. Favini A., Lorenzi A. Differential Equations. Inverse and Direct Problems. — New York: Chapman and Hall/CRC, 2006.
30. Favini A., Yagi A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces. — New York: Marcel Dekker, 1999.
31. Fedorov V. E., Ivanova N. D. Identification problem for a degenerate evolution equation with overdetermination on the solution semigroup kernel// Discr. Contin. Dynam. Syst. Ser. S. — 2016. — 9, № 3. — P. 687–696.
32. Fedorov V. E., Ivanova N. D. Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2017. — 20, № 3. — P. 706–721.
33. Fedorov V. E., Urazaeva A. V. An inverse problem for linear Sobolev-type equations// J. Inv. Ill-Posed Probl. — 2004. — 12, № 4. — P. 387–395.
34. Kozhanov A. I. Composite Type Equations and Inverse Problems. — Utrecht: VSP, 1999.
35. Liu Y., Rundell W., Yamamoto M. Strong maximum principle for fractional diffusion equations and an application to an inverse source problem// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2016. — 19, № 4. — P. 888–906.
36. Orlovsky D. G. Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann–Liouville fractional derivative in a Hilbert space// J. Sib. Federal Univ. Math. Phys. — 2015. — 8, № 1. — P. 55–63.
37. Plekhanova M. V. Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative// Math. Meth. Appl. Sci. — 2016. — 40. — P. 41–44.
38. Prilepko A. I., Orlovskii D. G., Vasin I. A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — New York–Basel: Marcel Dekker, 2000.
39. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — Utrecht: VSP, 2003.

Федоров Владимир Евгеньевич

Челябинский государственный университет;

Шадринский государственный педагогический университет;

Южно-Уральский государственный университет

(национальный исследовательский университет), Челябинск

E-mail: kar@csu.ru

Нагуманова Анна Викторовна

Челябинский государственный университет

E-mail: urazaeva_anna@mail.ru