Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. У. Хубиев, Краевая задача для нагруженного гипербола-параболического уравнения с вырождением порядка, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 167, 112–116

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-167-112-116>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 13:12:17

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ПОРЯДКА

© 2019 г. К. У. ХУБИЕВ

Аннотация. В работе исследуется краевая задача с разрывными условиями сопряжения на линии изменения типа для модельного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа с вырождением порядка в области его гиперболичности. В параболической области уравнение представляет собой уравнение дробной диффузии, в гиперболической — нагруженное односкоростное уравнение переноса. Доказана теорема единственности и существования решения, выписано явное решение задачи в параболической и гиперболической областях.

Ключевые слова: краевая задача, нагруженное уравнение, уравнение смешанного типа, гиперболо-параболическое уравнение, уравнение дробной диффузии, уравнение переноса.

BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A LOADED HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATION WITH DEGENERATION OF ORDER

© 2019 K. U. KHUBIEV

ABSTRACT. In this paper, we study a boundary-value problem with discontinuous conjugation conditions on the line of type changing for a model equation of mixed hyperbolic-parabolic type with order degeneration in the hyperbolicity domain. In the parabolic domain, the equation is the fractional diffusion equation, whereas in the hyperbolic domain it is the loaded one-speed transport equation. We prove the uniqueness and existence theorem and propose an explicit solution of the problem in the parabolic and hyperbolic domains.

Keywords and phrases: boundary-value problem, loaded equation, mixed-type equation, hyperbolic-parabolic equation, fractional diffusion equation, transport equation.

AMS Subject Classification: 35M10, 35M12

1. Введение и постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - D_{0y}^{\alpha} u = 0, & y > 0, \\ u_x + u_y + cu + \lambda u(x_0, y) = 0, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в области $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$, где $\Omega^+ = \{(x, y) : 0 < x < r, y > 0\}$, Ω^- — область, ограниченная характеристиками $x - y = 0$, $x - y = r$ уравнения (1) и отрезком прямой $y = x_0 - r$ при $y < 0$; $x_0 \in [0, r]$, $\lambda, c = \text{const}$, $0 < \alpha < 1$, D_{ax}^{α} — оператор дробного интегро-дифференцирования

Римана—Лиувилля порядка α с началом в точке a и с концом в точке x (см. [6, с. 9]):

$$D_{ax}^\alpha \varphi(t) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \varphi(x), & \alpha = 0, \\ \text{sign}^{[\alpha]+1}(x-a) \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi(t), & \alpha > 0, \end{cases}$$

где $[\alpha]$ — целая часть числа α , удовлетворяющая неравенству $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера (см. [5, с. 25]).

При $y > 0$ уравнение (1) является уравнением дробной диффузии (см. [8]), а при $y < 0$ — нагруженным односкоростным уравнением переноса; в математической биологии при $\lambda = 0$ оно известно как уравнение МакКендрика (см. [5, с. 179]).

Краевые задачи для нагруженных уравнений с частными производными исследовались в работах многих авторов (см. например, [4, 7] и библиографию в этих работах). В настоящее время теория краевых задач для нагруженных уравнений смешанного типа продолжает интенсивно развиваться. Краевые задачи для модельных нагруженных уравнений смешанного гиперболо-параболического типа и эллиптико-гиперболического типа с нагруженным слагаемым $\lambda u(x, 0)$ и вырождением порядка в области его гиперболичности как в ограниченной, так и в неограниченной областях исследованы в [7]. В этой же монографии исследованы внутренние краевые задачи для уравнений смешанного гиперболо-параболического типа с характеристической и нехарактеристической нагрузками и их связь с аналогом задачи Трикоми (см. [7, с. 165]).

В [1] исследован эффект влияния «нагрузки» $\lambda u_x(x, 0) + \mu u_y(0, y)$ на корректную постановку начально-краевых задач для существенно нагруженного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. В [18] для нагруженного уравнения МакКендрика—фон Ферстера исследована задача Коши с данными на нехарактеристических и характеристических линиях.

Отметим также работы [2, 3, 9–14, 16, 17, 19–22], в которых исследуются локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа второго и третьего порядков, содержащих оператор с дробной производной.

Краевая задача для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с вырождением порядка в области его гиперболичности для уравнения, которое в Ω^+ имело вид $u_{xx} - u_y + \lambda_1 u(x_1, y) = 0$, была исследована в [15]. В настоящей работе для уравнения (1) исследуется краевая задача в области Ω .

Обозначим через J интервал $0 < x < r$ прямой $y = 0$. Под *регулярным решением уравнения* (1) в области Ω будем понимать функцию $u = u(x, y)$ из класса

$$y^{1-\alpha} u \in C(\bar{\Omega}^+), \quad y^{1-\alpha} (y^{1-\alpha} u)_y \in C(\Omega^+ \cup J), \quad u_{xx} \in C(\Omega^+), \quad u \in C(\bar{\Omega}^-) \cap C^1(\Omega^-),$$

удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega^+ \cup \Omega^-$.

Для уравнения (1) исследуется следующая задача.

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(r, y) = \varphi_r(y), \quad y > 0; \quad (2)$$

кроме того, на линии $y = 0$ выполняются условия сопряжения:

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\alpha} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-} u(x, y), \quad (3)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\alpha} (y^{1-\alpha} u(x, y))_y = \lim_{y \rightarrow 0-} u_y(x, y), \quad (4)$$

где $\varphi_0(y)$, $\varphi_r(y)$ — заданные функции.

Здесь надо отметить, что при $\lambda = 0$, т.е. в гиперболической части области, задается уравнение без нагрузки, или же нагруженное слагаемое имеет вид $\lambda u(x, 0)$, решение можно найти в полуполосе D^- , ограниченной характеристиками $x - y = 0$, $x - y = r$ уравнения (1) и отрезком

$[0, r]$ прямой $y = 0$. В случае уравнения (1) область будет ограничиваться еще и отрезком прямой $y = x_0 - r$.

2. Основные результаты. Найдем соотношения между $u(x, 0)$ и $u_y(x, 0)$ на линии изменения типа. Предположим, что существует решение $u(x, y)$ задачи (1)–(4). Введем обозначения

$$\begin{aligned}\tau(x) &= \lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\alpha} u(x, y), & x \in \overline{J}, \\ \nu(x) &= \lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\alpha} (y^{1-\alpha} u(x, y))_y, & x \in J,\end{aligned}\quad (5)$$

а из условий задачи (2) и (3) получим

$$\tau(0) = \lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\alpha} \varphi_0(y) = \widetilde{\varphi}_0, \quad \tau(r) = \lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\alpha} \varphi_r(y) = \widetilde{\varphi}_r. \quad (6)$$

В [2, с. 48] функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ для уравнения (1), принесенное из параболической области Ω^+ , получено в виде

$$\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \tau''(x). \quad (7)$$

Переходя к пределу при $y \rightarrow -0$, из Ω_2 получим

$$\tau'(x) + \nu(x) + c\tau(x) + \lambda\tau(x_0) = 0. \quad (8)$$

Из (7), (8) получаем нагруженное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\tau''(x) + \Gamma(\alpha + 1)\tau'(x) + c\Gamma(\alpha + 1)\tau(x) = -\lambda\Gamma(\alpha + 1)\tau(x_0). \quad (9)$$

Решение задачи Дирихле (6) для уравнения (9) представимо в виде

$$\tau(x) = -\lambda\Gamma(\alpha + 1)\tau(x_0) \int_0^r G(x, \xi) d\xi + G_\xi(x, r)\widetilde{\varphi}_r - G_\xi(x, 0)\widetilde{\varphi}_0, \quad (10)$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина задачи (9), (6), имеющая вид

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\exp(k[\xi - x]) \operatorname{sh}(\mu\xi) \operatorname{sh}(\mu[x - r])}{\mu \operatorname{sh}(\mu r)}, & 0 \leq \xi \leq x, \\ \frac{\exp(k[\xi - x]) \operatorname{sh}(\mu x) \operatorname{sh}(\mu[\xi - r])}{\mu \operatorname{sh}(\mu r)}, & x \leq \xi \leq r, \end{cases}$$

где $\mu = \sqrt{\Gamma^2(\alpha + 1) - 4c\Gamma(\alpha + 1)}/2$, $2k = \Gamma(\alpha + 1)$, $\mu r \neq \pi ni$, $n = 1, 2, \dots$, i — мнимая единица. Здесь надо отметить, что $G(x, \xi)$ является действительнзначной функцией, зависящей от комплексного параметра μ .

При $x \rightarrow x_0$ из (10) получим

$$\tau(x_0) = \frac{G_\xi(x_0, 0)\widetilde{\varphi}_0 - G_\xi(x_0, r)\widetilde{\varphi}_r}{1 + \lambda\Gamma(\alpha + 1) \int_0^r G(x_0, \xi) d\xi} \quad (11)$$

при выполнении условия

$$1 + \lambda\Gamma(\alpha + 1) \int_0^r G(x_0, \xi) d\xi \neq 0. \quad (12)$$

Заметим, что условие (12) непусто; например при $c \leq 0$, $\lambda \leq 0$ оно всегда выполняется.

Таким образом, после того, как $\tau(x_0)$ найдено по формуле (11), $\tau(x)$ полностью определяется формулой (10), причем $\tau(x) \in C[0, r] \cap C^2]0, r[$.

Решение задачи (1)–(4) в области гиперболичности Ω^- выпишем так же, как и в [15]. Решение задачи Коши для уравнения (1) в Ω^- имеет вид

$$u(x, y) = \tau(x - y)e^{-cy} - \lambda \int_0^y u(x_0, \eta)e^{c(\eta-y)} d\eta. \quad (13)$$

При $x \rightarrow x_0$ из (13) получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции $u(x_0, y)$:

$$u(x_0, y) + \lambda \int_0^y e^{c(\eta-y)} u(x_0, \eta) d\eta = e^{-cy} \tau(x_0 - y),$$

единственное решение которого задается формулой

$$u(x_0, y) = e^{-cy} \left[\tau(x_0 - y) - \lambda \int_0^y e^{\lambda(\eta-y)} \tau(x_0 - \eta) d\eta \right]. \quad (14)$$

Подставляя (10) и (14) в (13), получим решение задачи (1)–(4) в Ω^- в явном виде.

Решение первой краевой задачи (2), (5) для уравнения (1) в параболической части области Ω^+ задается следующей формулой (см. [8]):

$$u(x, y) = \int_0^y \frac{\partial G_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \varphi_0(\eta) d\eta - \int_0^y \frac{\partial G_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=r} \varphi_r(\eta) d\eta + \int_0^r G_1(x, y; \xi, 0) \tau(\xi) d\xi, \quad (15)$$

где

$$G_1 = G_1(x, y; \xi, \eta) = \frac{\Gamma(\alpha)}{2} (y - \eta)^{\delta-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e_{1,\delta}^{1,\delta} \left(-\frac{|x - \xi + 2n|}{(y - \eta)^\delta} \right) \right] - \left[e_{1,\delta}^{1,\delta} \left(-\frac{|x + \xi + 2n|}{(y - \eta)^\delta} \right) \right],$$

$$\delta = \frac{\alpha}{2}, \quad e_{a,b}^{c,d}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(c + ka) \Gamma(d - bk)} - \text{функция Райта и } a > b \text{ (см. [8]).}$$

Теорема 1. Если функции $y^{1-\alpha} \varphi_0(y)$, $y^{1-\alpha} \varphi_r(y)$ принадлежат классу $C(\overline{\Omega}^+)$ и выполняется условие (12), то задача (1)–(4) имеет единственное решение, которое в Ω^- задается формулой (13), а в Ω^+ — формулой (15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атнаев А. Х. О некоторых задачах для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2016. — 4-1 (16). — С. 9–14.
2. Гекжиева С. Х. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений с дробной производной по времени / Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2003.
3. Гекжиева С. Х. Смешанные краевые задачи для нагруженного диффузионно-волнового уравнения // Науч. вед. Белгород. гос. ун-та. Сер. мат. физ. — 2016. — 42, № 1 (12) 6 (227). — С. 32–35.
4. Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. — Алматы, 2010.
5. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995.
6. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
7. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применения. — М.: Наука, 2012.
8. Псху А. В. Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 9. — С. 1286–1289.
9. Ретин О. А. Краевая задача для дифференциального уравнения с частной дробной производной Римана—Лиувилля // Уфимск. мат. ж. — 2015. — 7, № 3. — С. 70–75.
10. Тарасенко А. В. О разрешимости нелокальной задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения // Изв. вузов. Мат. — 2018. — 3. — С. 62–69.

11. Тарасенко А. В., Егорова И. П. О нелокальной задаче с дробной производной Римана—Лиувилля для уравнения смешанного типа// Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. — 2017. — 21, № 1. — С. 112–121.
12. Хубиев К. У. Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения гипербола-параболического типа с дробной производной при нагрузке// Докл. Адыгск. (Черкесск.) Междунар. акад. наук. — 2015. — 17, № 3. — С. 54–59.
13. Хубиев К. У. Внутреннекраевая задача для уравнения гипербола-параболического типа с оператором дробной диффузии// Науч. вед. Белгород. гос. ун-та. Сер. мат. физ. — 2017. — 49, № 27 (276). — С. 52–56.
14. Хубиев К. У. Задачи со смещением для нагруженного уравнения гипербола-параболического типа с оператором дробной диффузии// Вестн. Удмуртск. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. — 2018. — 28, № 1. — С. 82–90.
15. Хубиев К. У. Краевая задача для нагруженного уравнения гипербола-параболического типа с вырождением порядка в области его гиперболичности// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — 2018. — 149. — С. 113–117.
16. Abdullaev O. Kh. On a problem for the loaded mixed type equation with fractional derivative// Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2016. — 1 (12). — P. 7–14.
17. Abdullaev O. Kh., Sadarangani K. B. Nonlocal problem with integral gluing conditions for loaded mixed type equations involving the Caputo fractional derivate// Electron. J. Differ. Equations. — 2016. — 164. — P. 1–10.
18. Attaev A. Kh. The Cauchy problem for for the McKendrick–von Foerster loaded equation// Int. J. Pure Appl. Math. — 2017. — 113, № 4. — P. 47–52.
19. Baltaeva U. Solvability of the analogs of the problem Tricomi for the mixed type loaded equations with parabolic-hyperbolic operators// Boundary-Value Problems. — 2014. — 1. — P. 211–222.
20. Islomov B., Ochilova N. K. About a problem for the degenerating mixed type equation fractional derivative// Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2017. — 1 (17). — P. 22–32.
21. Kadirkulov B. J. Boundary problems for mixed parabolic-hyperbolic equations with two lines of changing type and fractional derivative// Electron. J. Differ. Equations. — 2014. — 57. — P. 1–7.
22. Karimov E. T., Akhatov J. S. A boundary problem with integral gluing condition for a parabolic-hyperbolic equation involving the Caputo fractional derivative// Electron. J. Differ. Equations. — 2014. — 14. — P. 1–6.

Хубиев Казбек Узеирович

Институт прикладной математики и автоматизации,

Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук, Нальчик

E-mail: khubiev_math@mail.ru