Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Абрамов, О ветвлении большого периодического решения системы дифференциальных уравнений с параметром, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 168, 3–8

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-168-3-8>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 12:53:08

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 3–8
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-3-8

УДК 517.925.52

О ВЕТВЛЕНИИ БОЛЬШОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

© 2019 г. В. В. АБРАМОВ

Аннотация. Исследована нормальная периодическая система обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром, являющаяся квазилинейной в окрестности бесконечности. Предполагается, что правая часть системы имеет критическое линейное приближение. В терминах свойств первого однородного нелинейного приближения оператора монодромии получены условия существования периодического решения, у которого начальное значение является бесконечно большим при бесконечно малом значении параметра.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, периодическое решение, малый параметр, оператор монодромии.

ON THE BRANCHING OF A LARGE PERIODIC SOLUTION OF A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A PARAMETER

© 2019 V. V. ABRAMOV

ABSTRACT. We study a normal periodic system of ordinary differential equations with a small parameter, which is quasilinear in a neighborhood of infinity, under the assumption that the right-hand side of the system has a critical linear approximation. In terms of the properties of the first homogeneous nonlinear approximation of the monodromy operator, we obtain conditions for the existence of a periodic solution whose initial value is infinitely large for an infinitesimal value of the parameter.

Keywords and phrases: differential equation, periodic solution, small parameter, monodromy operator.

AMS Subject Classification: 34C25

1. Введение. В монографии М. А. Красносельского [3] на основе свойств мажорирующей системы установлен признак существования периодического решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с некритической линейной частью, выделенной в окрестности бесконечности. В данной работе рассмотрим критический случай существования периодического решения системы указанного типа, предполагая, что правая часть системы зависит от малого параметра.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \mu), \quad (1)$$

в которой $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ — малый параметр, правая часть является ω -периодической интегрируемой по t при всех x и μ , функция $f(t, x, \mu)$ гладко зависит от фазовой переменной в окрестности бесконечности и от малого параметра, $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha^{-1} \|f(t, \alpha x, \mu/\alpha)\| \equiv 0$.

Обозначим через $x(t, a, \mu)$ решение с начальным значением $x(0, a, \mu) = a$.

Определение 1. Решение $x(t, a^*, \mu^*)$ системы (1) называется большим, если существует параметризация $a^* = a(\alpha)$, $\mu^* = \mu(\alpha)$, $\Delta < \alpha$, при которой

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} a^* = \infty, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mu^* = 0_m.$$

Пара $(a'(+\infty), \mu'(+\infty))$ задает направление ветвления решения от бесконечности.

Найдем условия существования большого ω -периодического решения системы (1). С этой целью будем использовать схему рассуждений, предложенную в [1, 2].

2. Основные результаты. Так как при $x \rightarrow \infty$ и $\mu \rightarrow 0_m$ правая часть системы (1) близка к линейной, то при достаточно малых значениях параметра решения с большими по норме начальными значениями определены при $t \in [0, \omega]$. Поэтому с помощью оператора монодромии $a \rightarrow x(\omega, a, \mu)$ можно определить сдвиг начальной точки на период. Установим структуру оператора монодромии системы (1) в окрестности бесконечности фазового пространства.

Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица линейной системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(0) = E$. Решение системы (1) представимо в виде $x(t, a, \mu) = X(t)a + y(t, a, \mu)$, где решение линейной системы $\dot{x} = A(t)x + f(t, x(t, a, \mu), \mu)$ имеет вид

$$y(t, a, \mu) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau, a, \mu), \mu) d\tau.$$

По свойству системы (1) имеем $f'_x(t, \infty, 0_m) = 0_{nn}$. Из [3, теорема 2.2] следует, что $X(t) = x'_a(t, \infty, 0_m)$. Поэтому

$$y'_a(t, \infty, 0_m) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f'_x(\tau, \infty, 0_m) x'_a(\tau, \infty, 0_m) d\tau = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) \cdot 0_{nn} \cdot X(\tau) d\tau = 0_{nn},$$

т.е. $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha^{-1} \|y(t, \alpha a, \mu/\alpha)\| \equiv 0$.

Без ограничения общности рассуждений далее будем предполагать, что имеет место равенство $y(\omega, \alpha, \mu) = p(a, \mu) + \varphi(a, \mu)$, в котором $p(a, \mu)$ — главная нелинейная однородная часть оператора монодромии, $p(\alpha a, \mu/\alpha) = S(\alpha)p(a, \mu)$, $S(\alpha) = \text{diag}(\alpha^{k_1}, \dots, \alpha^{k_n})$, $0 < k_i < 1$, $i = \overline{1, n}$, $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|S^{-1}(\alpha)\varphi(\alpha a, \mu/\alpha)\| \equiv 0$. Тогда оператор монодромии системы (1) в окрестности бесконечности фазового пространства имеет вид

$$x(\omega, a, \mu) = Xa + p(a, \mu) + \varphi(a, \mu), \quad (2)$$

где $X = X(\omega)$ — матрица монодромии.

Допустим, что имеет место не критический случай $\det(X - E) \neq 0$. Произвольно выберем для пары (a, μ) совместную параметризацию $a^* = \alpha(a_0 + \bar{a}(\alpha))$, $\mu^* = \alpha^{-1}(\mu_0 + \bar{\mu}(\alpha))$, в которой $\alpha > 0$, $a_0 \neq 0_n$, $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \bar{a}(\alpha) = 0_n$, $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \bar{\mu}(\alpha) = 0_m$. Тогда справедливо неравенство $[X - E]a_0 \neq 0_n$ и для достаточно малых значений a имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|x(\omega, a^*, \mu^*) - a^*\| &\geq \\ &\geq \alpha \left\| [X - E](a_0 + \bar{a}(\alpha)) - \left\| \alpha^{-1} S(\alpha) \left(p(a_0 + \bar{a}(\alpha), \mu_0 - \mu(\alpha)) + S^{-1}(\alpha) \varphi(a^*, \mu^*) \right) \right\| \right\| > \\ &> \frac{\alpha}{2} \|[X - E]a_0\| > 0. \end{aligned}$$

При этом $x(\omega, a^*, \mu^*) \neq a^*$, т.е. у системы (1)–(2) не происходит ветвления периодических решений от бесконечности.

Итак, при решении задачи о ветвлении периодического решения от бесконечности необходимо рассматривать критический случай по линейному приближению $\det(X - E) = 0$. При этом система

$$[X - E]a_0 = 0_n \quad (3)$$

имеет общее решение вида $a_0 = Kz \in \ker[X - E]$, где K — фундаментальная $(n \times r)$ -матрица решений системы (3), $z \in \mathbb{R}^r$ — произвольный вектор. Допустим, при некотором значении $a_0 = Kz_0$ выполняется равенство

$$p(a_0, \mu_0) = 0_n. \quad (4)$$

Заметим, что равенство (4) необходимо для ветвления большого периодического решения с направлением (a_0, μ_0) . Действительно, при условии $p(a_0, \mu_0) \neq 0_n$ выберем совместную параметризацию

$$a^* = \alpha(a_0 + \bar{a}(\alpha)), \quad \mu^* = \alpha^{-1}(\mu_0 + \bar{\mu}(\alpha)),$$

в которой $\alpha > 0$, $\bar{a}(\alpha)$ и $\bar{\mu}(\alpha)$ — произвольные функции,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \bar{a}(\alpha) = 0_n, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \bar{\mu}(\alpha) = 0_m.$$

Тогда в силу равенства (3) для достаточно малых значений α имеет место оценка

$$\|x(\omega, a^*, \mu^*) - a^*\| \geq \|S(\alpha)p(a_0 + \bar{a}(\alpha), \mu_0 + \bar{\mu}(\alpha))\| - \|\varphi(a^*, \mu^*)\| > \frac{1}{2}\|S(\alpha)p(a_0, \mu_0)\| > 0.$$

При этом решение $x(\omega, a^*, \mu^*)$ не является периодическим.

Предположим также, что выполняется условие

$$\text{rang } J(a_0, \mu_0) = n \leq r + m, \quad (5)$$

в котором $J(a_0, \mu_0) = [p'_a(a_0, \mu_0)K \ p'_\mu(a_0, \mu_0)]$.

Теорема 1. При условиях (3), (4), (5) система (1)–(2) имеет большое ω -периодическое решение вида $x(t, a^*, \mu^*)$, $a^* = \alpha(a_0 + Kz(\alpha))$, $\mu^* = \alpha^{-1}(\mu_0 + \bar{\mu}(\alpha))$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} z(\alpha) = 0_n, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \bar{\mu}(\alpha) = 0_m.$$

Доказательство. Пара (a, μ) определяет периодическое решение системы типа (1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет равенству $x(\omega, a, \mu) - a = 0_n$ (см. [3]). Подставим в это равенство $a = a^* = \alpha(a_0 + Kz)$, $\mu = \mu^* = \alpha^{-1}(\mu_0 + \lambda)$, $\alpha > 0$. В силу условий (3), (4), (5) получим уравнение

$$x(a^*, \mu^*) - a^* = S(\alpha) \left(J(a_0, \mu_0) \cdot (z, \lambda) + \tilde{p}(z, \lambda) + S^{-1}(\alpha)\varphi(a^*, \mu^*) \right) = 0_n, \quad (6)$$

где $\tilde{p}(z, \lambda) = p(a_0 + Kz, \mu_0 + \lambda) - J(a_0, \mu_0) \cdot (z, \lambda)$. По условию (5) выберем разложение $J(a_0, \mu_0) \cdot (z, \lambda) = B\nu + B_1\nu_1$, в котором $n \times n$ -матрица B составлена из линейно независимых столбцов, а $(n \times (n - m - r))$ -матрица B_1 составлена из остальных столбцов. Допустим, $\nu_1 = 0_{n-m-r}$. Определим функцию

$$\psi(\alpha, \nu) = S^{-1}(\alpha)\varphi(a^*, \mu^*) + \tilde{p}(z, \lambda).$$

Без ограничения общности рассуждений будем предполагать, что функция $\psi(\alpha, \nu)$ при $\alpha \rightarrow +\infty$ и $\nu \rightarrow 0_n$ доопределена условиями $\psi(+\infty, 0_n) = 0_n$, $\psi'_\nu(+\infty, 0_n) = 0_{nn}$. Тогда уравнение (6) примет вид

$$g(a, \nu) = B\nu + \psi(\alpha, \nu) = 0_n. \quad (7)$$

Так как $g(+\infty, 0_n) = 0_n$, $g'_\nu(+\infty, 0_n) = B$ и $\det B \neq 0$, то по теореме о неявной функции уравнение (7) определяет функцию $\nu = \nu(\alpha)$, $\Delta < \alpha$, $\nu(+\infty) = 0_n$, для которой $g(\alpha, \nu(\alpha)) \equiv 0_n$. Зная $\nu = \nu(\alpha)$ и учитывая, что $\nu_1 = 0_{n-m-r}$, получим функции $z = z(\alpha)$, $\lambda = \lambda(\alpha)$ и пару (α^*, μ^*) , в которой

$$a^* = \alpha(a_0 + Kz), \quad \mu^* = \alpha^{-1}(\mu_0 + \lambda(\alpha)).$$

Так как найденная пара удовлетворяет уравнению (6) и $(\alpha^*, \mu^*) \rightarrow (\infty, 0_m)$ при $\alpha \rightarrow +\infty$, то решение $x(t, a^*, \mu^*)$ системы (1)–(2) — большое ω -периодическое решение по определению. Теорема 1 доказана. $\square$

Лемма 1. Если выполняются условия теоремы 1 и при всех больших $\alpha > 0$ справедливо неравенство

$$\|X + \alpha^{-1}S(\alpha)p'_a(a_0, \mu_0)\| \leq 1 - bh(\alpha),$$

где $b > 0$ — некоторое число, $h(\alpha) > 0$, $h(+\infty) = 0$, то большое ω -периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$ системы (1)–(2) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Для решения $x(t, a^*, \mu^*)$ составим систему в вариациях. Матрица монодромии этой системы по условию (2) имеет вид

$$x'_a(\omega, a^*, \mu^*) = X + p'_a(a^*, \mu^*) + \varphi'_a(a^*, \mu^*) = X + \alpha^{-1}S(\alpha)p'_a(a_0, \mu_0) + W(\alpha),$$

где матрица

$$W(\alpha) = p'_a(a^*, \mu^*) + \varphi'_a(a^*, \mu^*) - \alpha^{-1}S(\alpha)p'_a(a_0, \mu_0)$$

обладает свойством

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha S^{-1}(\alpha)W(\alpha) = 0_{nn}.$$

По условию при всех достаточно больших $\alpha > 0$ имеем

$$\|x'_a(\omega, a^*, \mu^*)\| \leq \|X + \alpha^{-1}S(\alpha)p'_a(a_0, \mu_0)\| + \|W(\alpha)\| \leq 1 - \frac{bh(\alpha)}{2}.$$

При этом спектральный радиус матрицы монодромии $x'_a(\omega, a^*, \mu^*)$ удовлетворяет оценке

$$\rho(x'_a(\omega, a^*, \mu^*)) \leq \|x'_a(\omega, a^*, \mu^*)\| < 1.$$

Значит, решение $x(\omega, a^*, \mu^*)$ асимптотически устойчиво по линейному приближению. Лемма доказана. $\square$

Проверка необходимых условий наличия большого периодического решения путем поиска направления ветвления предполагает проверку равенств (3), (4). С вычислительной точки зрения это может представлять затруднения. Теорему 1 целесообразно дополнить признаком, опирающимся на проверку условий типа неравенств. С этой целью вместо необходимых условий типа равенства для направлений ветвления выберем априорную оценку начального значения решения.

Допустим, в окрестности бесконечности левый оператор монодромии имеет вид

$$x(-\omega, a, \mu) = \overline{X}a + \bar{p}(a, \mu) + \bar{\varphi}(a, \mu), \quad (8)$$

где $\overline{X} = X(-\omega)$, $\bar{p}(\alpha a, \mu/\alpha) = S(\alpha)\bar{p}(a, \mu)$, $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha S^{-1}(\alpha)\bar{\varphi}(\alpha a, \mu/\alpha) \equiv 0_n$.

Применив формулу Эйлера для однородной функции, получим соотношения:

$$\begin{aligned} \overline{P}(a)a &= \bar{p}(a, 0_m), \quad \overline{P}(a) = \text{diag}\left(\frac{1}{k_1}, \dots, \frac{1}{k_n}\right) \bar{p}'_a(a, 0_m), \\ P(a, \mu)a &= p(a, \mu), \quad P(a, \mu) = \text{diag}\left(\frac{1}{k_1}, \dots, \frac{1}{k_n}\right) p'_a(a, \mu). \end{aligned}$$

Будем предполагать, что неравенства для векторов и матриц имеют покомпонентный смысл. Определим подмножества конуса неотрицательных векторов

$$K(\sigma) = \{a \in R^m : \|a\| > \sigma, a \geq 0_m\}, \quad \overline{K}(\sigma) = \{a \in R^m : \|a\| = \sigma, a \geq 0_m\}.$$

Допустим, что при всех $\lambda \in K(1)$ выполняются условия

$$X \geq 0_{nn}, \quad \overline{X} \geq 0_{nn} \quad (9)$$

и при всех больших $\alpha > 0$ для некоторого значения $\mu = \mu_0$ справедливы оценки

$$\overline{P}(\lambda) \geq B \geq 0_{nn}, \quad \overline{X} + B > 0_{nn}, \quad (10)$$

$$\|X + \alpha^{-1}S(\alpha)\overline{P}(\lambda)\| \leq 1 - \frac{b}{\alpha^{1+k}}, \quad b > 0, \quad k > 0, \quad (11)$$

$$P(\lambda, \mu_0) \geq D \geq 0_{nn}, \quad X + D > 0_{nn}, \quad (12)$$

$$\|X + \alpha^{-1}S(\alpha)P(\lambda, \mu_0)\| \leq 1 - d/\alpha^{1+k}, \quad d > 0, \quad k > 0. \quad (13)$$

Теорема 2. Если выполняются условия (8)–(13), то система (1)–(2) имеет большое ω -периодическое решение.

Доказательство. В силу неравенств (9), (12), (13) по групповому свойству решений существует такое число $\sigma > 0$, что $x(\omega, a, \mu) \in K(\sigma)$ при условиях $a \in K(\sigma)$ и $\mu = \mu_0/\alpha$, $\alpha > \sigma$, т.е. множество $K(\sigma)$ инвариантно для правого оператора монодромии.

Так как $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha S^{-1}(\alpha) \bar{\varphi}(\alpha a, \mu/\alpha) \equiv 0_n$, то существует такое $\delta_1 \geq \sigma$, что $\|\bar{\varphi}(\alpha \lambda, 0_m)\| \leq b/(2\alpha^k)$ для любого $a = \alpha \lambda \in K(\delta_1)$. При этом из условия (11) следует оценка

$$\|x(-\omega, a, 0)\| < \left(1 - \frac{b}{2\|a\|^k}\right) \|a\| < \|a\|.$$

Поэтому найдется такое $q > 2$, что при достаточно большом $\delta_2 \geq \delta_1$ для любого $\alpha > \delta_2$ справедлива оценка

$$\left\|x\left(-\omega, a\lambda, \frac{\mu_0}{\alpha}\right)\right\| < \left(1 - \frac{b}{q\alpha^k}\right) \alpha < \alpha.$$

Тогда по групповому свойству решений получим, что $\|x(\omega, \alpha \lambda, \mu_0/\alpha)\| > \alpha$.

Рассуждая аналогично предыдущему, можно установить, что условию (13) при достаточно большом $\delta_3 \geq \sigma$ для любого $\alpha > \delta_3$ справедлива оценка

$$\left\|x\left(\omega, \alpha \lambda, \frac{\mu_0}{\alpha}\right)\right\| < \left(1 - \frac{d}{2\alpha^k}\right) \alpha < \alpha.$$

Итак, при любом $\alpha > \max\{\delta_2, \delta_3\}$ существует конусный отрезок

$$K_\alpha = \left\{a = \alpha \lambda \in \mathbb{R}^n : 0 < \Delta(\alpha) \leq \alpha \leq \delta(\alpha), \lambda \geq 0_n, \|\lambda\| = 1\right\},$$

для которого $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \Delta(\alpha) = +\infty$ и

$$x(\omega, \alpha \lambda, \mu_0/\alpha) : K_\alpha \rightarrow \text{int } K_\alpha \quad \text{или} \quad x(-\omega, \alpha \lambda, \mu_0/\alpha) : K_\alpha \rightarrow \text{int } K_\alpha.$$

Так компактное множество K_α гомеоморфно выпуклому, например, множеству

$$\left\{a \in \mathbb{R}^n : \Delta(\alpha) \leq \|a\|_1 \leq \delta(\alpha), a \geq 0_n, \|a\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_i|\right\},$$

то по теореме Брауэра о неподвижной точке существует значение $a^* = a(\alpha) \in \text{int } K_\alpha$, причем $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha^* = +\infty$. Итак, $x(t, \alpha^*, \mu^*)$ — большое ω -периодическое решение для системы (1)–(2) по определению, где $\mu^* = \mu_0/\alpha$. Теорема 2 доказана. $\square$

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \frac{3 \cos t}{2 + \sin t} x + g(t, x, \mu), \quad g(t, x, \mu) = c_1 \mu x^{4/3} + \frac{1}{8} (2 + \sin)^3 c_2 x^{1/3}. \quad (14)$$

Так как $g(t, \alpha x, \mu/\alpha) = \alpha^{1/3} g(t, x, \mu)$, то уравнение (14) можно рассматривать в качестве системы вида (1) порядка $n = 1$ с периодом 2π по t . При этом вычислим $X(t) = (2 + \sin t)^3/8$, $X = 1$,

$$p(a, \mu) = X \int_0^{2\pi} X^{-1}(t) g(t, X(t)a, \mu) dt = 2\pi (c_1 \mu a^{4/3} + c_2 a^{1/3}).$$

Условие (3) выполняется при любом a_0 . Для определенности выберем $a_0 = 1$. Тогда условие (4) выполняется при $\mu_0 = -c_2/c_1$. При этом получим, что $p'_a(a_0, \mu_0) = -2\pi c_2$, $p'_\mu(a_0, \mu_0) = -2\pi c_1$, $\text{rang } J(a_0, \mu_0) = 1$, т.е. справедливо условие (5). Итак, по теореме 1 уравнение (14) имеет большое 2π -периодическое решение с направлением ветвления $(1, -c_2/c_1)$. При $c_2 > 0$ для всех достаточно больших значений $\alpha > 0$ справедливо неравенство $X + \alpha^{-1} S(\alpha) p'_a(a_0, \mu_0) = 1 - 2\pi c_2 \alpha^{-2/3} < 1$. Тогда по лемме большое 2π -периодическое решение асимптотически устойчиво. Полученные выводы согласуются с фактом существования решения $x(t, a^*, \mu^*) = (2 + \sin t)^3 a^*/8$, $a^* = \alpha$ уравнения (14) при $\mu = \mu^* = -c_2 \alpha/c_1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов В. В.* Устойчивость малого периодического решения// Вестн. РАЕН. — 2013. — 13, № 4. — С. 3–5.
2. *Абрамов В. В.* Ветвление периодического решения с положительным начальным значением// Вестн. РАЕН. — 2017. — 17, № 4. — С. 4–7.
3. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.

Абрамов Владимир Викторович

Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина

E-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru