Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Абрамов, С. А. Бельман, Е. Ю. Лискина, Устойчивость по параметру при постоянно действующих возмущениях, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 168, 9–14

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-168-9-14>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 18:25:10

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 9–14
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-9-14

УДК 517.925.51

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПАРАМЕТРУ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

© 2019 г. В. В. АБРАМОВ, С. А. БЕЛЬМАН, Е. Ю. ЛИСКИНА

Аннотация. Для нормальной периодической системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром определено и исследовано свойство устойчивости начала координат. Предполагается, что правая часть системы имеет критическое линейное приближение. Условия устойчивости сформулированы в терминах оценок для оператора монодромии.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, малый параметр, устойчивость, постоянно действующее возмущение, оператор монодромии, периодическое решение.

PARAMETER STABILITY UNDER CONSTANT PERTURBATIONS

© 2019 V. V. ABRAMOV, S. A. BELMAN, E. YU. LISKINA

ABSTRACT. For a normal periodic system of ordinary differential equations with a small parameter, we examine the stability property of the origin under the assumption that the right-hand side of the system has a critical linear approximation. The stability conditions are formulated in terms of estimates of the monodromy operator.

Keywords and phrases: differential equation, small parameter, stability, permanent perturbation, monodromy operator, periodic solution.

AMS Subject Classification: 34D20, 34C25

1. Введение. Свойство устойчивости начала координат при постоянно действующих возмущениях (ПДВ-устойчивость) имеет существенное приложение в теории управления. Классические достаточные признаки, заложившие традиции исследований по ПДВ-устойчивости, установлены прямым методом Ляпунова (см. [8, 9]).

При определении ПДВ-устойчивости в правую часть системы вводится аддитивная добавка, из-за которой система может утратить нулевое решение. В определении используется оценка малости для добавки. Однако при этом не учитываются практически важные случаи согласованности возмущающей добавки с правой частью исследуемой системы. Такое согласование может реализоваться через зависимость исходной правой части и возмущающего воздействия от малого параметра. Поэтому свойство ПДВ-устойчивости целесообразно сформулировать и исследовать на основе понятия устойчивости по параметру (см. [11]). Для нормальной периодической системы обыкновенных дифференциальных уравнений ПДВ-устойчивость начала координат можно обнаружить на основе оценок степеней оператора монодромии (см. [5]). С этой целью используем подходы, примененные в [1–4, 6, 7]. В частности, для исследования можно применить следующую схему. Если при отклонении параметра от нулевого значения происходит ветвление малого периодического решения и это решение устойчиво по параметру, то при достаточно малом значении параметра и начальном значении любое решение остается в окрестности периодического решения, которое содержится в сколь угодно малой окрестности начала координат.

Рассмотрим нормальную систему вида

$$\dot{x} = g(t, x, \alpha), \quad (1)$$

в которой $x \in \mathbb{R}^n$, $x \in I$, I — неограниченный сверху промежуток, $\alpha \geq 0$ — малый вещественный параметр (случай, когда параметр числовой неотрицательный, возникает при наличии векторного параметра при выборе направления стремления параметра к критическому значению). Предположим, что система (1) удовлетворяет условиям существования и единственности решений $x(t, t_0, a, \alpha)$, $x(t_0, t_0, a, \alpha) = a$ в окрестности точки $(a, \alpha) = (0_n, 0)$. Условие типа $g(t, 0_n, \alpha) \equiv 0_n$, при котором система (1) имеет нулевое решение, здесь не принципиально. Поэтому относительно точки $x = 0_n$ в рассматриваемой системе при $\alpha > 0$ можно предполагать наличие постоянно действующих возмущений.

Определение 1. Точка $x = 0_n$ для системы (1) называется *равномерно α -устойчивой при постоянно действующих возмущениях (ПДВ-устойчива по параметру)*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, для которых при всех $a \in \mathbb{R}^n$, $a \geq 0$, $t_0 \in I$ из неравенств $\|a\| \leq \delta_1$, $\alpha \leq \delta_2$ следует, что при любом $t \geq t_0$ справедлива оценка

$$\|x(t, t_0, a, \alpha)\| < \varepsilon.$$

2. Вспомогательные результаты. Исследуем устойчивость по определению 1 для периодической по t системы вида (1), когда $g(t \pm \omega, x, \alpha) = g(t, x, \alpha)$ при всех (t, x, α) . При этом свойство устойчивости решения, сформулированное в терминах оценки нормы возмущения (устойчивость ляпуновского типа), имеет равномерный характер относительно начального момента t_0 (см. [9]). Поэтому без ограничения общности далее полагаем, что $t_0 = 0$. Будем также предполагать, что функция $g(t, x, \alpha)$ достаточно гладко зависит от фазовой переменной и параметра в окрестности точки $(x, \alpha) = (0_n, 0)$, а решения $x(t, a, \alpha)$, $x(0, a, \alpha) = a$ системы локально продолжаемы на промежуток $t \in [0, \omega]$.

Лемма 1. Точка $x = 0_n$ для ω -периодической по t системы (1) ПДВ-устойчива по параметру тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, для которых из неравенств $\|a\| < \delta_1$, $0 \leq \alpha < \delta_2$ следует, что при всех $s \in \mathbb{N}$ определено значение $x(s\omega, a, \alpha)$ и справедлива оценка $\|x(s\omega, a, \alpha)\| < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость данного утверждения очевидна, если в определении 1 взять $t = s\omega$. Достаточность установим по схеме доказательства [5, лемма 9.1]. В силу локальной продолжаемости решений числа δ и δ_2 можно считать такими, что любое решение $x(t, x(s\omega, a, \alpha), \alpha)$ для всех $s \in \mathbb{N}$ определено при $t \in [0, \omega]$, если $\|a\| < \delta$, $\alpha < \delta_2$, т.е. продолжаемо вправо от $s\omega$. При этом любое решение $x(t, a, \alpha)$ нелокально продолжаемо по t . Произвольно зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta_1 \leq \min\{\delta, \varepsilon\}$. В силу непрерывной зависимости решений системы (1) от начальных значений и параметра можно считать, что при любых $\tau \in [0, \omega)$ из условий $\|a\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$ следует оценка $\|x(\tau, a, \alpha)\| < \varepsilon$. Тогда по групповому свойству периодической динамической системы для произвольного $t = s\omega + \tau$, $s = [t/\omega]$, при всех a , удовлетворяющих условию $\|a\| < \delta_1$, и α , удовлетворяющих условию $0 \leq \alpha < \delta_2$, получим оценку

$$\|x(t, a, \alpha)\| = \|x(\tau, \|x(s\omega, a, \alpha)\|, \alpha)\| < \varepsilon.$$

Итак, точка $x = 0_n$ устойчива по определению 1. Лемма 1 доказана. $\square$

Лемма 2. Если для любого $\delta_1 > 0$ существует такое $\delta_2 > 0$, что при $\|a\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$ справедлива оценка $\|x(\omega, a, \alpha)\| \leq \delta_1$, то точка $x = 0_n$ для ω -периодической по t системы (1) ПДВ-устойчива по параметру.

Доказательство. Произвольно зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta_1 = \varepsilon$. По условию существует такое $\delta_2 > 0$, что при $\|a\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$ справедлива оценка $\|x(\omega, a, \alpha)\| \leq \delta_1$. Допустим, для некоторого $s \in \mathbb{N}$ при $\|a\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$ имеет место неравенство $\|x(s\omega, a, \alpha)\| \leq \varepsilon$. Тогда

$$\|x((s+1)\omega, a, \alpha)\| = \|x(\omega, x(s\omega, a, \alpha), \alpha)\| \leq \varepsilon.$$

Следовательно, по индукции $\|x(s\omega, a, \alpha)\| \leq \varepsilon$ при всех $s \in \mathbb{N}$, если $\|a\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$. Итак, в силу леммы 1 точка $x = 0_n$ устойчива по определению 1. Лемма 2 доказана. $\square$

Допустим, периодическая по t система (1) имеет малое ω -периодическое решение $x(t, a^*, \alpha)$, $a^* = a(\alpha) \neq 0_n$, $0 < \alpha < \Delta$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} a^* = 0_n$.

Определение 2. [1]. Малое ω -периодическое решение $x(t, a^*, \alpha)$ является α -устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, для которых из неравенств $\|u\| < \delta_1$, $0 \leq \alpha < \delta_2$ следует, что при всех $s \in \mathbb{N}$ определено значение $x(s\omega, a^* + u, \alpha)$ и справедлива оценка $\|x(s\omega, a^* + u, \alpha) - a^*\| < \varepsilon$.

Лемма 3. Если периодическая по t система (1) имеет малое α -устойчивое периодическое решение, то точка $x = 0_n$ ПДВ-устойчива для системы (1).

Доказательство. Произвольно зафиксируем $\varepsilon > 0$. Начальное значение произвольного решения $x(t, a, \alpha)$ системы (1) представим в виде $a = a^* + u$. Так как начальное значение малого периодического решения удовлетворяет условию $\lim_{\alpha \rightarrow 0} a^* = 0_n$, то существует такое $\gamma > 0$, что $\|a^*\| < \varepsilon/2$ при $\alpha < \gamma$. По условию устойчивости периодического решения существуют $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, для которых в силу неравенств $\|u\| < \gamma_1$, $0 \leq \alpha < \gamma_2$ при всех $s \in \mathbb{N}$ определено значение $x(s\omega, a^* + u, \alpha)$ и справедлива оценка $\|x(s\omega, a^* + u, \alpha) - a^*\| < \varepsilon/2$. Итак, при $\|a\| \leq \|a^*\| + \|u\| < \varepsilon/2 + \gamma_1 = \delta_1$ и $\alpha < \delta_2 = \min\{\gamma, \gamma_1\}$ имеет место неравенство

$$\|x(s\omega, a, \alpha)\| \leq \|x(s\omega, a^* + (a - a^*), \alpha) - a^*\| + \|a^*\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. точка $x = 0_n$ ПДВ-устойчива для системы (1) по лемме 1. Лемма 3 доказана. $\square$

3. Основные результаты. Найдем достаточные условия устойчивости по определению 1. С этой целью рассмотрим систему вида (1)

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \alpha), \quad (2)$$

в которой матрица $A(t)$ и вектор-функция $f(t, x, \alpha)$ являются ω -периодическими по t , $f(t, x, \alpha)$ — локально достаточно гладкая относительно x и α в окрестности точки $(x, \alpha) = (0_n, 0)$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|f(t, \alpha x, \alpha)\|/\alpha \equiv 0$.

Заметим, что к системе вида (2) сводится система $\dot{y} = A(t)y + \alpha h(t) + \tilde{f}(t, x, \alpha)$ с периодической по t правой частью, в которой $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\tilde{f}(t, \alpha x, \alpha)\|/\alpha \equiv 0$, если система $\dot{z} = A(t)z + h(t)$ имеет периодическое решение $z(t)$. Для сведения достаточно сделать подстановку $y = x + \alpha z(t)$.

В силу леммы 2 при исследовании свойства устойчивости по определению 1 для системы (2) требуется локальная оценка оператора монодромии. Установим структуру этого оператора.

Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(0) = E$, $X = X(\omega)$ — матрица монодромии. В силу локальной гладкости правой части системы (2) устанавливается равенство

$$X \int_0^\omega X^{-1}(\tau) f(\tau, X(\tau)a, \alpha) d\tau = p(a, \alpha) + \psi(a, \alpha),$$

в котором $p(a, \alpha)$ — вектор-форма, $p(\alpha a, \alpha) = \alpha^k p(a, 1)$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. При этом функция

$$\psi(a, \alpha) = X \int_0^\omega X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau, a, \alpha), \alpha) d\tau - p(a, \alpha)$$

удовлетворяет условию $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\psi(\alpha a, \alpha)\|/\alpha^k \equiv 0$. Итак, для системы (2) оператор монодромии локально допускает выделение главной однородной части порядка k относительно начального значения и параметра

$$x(\omega, a, \alpha) = Xa + p(a, \alpha) + \psi(a, \alpha). \quad (3)$$

В частности, это возможно, если в правой части системы (2) функция $f(t, x, \alpha)$ локально допускает выделение главной вектор-формы $f(t, x, \alpha) = f_k(t, x, \alpha) + \tilde{f}(t, x, \alpha)$, $f_k(t, \alpha x, \alpha) = \alpha^k f_k(t, x, 1)$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\tilde{f}(t, \alpha x, \alpha)\|/\alpha^k \equiv 0$, которая не аннулируется при усреднении по решениям системы $\dot{x} = A(t)x$, т.е.

$$p(a, \alpha) = X \int_0^\omega X^{-1}(\tau) f_k(\tau, X(\tau)a, \alpha) d\tau.$$

Условия устойчивости по определению 1 для системы (2)–(3) сформулируем в терминах свойств функции $p(a, \alpha)$. При этом будем предполагать, что имеет место критический случай по линейному приближению: $\det(X - E) = 0$, $\rho(X) = 1$ ($\rho(*)$ — операция вычисления спектрального радиуса матрицы).

Допустим, выделена матрица $P_0(a)$, удовлетворяющая условию $P_0(a)a = p(a, 0)$, причем существуют такие числа $c > 0$ и $b > 0$, что при всех λ , удовлетворяющих условию $\|\lambda\| = c$, и при всех малых $\gamma > 0$ справедлива оценка

$$\|X + \gamma P_0(\lambda)\| \leq 1 - \gamma b. \quad (4)$$

Рассмотрим систему (2)–(3) при $\alpha = 0$. Согласно [5, лемма 9.2] задача об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2)–(3) сводится к задаче об асимптотической устойчивости нулевого решения системы в конечных разностях

$$a_{j+1} = [X + P_0(a_j) + \Psi(a_j)]a_j, \quad (5)$$

где $\Psi(a)$ — какая-либо матрица, удовлетворяющая условию $\Psi(a)a = \psi(a, 0)$. Так как $\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{1-k} \|\Psi(\beta a)\| = 0$, то существует такое $\delta_1 > 0$, что $\|\Psi(a)\| < b\|a\|^{k-1}/2$ при всех таких a , что $\|a\| < \delta_1$. Тогда по условию (4) получим оценку

$$\|a_{j+1}\| < \left(1 - \frac{1}{2}b\|a_j\|^{k-1}\right) \|a_j\| < \|a_j\|. \quad (6)$$

Выберем тождественную последовательность функций $V_j(u) \equiv \|u\|$. Для любого члена этой последовательности и для любых аргументов по свойствам нормы выполняются условия

$$a(\|u\|) = \frac{\|u\|}{2} \leq V_j(u) \leq b(\|u\|) = 2\|u\|, \quad |V_j(u) - V_j(\tilde{u})| \leq \|u - \tilde{u}\|.$$

Кроме того, при всех малых u справедливо неравенство

$$\|u_{j+1}\| - \|u_j\| < -\frac{1}{2}b\|u_j\|^k < -c(\|u_{j+1}\|) = -\frac{1}{2}b\|u_{j+1}\|^k.$$

Так как $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, $c(\cdot)$ — функции класса Хана, то в силу [10, предложение 2] нулевое решение системы (5) асимптотически устойчиво.

Оценку (6) при $a = \beta\lambda$, $\beta > 0$, $\|\lambda\| = c$, $\|a\| < \delta_1$ представим в виде

$$\|x(\omega, a, 0)\| \leq \left(1 - \frac{\beta^{k-1}b}{2}\right) \|a\| < \delta_1.$$

При этом существует такое малое $\delta_2 > 0$, что при $\alpha < \delta_2$ справедлива оценка $\|x(\omega, a, \alpha)\| \leq \delta_1$. Тогда по лемме 2 точка $x = 0_n$ устойчива по определению 1.

Таким образом, установлено следующее утверждение.

Теорема 1. *Если выполняется условие (4), то точка $x = 0_n$ для системы (2)–(3) ПДВ-устойчива по параметру.*

Заметим, что в силу асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2)–(3) при нулевом значении параметра теорема 1 относится к некритическому случаю ПДВ-устойчивости.

Далее исследуем критические случаи устойчивости.

Допустим, функция $p(a, \alpha)$ в равенстве (3) удовлетворяет условию

$$p(0_n, \alpha) \equiv 0_n. \quad (7)$$

Кроме того, возможно разложение $p(a, \alpha) = P(a, \alpha)a$, при котором существует такое число $b > 0$, что при всех λ : $\|\lambda\| = 1$ и при всех малых $\gamma > 0$ справедлива оценка

$$\|X + \gamma P(\lambda, 1)\| \leq 1 - \gamma b. \quad (8)$$

Теорема 2. Если выполняются условия (7) и (8), то точка $x = 0_n$ для системы (2)–(3) ПДВ-устойчива по параметру.

Доказательство. В равенстве (3) выберем $a = \alpha\lambda$, $\|\lambda\| = 1$. Выполним разложение

$$p(a, \alpha) = \alpha^{k-1} P(\lambda, 1)a.$$

Так как $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\psi(\alpha\lambda)\|/\alpha^k = 0$, то при некотором $\delta > 0$ и при любом $\alpha < \delta$ имеет место неравенство $\|\psi(\alpha\lambda)\| \leq b\alpha^k/2$. Тогда в силу условий (7) и (8) справедлива оценка

$$\|x(\omega, a, \alpha)\| \leq \|X + \alpha^{k-1} P(\lambda, 1)\| \alpha + \|\psi(a, \alpha)\| \leq (1 - b\alpha^{k-1})\alpha + \frac{b\alpha^k}{2} = \left(1 - \frac{b\alpha^{k-1}}{2}\right) \alpha < \alpha.$$

Итак, для любого $\delta_1 \leq \delta$ возьмем $\delta_2 = \delta_1$ и получим, что при $\|a\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$ справедлива оценка $\|x(\omega, a, \alpha)\| \leq \delta_1$, т.е. точка $x = 0_n$ ПДВ-устойчива по параметру по определению 1 в силу леммы 2. Теорема 2 доказана. $\square$

Допустим, что существует число $b > 0$, для которого при всех λ , удовлетворяющих условию $\|\lambda\| = 1$, и малых $\gamma > 0$ справедлива оценка

$$\|\lambda + \gamma p(\lambda, 1)\| \leq 1 - \gamma b. \quad (9)$$

Теорема 3. Если выполняется условие (9), то точка $x = 0_n$ для системы (1) ПДВ-устойчива по параметру.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема 4. Пусть выполняются следующие условия:

- (1) существует $a_0 \in \ker[X - E] \setminus \{0_n\}$, при котором $p(a_0, 1) = 0_n$, $\text{rang}[p'_a(a_0, 1)K \ p'_\mu(a_0, 1)] = n$, K — фундаментальная матрица решений системы $[X - E]a = 0_n$;
- (2) существуют числа $c > 0$ и $b > 0$, для которых при всех λ , удовлетворяющих условию $\|\lambda\| = 1$, и малых $\alpha > 0$ справедлива оценка $\|X + \alpha P(\lambda)\| \leq 1 - ab$, в которой $P(\lambda)$ — матрица, удовлетворяющая условию $P(\lambda)\lambda = p(a_0 + \lambda, 1)$.

Тогда точка $x = 0_n$ для системы (1) ПДВ-устойчива по параметру.

По теореме 4 в системе (2)–(3) имеет место ветвление малого устойчивого по параметру периодического решения с направлением ветвления $a'(0) = a_0$, которое устойчиво по определению 2 (см. [2]). Поэтому справедливость теоремы 4 следует из леммы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамов В. В. Двусторонняя устойчивость малого периодического решения // Вестн. РАЕН. — 2014. — 14, № 5. — С. 6–9.
2. Абрамов В. В. Ветвление периодического решения неавтономной системы с малым параметром // Вестн. РАЕН. — 2015. — 15, № 3. — С. 3–7.
3. Бельман С. А. Об условиях существования ненулевого периодического решения нелинейной системы дифференциальных уравнений с параметром // Изв. РАЕН. Диффер. уравн. — 2008. — № 13. — С. 5–16.
4. Бельман С. А. Периодические решения систем дифференциальных уравнений с параметром // Тр. Средневолж. мат. об-ва. — 2008. — 10, № 1. — С. 113–119.
5. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.
6. Лискина Е. Ю. О периодических решениях системы дифференциальных уравнений // Изв. РАЕН. Диффер. уравн. — 2000. — № 3. — С. 60–65.
7. Лискина Е. Ю. Достаточные условия существования семейства периодических решений системы дифференциальных уравнений // Изв. РАЕН. Диффер. уравн. — 2001. — № 5. — С. 75–85.
8. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966.

9. *Руи Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. — М.: Мир, 1980.
10. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971.
11. *Хапаев М. М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. — М.: Высшая школа, 1988.

Абрамов Владимир Викторович
Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
E-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru

Бельман Светлана Александровна
Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
E-mail: s.belman@365.rsu.edu.ru

Лискина Екатерина Юрьевна
Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
E-mail: e.liskina@365.rsu.edu.ru