Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Секацкая, Состояния равновесия второго рода уравнения Курамото—Сивашинского с однородными краевыми условиями Неймана, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 168, 80–90

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-168-80-90>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 14:27:50

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 80–90
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-80-90

УДК 517.956.4

СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ВТОРОГО РОДА УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО—СИВАШИНСКОГО С ОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА

© 2019 г. А. В. СЕКАЦКАЯ

Аннотация. В работе рассматривается задача для уравнения Курамото—Сивашинского с однородными краевыми условиями Неймана. Вопрос о существовании и устойчивости состояний равновесия второго рода изучен двумя способами: методом Галеркина и методами современной теории бесконечномерных динамических систем. Указаны некоторые различия в результатах их применения.

Ключевые слова: уравнение Курамото—Сивашинского, краевая задача, состояние равновесия, устойчивость, метод Галеркина, компьютерный анализ.

SECOND-KIND EQUILIBRIUM STATES OF THE KURAMOTO—SIVASHINSKY EQUATION WITH HOMOGENEOUS NEUMANN BOUNDARY CONDITIONS

© 2019 А. V. SEKATSKAYA

ABSTRACT. In this paper, we consider the boundary-value problem for the Kuramoto–Sivashinsky equation with homogeneous Neumann conditions. The problem on the existence and stability of second-kind equilibrium states was studied in two ways: by the Galerkin method and by methods of the modern theory of infinite-dimensional dynamical systems. Some differences in results obtained are indicated.

Keywords and phrases: Kuramoto–Sivashinsky equation, boundary-value problem, equilibrium, stability, Galerkin method, computer analysis.

AMS Subject Classification: 37L10, 37L25, 37L65

1. Введение. Во многих разделах математической физики при моделировании нелинейных эволюционных процессов (например, динамических процессов в химической кинетике, гидродинамике) используют уравнение Курамото—Сивашинского (см. [13, 18, 20]) или различные его обобщения и модификации (см. [1–4, 6–8, 11, 12, 14, 15]). В большинстве работ данное уравнение рассматривалось вместе с периодическими краевыми условиями.

В [10, 19] и некоторых других уравнение Курамото—Сивашинского изучалось вместе с однородными краевыми условиями Неймана (краевыми условиями «непроницаемости», характерными для задач химической кинетики, см. [18]). При этом, в частности, в цитируемых здесь работах основное внимание уделялось отысканию у изучаемых краевых задач решений, которые существенным образом зависят от одной или нескольких пространственных переменных, а также устойчивости этих решений. Так, например, в [19] было показано, что классический вариант

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00672) и Министерства образования и науки Российской Федерации (государственное задание, проект № 1.5722.2017/8.9).

уравнения Курамото—Сивашинского, рассмотренный вместе с однородными краевыми условиями Неймана, имеет глобальный аттрактор, но структура решений, заполняющих аттрактор, не была найдена. Частично этот пробел пытались устранить авторы работы [10], которые для исследования состояний равновесия использовали метод Галеркина. Краевая задача при этом заменялась на системы из 4 и 5 обыкновенных дифференциальных уравнений. Именно их анализу и было уделено основное внимание в [10].

Аналогичный подход использован в данной работе, но с некоторыми существенными дополнениями. Во-первых, в представленной работе использованы возможности современной вычислительной техники, что позволило дополнить анализ системы галеркинских приближений. Во-вторых, анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений дополнен более детальным изучением устойчивости состояний равновесия. Наконец, приведено частичное сравнение полученных результатов (и в том числе из [10]) с результатами анализа изучаемой краевой задачи на базе использования современной теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством (пространством начальных условий). Такой подход был разработан в [4–8, 16, 17]. Уместно отметить, что подход, основанный на применении метода Галеркина, не позволяет в ряде случаев находить некоторые из локальных аттракторов (состояний равновесия, периодических по t решений и т. д.), наличие которых вытекает из применения теории локальных бифуркаций для бесконечномерных динамических систем. Так, например, в [6, 17] были найдены локальные аттракторы для периодической краевой задачи для уравнения Курамото—Сивашинского, а также некоторых его модификаций, которые заполнены решениями, неустойчивыми в смысле А. М. Ляпунова.

Вместе с тем в определенной степени использование метода Галеркина иногда полезно. Такой подход позволяет, хотя бы приближенно, находить стационарные решения с достаточно большой нормой в смысле метрики фазового пространства решений изучаемых краевых задач.

2. Постановка задачи. Приведем уравнение Курамото—Сивашинского уже в перенормированном виде:

$$u_t = -u_{xxxx} - bu_{xx} - c(u_x)^2, \quad (1)$$

где $u = u(t, x)$ и $c \neq 0$. При этом без нарушения общности можно считать, что $c = 1$. Действительно, если положить $u = \gamma v$ и считать, что $\gamma c = 1$ (за счет выбора γ), то получим уравнение (1), в котором $c = 1$. Далее будем считать, что $c = 1$.

В данной работе уравнение (1) рассматривается вместе с однородными краевыми условиями Неймана. С учетом нормировок можно считать, что при всех $x \in [0, \pi]$, $t \geq 0$, выполнены равенства

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, \pi) = 0, \quad x \in [0, \pi]. \quad (2)$$

Очевидно, краевая задача (1), (2) имеет семейство пространственно однородных состояний равновесия

$$u(t, x) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

С другой стороны, краевая задача (1), (2) инвариантна относительно замены $u \rightarrow u + C$. Поэтому далее без нарушения общности будем изучать состояние равновесия $u = 0$ ($C = 0$). С точки зрения приложений особый интерес представляет наличие у нелинейной краевой задачи устойчивых решений $u(t, x)$, которые существенно зависят от пространственной переменной x , т.е. $u_x \neq 0$.

Положим

$$u(0, x) = f(x). \quad (3)$$

Смешанная задача (1), (2), (3) локально корректно разрешима, если $f(x) \in \overset{\circ}{W}_2^4[0, \pi]$ (см. [9]). Здесь через $\overset{\circ}{W}_2^4[0, \pi]$ обозначено замыкание линеала достаточно гладких функций $f(x)$, удовлетворяющих краевым условиям (2) по норме пространства Соболева $W_2^4[0, \pi]$. Напомним, что $g(x) \in W_2^4[0, \pi]$, если функция $g(x)$ имеет обобщенные производные $dg/dx, \dots, d^4g/dx^4$ до четвертого порядка включительно, которые принадлежат $L_2[0, \pi]$. Подчеркнем, что в силу теорем вложения $g(x) \in C^3[0, \pi]$, т.е. пространству дважды непрерывно дифференцируемых функций.

3. Линейная краевая задача. Для исследования устойчивости нулевого состояния равновесия рассмотрим вспомогательную краевую задачу, которая возникает после линеаризации краевой задачи (1)–(2) в окрестности тривиального состояния равновесия. В результате получим линейную краевую задачу

$$u_t = Au, \quad (4)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, \pi) = 0, \quad (5)$$

где линейный дифференциальный оператор

$$Av = -bv_{xx} - v_{xxxx}$$

определен на достаточно гладких функциях $v = v(x)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$v_x(0) = v_x(\pi) = v_{xxx}(0) = v_{xxx}(\pi) = 0.$$

Пусть λ — собственное значение (СЗ), а $v(x)$ — собственная функция (СФ) линейного дифференциального оператора A . Для исследования устойчивости нулевого решения краевой задачи (4), (5) найдем все ее решения вида

$$u(t, x) = \exp(\lambda t) \cdot v(x).$$

Для нахождения СЗ λ и соответствующей СФ получим краевую задачу

$$Av = \lambda v, \quad (6)$$

$$v_x(0) = v_x(\pi) = v_{xxx}(0) = v_{xxx}(\pi) = 0. \quad (7)$$

Подстановкой проверяется, что краевая задача (6) имеет нетривиальные решения, если

$$\lambda = \lambda(n) = bn^2 - n^4.$$

Каждому из них соответствует собственная функция

$$v(x, y) = e_n(x) = \cos nx,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Хорошо известно, что собственные функции $e_n(x)$ в пространстве $L_2[0, \pi]$ образуют полную ортогональную систему функций. Поэтому линейный дифференциальный оператор A не может иметь иных собственных значений, отличных от $\lambda(n)$.

Отметим, что $\lambda(0) = 0$. Понятно, что если $\lambda(n) < 0$ при всех $n \neq 0$, то любое состояние равновесия задачи (4), (5) устойчиво (но не может быть асимптотически устойчивым). Устойчивость следует понимать в смысле нормы фазового пространства (пространства начальных условий), например, пространства Соболева $W_2^4[0, \pi]$. Если же существует такое $n_0 \neq 0$, что $\lambda(n_0) > 0$, то состояние равновесия неустойчиво. Критические случаи выделяются следующими условиями: пусть для некоторого n_0 выполнено равенство

$$\lambda(n_0) = 0, \quad n_0 \neq 0,$$

а для остальных номеров n ($n \neq 0$) имеет место неравенство $\lambda(n) < 0$. Отметим также, что в нашем случае все собственные значения $\lambda(n)$ действительны. Условие устойчивости приобретает вид неравенства $b < 1$.

Следовательно, равенство $b = b_1 = 1$ выделяет критическое значение параметра b в задаче об устойчивости состояний равновесия $u = C$ для краевой задачи (4), (5). При таком значении b линейный дифференциальный оператор A имеет двукратное нулевое собственное значение, которому отвечает собственные функции $1, \cos x$. Подчеркнем также, что при $b = b_n = n^2$ линейный оператор A имеет также двукратное нулевое собственное значение, но ему уже отвечает собственная функция $\cos nx$ и, конечно, 1 .

Если $b = b_1 = 1$, остальные собственные значения линейного дифференциального оператора A лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости ($\lambda_m = -m^4 + m^2 < 0$, если $m \neq 1$). В случае $b = b_n$ ($n \neq 1$) линейный дифференциальный оператор A имеет уже $n - 1$ собственных значений, находящихся в правой полуплоскости комплексной плоскости ($\lambda_k = -k^4 + n^2 k^2 > 0$, если $k < n$).

4. Нелинейная краевая задача. В этом разделе рассмотрим краевую задачу (4), (5) в случае, когда

$$b = n^2 + \gamma\varepsilon, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0), \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

а $n = 1, 2, \dots$. При $n = 1$ ($b_1 = 1 + \gamma\varepsilon$) данная краевая задача имеет двумерное устойчивое центральное многообразие M_1 , решения на котором определяются после анализа двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — нормальной формы (НФ). Если же $b = b_n = n^2$ и $n \neq 1$, то краевая задача (4), (5) также имеет двумерное инвариантное многообразие M_n , и решения на нем восстанавливаются после анализа соответствующей двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — нормальной формы для данного выбора параметра b . Инвариантное многообразие M_n часто называют «центральным».

При $n = 2, 3, \dots$ соответствующие инвариантные многообразия M_n являются уже не устойчивыми, а седловыми (неустойчивыми), и поэтому все решения на таких инвариантных многообразиях заведомо неустойчивы.

Построим соответствующие инвариантным многообразиям M_n нормальные формы ($b = b_n + \gamma\varepsilon$). Решения на M_n будем искать в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2}z(s) \cos nx + \varepsilon u_2(x, z(s)) + \varepsilon^{3/2}u_3(x, z(s)) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (8)$$

где $s = \varepsilon t$ — «медленное время», $z(s)$ — решения НФ, которая будет выписана позднее. Наконец, $u_j(x, z)$ — функции, для которых выполнены следующие свойства:

- 1) они гладко зависят от x, z ;
- 2) при фиксированных z , как функции от x , принадлежат пространству Соболева $\overset{\circ}{W}_2^4[0, \pi]$ функций, для которых выполнены краевые условия (5);
- 3) справедливы равенства

$$M_n(u_j) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_j \cos nx dx = 0.$$

Итак, рассмотрим краевую задачу

$$u_t = A_n(\varepsilon)u - (u_x)^2, \quad (9)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, \pi) = 0, \quad (10)$$

где $u = u(t, x)$ и $A_n(\varepsilon)u = -u_{xxxx} - (n^2 + \gamma\varepsilon)u_{xx}$. Также отметим для дальнейших построений, что

$$\dot{\psi} = \varepsilon\psi', \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} = \dot{u}_j + u'_j\varepsilon,$$

где точкой обозначена частная производная по t , а штрихом — по вспомогательной переменной s .

Действительные функции $z = z(s)$, $\psi = \psi(s)$ будем искать как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi' = a_0 z^2, \quad (11)$$

$$z' = \alpha z - a z^3, \quad (12)$$

где a_0, a, α — действительные числа. Уравнения (11), (12) выписаны с точностью до слагаемых порядка $O(\varepsilon^{1/2})$. Система (11), (12) — «главная» часть нормальной формы Пуанкаре—Дюлака. В свою очередь, нормальная форма описывает динамику нелинейной краевой задачи (9), (10) на двумерном инвариантном многообразии («центральное многообразие»). Остальные решения нелинейной краевой задачи с течением времени приближаются к этому двумерному многообразию с экспоненциальной скоростью.

Подстановка суммы (8) в краевую задачу (9), (10) с последующим приравниванием выражений при одинаковых степенях ε приводит к линейным краевым задачам для определения u_j , $j = 1, 2, 3$. При их формировании и изучении будем интерпретировать s как параметр.

В итоге для u_2 , u_3 получим две следующие неоднородные краевые задачи:

$$\psi' + \dot{u}_2 = A_n(0)u_2 - (u_{1x})^2, \quad (13)$$

$$u_{2x}(t, 0) = u_{2x}(t, \pi) = u_{2xxx}(t, 0) = u_{2xxx}(t, \pi) = 0 \quad (14)$$

и

$$z' \cos x + \dot{u}_3 = A_n(0)u_3 - u_{1xx} + 2c_1 u_{1x} u_{2x}, \quad (15)$$

$$u_{3x}(t, 0) = u_{3x}(t, \pi) = u_{3xxx}(t, 0) = u_{3xxx}(t, \pi) = 0. \quad (16)$$

В формулах (13)–(16) точкой обозначена частная производная по t , а штрихом — по вспомогательной переменной s .

Неоднородная краевая задача

$$A_n(0)v(x) = F(x)$$

имеет решение, если справедливы следующие равенства (условия разрешимости):

$$\int_0^\pi F(x) dx = \int_0^\pi F(x) \cos nx dx = 0.$$

Равенства

$$\int_0^\pi v(x) dx = \int_0^\pi v(x) \cos nx dx = 0$$

выделяют одно такое решение.

Применяя условия разрешимости при рассмотрении неоднородной краевой задачи (13), (14), получаем, что

$$\psi' = -n^2 \frac{z^2}{2}.$$

Далее решение краевой задачи (13), (14) будем искать в виде

$$u_2 = \eta_2 z^2 \cos 2nx. \quad (17)$$

После подстановки (17) в (13), (14) находим

$$\eta_2 = \frac{1}{24n^2},$$

и соответственно решение u_2 равно

$$u_2(s, x) = \frac{z^2 \cos 2nx}{24n^2}.$$

Из условий разрешимости неоднородной краевой задачи (15), (16) вытекает, что

$$z'_n = \gamma n^2 z_n - \frac{1}{12} z_n^3.$$

Перейдем к рассмотрению нормальной формы (11), (12). При этом основную роль играет дифференциальное уравнение

$$z'_n = \gamma n^2 z_n - \frac{1}{12} z_n^3. \quad (18)$$

Стандартный анализ показывает, что если $\gamma = 1$, то дифференциальное уравнение (18) имеет ненулевые состояния равновесия $S_{\pm 1}$ вида

$$z_n(s) = \pm 2\sqrt{3}n. \quad (19)$$

При $\gamma = -1$ уравнение (19) имеет только нулевое состояние равновесия, которое асимптотически устойчиво. Состояния равновесия $S_{\pm 1}$ асимптотически устойчивы. Каждому такому решению (19) соответствует следующее решение нормальной формы (11), (12):

$$z(s) = \pm 2\sqrt{3}n, \quad \psi(s) = -6n^4 s + \psi_0, \quad \psi_0 \in \mathbb{R}.$$

Из результатов [4, 5, 7, 18] вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_n > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_n)$ каждому решению (19) соответствует решение краевой задачи (9), (10)*

$$u_{11,12}(t, x) = K_{11,12} + (-6n^4\varepsilon + o(\varepsilon))t \pm \varepsilon^{1/2}2\sqrt{3}n \cos nx + \frac{\varepsilon}{2} \cos 2nx + o(\varepsilon), \quad (20)$$

где K_{11}, K_{12} — произвольные постоянные. Каждое из этих семейств решений образует интегральное многообразие $M_1(\varepsilon)$ размерности 1 нелинейной краевой задачи (9), (10). Данное инвариантное многообразие устойчиво, если $n = 1$ ($b = b_1 + \gamma\varepsilon$, $b_1 = 1$), и неустойчиво при $n \neq 1$ ($b = b_n + \gamma\varepsilon$, $b_n = n^2$).

Уместно подчеркнуть, что решения $u_{11}(x, \varepsilon)$ и $u_{12}(x, \varepsilon)$ связаны соотношением

$$u_{12}(x, \varepsilon) = u_{11}(\pi - x, \varepsilon).$$

5. Анализ краевой задачи методом Галеркина. Далее изучим краевую задачу (1), (2) при помощи метода Галеркина при всех допустимых $t \in [0, T]$ (здесь $[0, T]$ — интервал существования решения). Справедливо представление решения в виде ряда

$$u(t, x) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cos nx,$$

так как на отрезке $[0, \pi]$ система функций $1, \cos x, \cos 2x, \dots$ образует полную ортогональную систему в пространстве $L_2[0, \pi]$. В нашем случае

$$u_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) dx, \quad u_k(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) \cos kx dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Приближенные решения целесообразно искать в виде

$$u(t, x) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^m u_n(t) \cos nx.$$

При использовании метода Галеркина принято фиксировать m . В [10] и в данной работе будет изучен вариант $m = 3$ и $m = 4$, что в целом означает изучение четырехчленной и пятичленной галеркинских аппроксимаций. В принципе, натуральное m может быть иным.

Уточним сразу один важный момент. В [10] и здесь главное внимание уделялось нахождению состояний равновесия второго рода, т.е. таких решений $u(t, x)$, что $u_x(t, x)$ уже не зависит от t .

5.1. Редукция с помощью метода Галеркина. Далее будет рассмотрен вопрос о существовании и устойчивости состояний равновесия второго рода. Приближенное решение $u(t, x)$ краевой задачи (1)–(2) будем искать в аналогичном виде:

$$u(t, x) \cong \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^m u_n(t) \cos nx, \quad (21)$$

где

$$u_0(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) dx, \quad u_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Сумма (21) стремится к точному решению краевой задачи (1), (2)

$$u(t, x) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cos nx$$

при $m \rightarrow \infty$.

Подставив сумму (21) при $m = 3$ в уравнение (1) получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{u}_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^3 \dot{u}_n(t) \cos nx \right) = & -\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^3 u_n(t) \cos nx \right) - \\ & - b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^3 u_n(t) \cos nx \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^3 u_n(t) \cos nx \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Применив далее стандартную процедуру получения приближений Галеркина, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения $u_j(t)$:

$$\dot{u}_0 = -(u_1^2 + 4u_2^2 + 9u_3^2), \quad (22)$$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = (b-1)u_1 - 6u_2u_3 - 2u_1u_2, \\ \dot{u}_2 = 4(b-4)u_2 + \frac{u_1^2}{2} - 3u_1u_3, \\ \dot{u}_3 = 9(b-9)u_3 + 2u_1u_2, \end{cases} \quad (23)$$

где точкой обозначена производная по t .

Представляют интерес ненулевые состояния равновесия системы (23). Таким решениям соответствуют приближенные пространственно неоднородные решения краевой задачи (1), (2) (состояния равновесия второго рода)

$$u(t, x) = -\left(v_1^2 + 4v_2^2 + 9v_3^2\right)t + v_1 \cos x + v_2 \cos 2x + v_3 \cos 3x,$$

где (v_1, v_2, v_3) — координаты одного из состояний равновесия системы (23).

В свою очередь, нахождение состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (23) приводит к решению системы трех алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (b-1)v_1 &= 2v_1v_2 + 6v_2v_3, \\ 4(b-4)v_2 &= -\frac{1}{2}v_1^2 + 3v_1v_3, \\ 9(b-9)v_3 &= -2v_1v_2, \end{aligned} \quad (24)$$

у которой, безусловно, имеется решение $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, но интерес представляют иные ее решения. Нулевое состояние равновесия системы (23) устойчиво при $b \in (-\infty, 1)$ и теряет устойчивость дивергентным образом (при $b = 1$ одно из собственных значений равно нулю). Исследование устойчивости проводилось с использованием теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Анализ системы (24) показывает, что при $b \in (-\infty, 1] \cup (9, \infty)$ она не имеет действительных решений, отличных от нуля. Действительно, пусть сначала $b \neq 1$, $b \neq 4$, $b \neq 9$. Эти особые значения для параметра b рассмотрим отдельно. Тогда из третьего уравнения системы (24) можно выразить v_3 и подставить выраженное v_3 в первое уравнение системы (24). После этого получим следующее равенство:

$$(b-1)v_1 = 2v_1v_2 + \left(-\frac{4}{3}\right)\frac{1}{b-9}v_2^2v_1.$$

Если $v_1 = 0$, то $v_2 = v_3 = 0$. При $v_1 \neq 0$ получим квадратное уравнение, которое имеет действительные решения, если $b \in [-23, 9)$. В свою очередь, из второго уравнения после исключения v_3 получаем равенство

$$v_1^2 = \frac{4b(4-b)(b-9)v_2}{3(b-9) + 4v_2},$$

из которого v_1 не определяется как действительное число, если $b < 1$. При $b = 1$ также нетрудно установить наличие только нулевого решения системы (24).

При $b = 4$ система дифференциальных уравнений (23) имеет инвариантное многообразие $u_1 = u_3 = 0$, $u_2 = \alpha$, где α — произвольная действительная постоянная. На инвариантном многообразии все решения являются состояниями равновесия. При $b = 4$ краевая задача (1), (2) имеет приближенные решения

$$u(t, x) = -4\alpha^2 t + \alpha \cos 2x. \quad (25)$$

Если $b = 9$, то система (24) имеет решение $v_1 = v_2 = 0$, $v_3 = \beta$, где β — произвольная действительная постоянная, т.е. краевая задача (1), (2) имеет приближенные решения

$$u(t, x) = -9\beta^2 t + \beta \cos 3x. \quad (26)$$

Вернемся к общему случаю, когда $b \in (0, 9)$, но $b \neq 4$. Из анализа системы (24) вытекает, что система (24) имеет четыре типа решений $V_1(v_1, v_2, v_3)$, $V_2(v_1, v_2, v_3)$, $V_3(v_1, v_2, v_3)$, $V_4(v_1, v_2, v_3)$, где через v_1, v_2, v_3 обозначены координаты ненулевых состояний равновесия и, следовательно,

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \neq 0.$$

При этом для v_1, v_2, v_3 справедливы следующие формулы: для $V_1(v_1, v_2, v_3)$:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{\sqrt{2} (3b - 27 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2}) \sqrt{(77 - 5b - 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}) (b - 4)}}{5b - 77 + 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}}, \\ v_2 = \frac{3b - 27 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2}}{4}, \\ v_3 = -\frac{\sqrt{2} (b - 25 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2}) \sqrt{(77 - 5b - 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}) (b - 4)}}{15b - 231 + 9\sqrt{621 - 42b - 3b^2}}; \end{cases} \quad (27)$$

для $V_2(v_1, v_2, v_3)$:

$$\begin{cases} v_1 = -\frac{\sqrt{2} (3b - 27 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2}) \sqrt{(77 - 5b - 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}) (b - 4)}}{5b - 77 + 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}}, \\ v_2 = \frac{3b - 27 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2}}{4}, \\ v_3 = \frac{\sqrt{2} (b - 25 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2}) \sqrt{(77 - 5b - 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}) (b - 4)}}{15b - 231 + 9\sqrt{621 - 42b - 3b^2}}; \end{cases} \quad (28)$$

для $V_3(v_1, v_2, v_3)$:

$$\begin{cases} v_1 = -\frac{\sqrt{2} (-3b + 27 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2}) \sqrt{(77 - 5b + 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}) (b - 4)}}{-5b + 77 + 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}}, \\ v_2 = \frac{3b - 27 - \sqrt{621 - 42b - 3b^2}}{4}, \\ v_3 = \frac{\sqrt{2} (-b + 25 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2}) \sqrt{(77 - 5b + 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}) (b - 4)}}{-15b + 231 + 9\sqrt{621 - 42b - 3b^2}}; \end{cases} \quad (29)$$

Рис. 1. Состояния равновесия системы (23). Здесь $V_1(v_1, v_2, v_3)$ — одно из состояний равновесия, крестом обозначены области, где решения отсутствуют.

для $V_4(v_1, v_2, v_3)$:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{\sqrt{2} \left(-3b + 27 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2} \right) \sqrt{\left(77 - 5b + 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2} \right) (b - 4)}}{-5b + 77 + 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2}}, \\ v_2 = \frac{3b - 27 - \sqrt{621 - 42b - 3b^2}}{4}, \\ v_3 = -\frac{\sqrt{2} \left(-b + 25 + \sqrt{621 - 42b - 3b^2} \right) \sqrt{\left(77 - 5b + 3\sqrt{621 - 42b - 3b^2} \right) (b - 4)}}{-15b + 231 + 9\sqrt{621 - 42b - 3b^2}}. \end{cases} \quad (30)$$

Данные формулы получены при $b \neq 1$, $b \neq 4$, $b \neq 9$. Проанализировав их подробнее, мы приходим к выводу, что $b \neq 85/13$. При $b = 85/13$ обращаются в нуль знаменатели формул для координат v_1 , v_3 решений $V_1(v_1, v_2, v_3)$, $V_2(v_1, v_2, v_3)$.

Решения $V_1(v_1, v_2, v_3)$, $V_2(v_1, v_2, v_3)$ существуют при $b \in (1, 4) \cup (85/13, 9)$; они устойчивы при $b \in (1, 4)$ и неустойчивы при $b \in (85/13, 9)$. Решения $V_3(v_1, v_2, v_3)$, $V_4(v_1, v_2, v_3)$ при $b \in (1, 4)$ не существуют.

Решения $V_3(v_1, v_2, v_3)$, $V_4(v_1, v_2, v_3)$ существуют при $b \in (4, 9)$ и неустойчивы при всех этих значениях b .

Все решения наглядно представлены на рис. 1.

6. Некоторые замечания. Сравним некоторые из результатов анализа краевой задачи (1), (2), полученных при помощи метода Галеркина, с результатами бифуркационного анализа, основанного на использовании строго обоснованных методов качественной теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством.

Непосредственный анализ краевой задачи (1), (2) показал, что при $b = 9 + \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, краевая задача имеет нетривиальные состояния равновесия второго рода.

Отметим также, что если рассмотреть краевую задачу (1), (2) при $b = 9$ в случае, когда

$$u(0, x) = f_3(x) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{3p} \cos 3px,$$

где $f_3(x)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^4[0, \pi]$ функций, у которых $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x) \in L_2(0, \pi)$, то, оказывается, что для всех решений с такими начальными условиями

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 0,$$

или в иной форме записи

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_{3p}(t) = 0, \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

где

$$u(t, x) = \sum_{p=1}^{\infty} u_{3p}(t) \cos 3px$$

(см. раздел 4 данной работы).

С другой стороны, анализ системы дифференциальных уравнений (23) при $b = 9$ показывает, что она имеет состояние равновесия $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = \alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ — произвольная действительная постоянная и, следовательно, решение $u_3 = \alpha$, $u_1 = u_2 = 0$ не стремится к 0 при $t \rightarrow +\infty$. Данные два замечания показывают ограниченные возможности метода Галеркина при анализе краевой задачи (1), (2).

7. Заключение. В работе изучено уравнение Курамото—Сивашинского с однородными краевыми условиями Неймана. При помощи метода Галеркина и методов качественной теории дифференциальных уравнений изучен вопрос о существовании состояний равновесия второго рода. При помощи численных методов с привлечением современных компьютерных технологий были найдены состояния равновесия, дан анализ устойчивости найденных состояний равновесия по А. М. Ляпунову.

Показано, что у краевой задачи (1), (2) возникают (точнее, могут появиться) пространственно неоднородные решения, в том числе устойчивые. Они бифурцируют из нулевого состояния равновесия при смене им устойчивости. Для бифурцирующих решений приведены асимптотические формулы. С точки зрения приложения к физике (нано и микроэлектронике) наибольший интерес для приложений представляют именно пространственно неоднородные решения, описывающие неоднородный рельеф на поверхности полупроводниковых материалов под воздействием ионной бомбардировки. Изучен вопрос об устойчивости однородных состояний равновесия. В частности, выведены условия на коэффициенты, при которых происходит потеря устойчивости. В случаях, близких к критическим, для значений параметров рассмотрены задачи о локальных бифуркациях. Показано, что вопрос о формировании неоднородного нанорельефа с математической точки зрения сводится к изучению вспомогательных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые принято называть *нормальными формами Пуанкаре—Дюлака*. Подтверждено, что формирование нанорельефа можно рассматривать как явление самоорганизации.

Из полученных результатов вытекает, что применение метода Галеркина для анализа динамики решений краевой задачи (1), (2) при изучении уже простейших вопросов приводит к результатам, противоречащим анализу краевой задачи (1), (2) при помощи методов современной теории динамических систем. Тем более этого следует ожидать при анализе локальных бифуркаций.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю А. Н. Куликову за постановку задачи и помощь при написании статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Емельянов В. М. Дефектно-деформационная неустойчивость как универсальный механизм образования решеток и ансамблей наноточек при действии ионных и лазерных пучков на твердые тела // Изв. РАН. Сер. физ. — 2010. — 2, № 74. — С. 124–130.
2. Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Стриханов М. Н. Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Яд. физ. инж. — 2010. — 2, № 1. — С. 151–158.
3. Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Федянин Т. Е. Особенности самоорганизации наноструктур на поверхности полупроводников при ионной бомбардировке // Мат. модел. — 2012. — 12, № 24. — С. 23–28.
4. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — С. 930–945.
5. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Бифуркации пространственно неоднородных решений в двух краевых задачах для обобщенного уравнения Курамото—Сивашинского // Вестн. МИФИ. — 2014. — 3, № 4. — С. 408–415.
6. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Уравнение Курамото—Сивашинского. Локальный аттрактор, заполненный неустойчивыми периодическими решениями // Модел. анал. информ. сист. — 2018. — 1. — С. 92–101.

7. Куликов А. Н., Куликов Д. А., Рудый А. С. Бифуркации наноструктур под воздействием ионной бомбардировки// Вестн. Удмурт. ун-та. — 2011. — 4. — С. 86–99.
8. Секацкая А. В. Бифуркации пространственно неоднородных решений в одной краевой задаче для обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского// Модел. анализ. информ. сист. — 2017. — 5, № 24. — С. 615–628.
9. Соболевский П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1961. — № 10. — С. 297–350.
10. Armbruster D., Guckenheimer J., Holmes Ph. Kuramoto–Sivashinsky dynamics on the center-unstable manifold// Siam J. Appl. Math. — 1989. — 3, № 49. — P. 676–691.
11. Barker B., Johnson M. A., Noble P., Zumbrun K. Stability of periodic Kuramoto–Sivashinsky waves// Appl. Math. Lett. — 2012. — 5, № 25. — P. 824–829.
12. Barker B., Johnson M. A., Noble P., Rodrigues L. M., Zumbrun K. Nonlinear modulational stability of periodic traveling-wave solutions of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation// Phys. D. — 2013. — 25. — P. 11–46.
13. Bradley R., Harper J. Theory of ripple topography induced by ion bombardment// J. Vac. Sci. Technol. — 1988. — 4, № 6. — P. 2390–2395.
14. Emel'yanov B. I. The Kuramoto–Sivashinsky equation for the defect-deformation. Instability of a surface-stressed nanolayer// Laser Phys. — 2009. — 3, № 19. — P. 538–543.
15. Gelfand M. P., Bradley R. M. One-dimensional conservative surface dynamics with broken parity: Arrested collapse versus coarsening// Phys. Lett. A. — 2015. — 4, № 1. — P. 199–205.
16. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Bifurcations in a boundary-value problem of nanoelectronics// J. Math. Sci. — 2015. — 6. — P. 211–221.
17. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Bifurcation in Kuramoto–Sivashinsky equation// Pliska Stud. Math. — 2015. — 4, № 3. — P. 101–110.
18. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. — Berlin: Springer-Verlag, 1984.
19. Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R. Some global dynamical properties of the Kuramoto–Sivashinsky equations: Nonlinear stability and attractors// Phys. D. — 1985. — 12, № 24. — P. 155–183.
20. Sivashinsky G. I. Weak turbulence in periodic flow// Phys. D. — 1985. — 2, № 17. — P. 243–255.

Секацкая Алина Вадимовна

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: alinastart@mail.ru