Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. М. Симонов, Устойчивость и асимптотически периодические решения гибридных систем с последействием, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 168, 91–98

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-168-91-98>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:17:07

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 91–98
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-91-98

УДК 517.977

УСТОЙЧИВОСТЬ И АСИМПТОТИЧЕСКИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© 2019 г. П. М. СИМОНОВ

Аннотация. В статье продолжается изучение гибридной линейной системы функционально-дифференциальных уравнений с последействием при помощи W -метода Н. В. Азбелева. Рассмотрены два модельных уравнения, изучены банаховы пространства правых частей и решений, являющиеся пространствами асимптотически периодических функций. Получены аналоги теоремы Боля—Перрона об асимптотической устойчивости и о существовании пределов решений.

Ключевые слова: теорема Боля—Перрона, асимптотически периодические функции, гибридная система, функционально-дифференциальное уравнение, уравнение с последействием, устойчивость, метод модельных уравнений.

STABILITY AND ASYMPTOTICALLY PERIODIC SOLUTIONS OF HYBRID SYSTEMS WITH AFTEREFFECT

© 2019 P. M. SIMONOV

ABSTRACT. In this paper, we study hybrid linear systems of functional differential equations with aftereffect using the Azbelev W -method. Two model equations are considered and Banach spaces of right-hand sides and solutions, which are spaces of asymptotically periodic functions, are examined. Analogs of the Bohl–Perron theorem on the asymptotic stability and on the existence of limits of solutions are obtained.

Keywords and phrases: Bohl–Perron theorem, asymptotically periodic functions, hybrid system, functional differential equation, equation with aftereffect, stability, method of model equations.

AMS Subject Classification: 34K20, 34K25

1. Введение. В настоящей статье мы продолжаем изучение гибридных линейных систем функционально-дифференциальных уравнений с последействием (ГЛСФДУП). Гибридность понимается в следующем смысле: система является системой линейных функционально-дифференциальных уравнений с последействием (ЛФДУП) по одной части переменных и системой линейных разностных уравнений с последействием (ЛРУП) по другой части переменных. Применяя W -метод Н. В. Азбелева, мы изучаем два модельных уравнения и банаховы пространства их правых частей и решений (пространства асимптотически периодических функций). Получены аналоги теоремы Боля—Перрона об асимптотической устойчивости и о существовании пределов решений, доказанной ранее в работах Н. В. Азбелева, Л. М. Березанского, П. М. Симонова и А. В. Чистякова (см. [1–4]).

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ векторов $\alpha = \text{col} \{ \alpha^1, \dots, \alpha^n \}$ с действительными компонентами и с нормой $\|\alpha\|_{\mathbb{R}^n}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00332-а).

Обозначим через L пространство локально суммируемых функций $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ с полунормами

$$\|f\|_{L[0,T]} = \int_0^T \|f(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt, \quad T > 0,$$

и через D — пространство локально абсолютно непрерывных функций $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ с полунормами

$$\|x\|_{D[0,T]} = \|\dot{x}\|_{L[0,T]} + \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}, \quad T > 0.$$

Обозначим через $y = \{y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots\}$ бесконечную матрицу со столбцами $y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots$ высоты n , а через $g = \{g(0), g(1), \dots, g(N), \dots\}$ бесконечную матрицу со столбцами $g(0), g(1), \dots, g(N), \dots$ высоты n . Каждой бесконечной матрице $y = \{y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots\}$ можно поставить в соответствие вектор-функцию

$$y(t) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t) + y(0)\chi_{[0,1)}(t) + y(1)\chi_{[1,2)}(t) + \dots + y(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \dots$$

Аналогично, каждой бесконечной матрице $g = \{g(0), g(1), \dots, g(N), \dots\}$ можно поставить в соответствие вектор-функцию

$$g(t) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + \dots + g(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \dots$$

Обозначим через $y(t) = y[t]$ вектор-функцию $y(t) = y([t])$, $t \in [-1, \infty)$, через $g[t]$ — вектор-функцию $g(t) = g([t])$, $t \in [0, \infty)$, через ℓ_0 — множество вектор-функций $y[\cdot]$ с полунормами

$$\|y\|_{\ell_{0T}} = \sum_{i=-1}^T \|y_i\|_{\mathbb{R}^n}, \quad T \geq -1,$$

через ℓ — множество вектор-функций $g[\cdot]$ с полунормами

$$\|g\|_{\ell_T} = \sum_{i=0}^T \|g_i\|_{\mathbb{R}^n}, \quad T \geq 0.$$

Введем также обозначения

$$\begin{aligned} (\Delta y)(t) &= y(t) - y(t-1) = y[t] - y[t-1] \quad \text{при } t \geq 1, \\ (\Delta y)(t) &= y(t) = y[t] = y(0) \quad \text{при } t \in [0, 1). \end{aligned}$$

Запишем абстрактную гибридную функционально-дифференциальную систему в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y &= \dot{x} - F_{11}x - F_{12}y = f, \\ \mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y &= \Delta y - F_{21}x - F_{22}y = g. \end{aligned} \quad (1)$$

Операторы $\mathcal{L}_{11}, F_{11} : D \rightarrow L$, $\mathcal{L}_{12}, F_{12} : \ell_0 \rightarrow L$, $\mathcal{L}_{21}, F_{21} : D \rightarrow \ell$, $\mathcal{L}_{22}, F_{22} : \ell_0 \rightarrow \ell$ предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми.

Если элементы $\text{col}\{x, y\} : [0, \infty) \times [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, образующие банахово пространство

$$D \times M_0 \cong (B \times \mathbb{R}^n) \times (M \times \mathbb{R}^n),$$

где $D \subset D$, $M_0 \subset \ell_0$, $B \subset L$, $M \subset \ell$ (B, M — банаховы пространства), обладают какими-либо специфическими свойствами, например

$$\sup_{t \geq 0} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \sup_{k=-1,0,1,\dots} \|y(k)\|_{\mathbb{R}^n} < \infty,$$

и для уравнения $\mathcal{L}\{x, y\} = \text{col}\{f, g\}$, где $\mathcal{L} : D \times M_0 \rightarrow B \times M$ — линейный ограниченный оператор, однозначно разрешима задача Коши, то и решения этой задачи будут обладать такими же асимптотическими свойствами.

Пусть модельное уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ (см. [1–4]) и банахово пространство $B \subset L$ (вложение непрерывно) выбраны так, что решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами. Пусть при любом $z \in B$ решение записывается в виде формулы Коши

$$x(t) = U_{11}(t)x(0) + (W_{11}z)(t).$$

Для банахова пространства $\mathbf{B} \subset L$ можно ввести банахово пространство $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ с нормой

$$\|x\|_{D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})} = \|\mathcal{L}_{11}x\|_{\mathbf{B}} + \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Здесь вложение $\mathbf{B} \subset L$ непрерывно. Предположим, что оператор W_{11} непрерывно действует из пространства $\mathbf{B}$ в пространство $\mathbf{B}$, а оператор U_{11} действует из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbf{B}$. Это условие эквивалентно тому (см. [3], [4, гл. IV]), что пространство $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ линейно изоморфно пространству Соболева $W_{\mathbf{B}}^{(1)}[0, \infty)$ с нормой

$$\|x\|_{W_{\mathbf{B}}^{(1)}[0, \infty)} = \|\dot{x}\|_{\mathbf{B}} + \|x\|_{\mathbf{B}};$$

в дальнейшем будем обозначать это пространство $\mathbf{W}_{\mathbf{B}}$; при этом $\mathbf{W}_{\mathbf{B}} \subset D$ (вложение непрерывно).

Будем говорить, что уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \rightarrow \mathbf{B}$ является $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ -устойчивым, если для каждой правой части $z \in \mathbf{B}$ решение x принадлежит $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ (см. [1]); здесь $D(\mathcal{L}_{11}) \subset D$ — область определения оператора $\mathcal{L}_{11}$. Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ называется *сильно $\mathbf{B}$ -устойчивым*, если для любого $z \in \mathbf{B}$ каждое решение x этого уравнения обладает следующим свойством: $x \in \mathbf{B}$ и $\dot{x} \in \mathbf{B}$ (см. [3], [4, гл. IV, § 4.6]). Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{B}$, удовлетворяющим приведенному выше условию, является $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ -устойчивым тогда и только тогда, если оно сильно $\mathbf{B}$ -устойчиво.

Операторы $\mathcal{L}_{11} : D \rightarrow L$, $\mathcal{L}_{12} : \ell_0 \rightarrow L$, $\mathcal{L}_{21} : D \rightarrow \ell$, $\mathcal{L}_{22} : \ell_0 \rightarrow \ell$ рассматриваются как приведения на пары $(D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}), \mathbf{B})$, $(M_0, \mathbf{B})$, $(D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}), M)$, (M_0, M) ; здесь $\mathbf{W}_{\mathbf{B}} = D = D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})$. Эти операторы предполагаются линейными, вольтерровыми и ограниченными.

Введем следующие пространства:

$$\begin{aligned} \ell_{\infty 0} &= \left\{ y \in \ell_0 : \|y\|_{\ell_{\infty 0}} = \sup_{k=-1, 0, 1, \dots} \|y(k)\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \right\}, \\ \ell_{\infty} &= \left\{ g \in \ell : \|g\|_{\ell_{\infty}} = \sup_{k=0, 1, \dots} \|g(k)\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \right\}. \end{aligned}$$

Банаховы пространства $\ell_{\infty 0}$ и ℓ_{∞} являются примерами пространств типа M_0 и M .

Введем обозначение

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (1) записывается в виде

$$\mathcal{L}\{x, y\} = \text{col}\{f, g\}.$$

Предположим, что для любых $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и $y(-1) \in \mathbb{R}^n$ задача Коши для «модельной» системы

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11}^0 x + \mathcal{L}_{12}^0 y &= \dot{x} - F_{11}^0 x - F_{12}^0 y = z \\ \mathcal{L}_{21}^0 x + \mathcal{L}_{22}^0 y &= \Delta y - F_{21}^0 x - F_{22}^0 y = u \end{aligned}$$

однозначно разрешима; здесь операторы $F_{11}^0 : D \rightarrow L$, $F_{12}^0 : \ell_0 \rightarrow L$, $F_{21}^0 : D \rightarrow \ell$, $F_{22}^0 : \ell_0 \rightarrow \ell$ предполагаются непрерывными и вольтерровыми. Тогда модельную систему можно коротко записать в виде

$$\mathcal{L}_0\{x, y\} = \text{col}\{z, u\}.$$

Пусть ее решение имеет представление

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix};$$

через $\mathcal{U} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow D \times \ell_0$ и $\mathcal{W} : L \times \ell \rightarrow D \times \ell_0$ обозначим соответственно фундаментальную матрицу и непрерывный вольтерров оператор Коши системы:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{22}y = g$ для $g \in \mathbf{M}$ принадлежит пространству $\mathbf{M}_0$ и представляется формулой Коши:

$$y[t] = (\mathcal{Y}_{11}y(-1))[t] + (\mathcal{C}_{22}g)[t] = Y_{22}[t]y(-1) + \sum_{s=0}^t C_{22}[t, s]g[s], \quad t \geq 0.$$

2. Теоремы Боля—Перрона. Для обыкновенного дифференциального уравнения еще в монографиях [5, 6, 10, 11] отмечались явления, которые в терминах $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ -устойчивости можно сформулировать следующим образом. При определенных условиях относительно оператора $\mathcal{L}_{11}$ из $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ -устойчивости следует более тонкое асимптотическое свойство, а именно $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B}_1)$ -устойчивость, где $\mathbf{B}_1$ — некоторое подпространство пространства $\mathbf{B}$.

Следуя традиции Пермского семинара (см. [1–4]), соответствующие утверждения будем называть *теоремами Боля—Перрона*. В основе доказательств таких теорем, приведенных ниже, лежат свойства подпространства $\mathbf{B} \subset L$, вытекающие из их *порядковой структуры*, которую определим следующим образом. В векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ введем *частичную упорядоченность*: $\alpha = \text{col} \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \geq 0$, если $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$; соответственно, $\alpha \geq \beta$, если $\alpha - \beta \geq 0$. Через $|\alpha|$ будем обозначать вектор, определяемый равенством $|\alpha| = \text{col} \{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|\}$. Будем предполагать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ зафиксирована норма $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$, обладающая свойством *монотонности*:

$$\|\alpha\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|\beta\|_{\mathbb{R}^n}, \quad \text{если } |\alpha| \leq |\beta|.$$

В соответствии с порядком в пространстве $\mathbb{R}^n$ введем *отношение порядка* в пространстве L : будем считать, что $y \geq 0$, если $y(t) \geq 0$ почти всюду на $[0, \infty)$; $y \geq z$, если $y - z \geq 0$. Через $|y|$ будем обозначать функцию, почти всюду на $[0, \infty)$ определяемую равенством $|y|(t) = |y(t)|$. Относительно банахова пространства $\mathbf{B} \subset L$ будем предполагать, что норма в пространстве $\mathbf{B}$ согласована с порядком через условие *идеальности*: если $z \in L$, $y \in \mathbf{B}$ и $|z| \leq |y|$, то $z \in \mathbf{B}$ и $\|z\|_{\mathbf{B}} \leq \|y\|_{\mathbf{B}}$.

Среди прочих свойств пространств, удовлетворяющих этому условию (*банаховых идеальных пространств*; см. [9][гл. IV, § 3, п. 3.1; гл. X, § 4, п. 4.1]), отметим следующие:

- (1) норма в таком пространстве $\mathbf{B}$ обладает свойством монотонности;
- (2) любое ограниченное по порядку подмножество пространства $\mathbf{B}$ имеет точные грани ($\mathbf{B}$ — *K-пространство*);
- (3) в пространстве $\mathbf{B}$ определены «срезки» — операторы умножения на характеристические функции χ_M измеримого множества $M \subset [0, \infty)$;
- (4) вложение $\mathbf{B} \subset L$ непрерывно.

3. Асимптотическая устойчивость. Введем подмножество $\mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B}$ всех функций $z \in \mathbf{B}$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|\chi_{[s, \infty)} z\|_{\mathbf{B}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \|z^s\|_{\mathbf{B}} = 0.$$

Здесь и ниже χ_M — характеристическая функция множества M . Иначе говоря, пространство $\mathbf{B}_0$ состоит из всех функций $z \in \mathbf{B}$, стремящихся при $t \rightarrow \infty$ к нулю по метрике пространства $\mathbf{B}$. Нетрудно показать, что $\mathbf{B}_0$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{B}$ и совпадает с замыканием по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{B}}$ линейного многообразия всех финитных функций $z \in \mathbf{B}$. Далее, пусть C_0 — подпространство пространства C , состоящее из всех $x \in C$, для которых $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, $\|x\|_{C_0} = \|x\|_C$. Здесь и ниже C — пространство непрерывных и ограниченных функций $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}$.

Введем обозначение $Q_{11} = \mathcal{L}_{11}W_{11}$. Введем банаховы пространства всех функций $g \in \ell_{\infty}^0 \subset \ell_{\infty}$ (соответственно, $g \in \ell_{\infty 0}^0 \subset \ell_{\infty 0}$), удовлетворяющих условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_{[n, n+1, \dots, \infty)} g\|_{\ell_{\infty}} = 0 \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_{[n, n+1, \dots, \infty)} g\|_{\ell_{\infty 0}} = 0 \right).$$

Рассмотрим банахово пространство $\mathbf{b} \subset \ell$ бесконечных матриц $g = \{g(0), g(1), \dots, g(N), \dots\}$ с нормой $\|g\|_{\mathbf{b}}$ и банахово пространство $\mathbf{b}_0 \subset \ell_0$ бесконечных матриц $y = \{y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots\}$

с нормой $\|y\|_{b_0}$, причем вложения $\mathbf{b} \subset \ell$ и $\mathbf{b}_0 \subset \ell_0$ непрерывны. Предположим, что в банаховом пространстве $\mathbf{b}$ (соответственно, $\mathbf{b}_0$) выполнены все условия, сформулированные в п. 2.

Введем подмножество $\mathbf{b}^0 \subset \mathbf{b}$ всех функций $g \in \mathbf{b}$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_{[n, n+1, \dots, \infty)} g\|_{\mathbf{b}} = 0.$$

Иначе говоря, пространство $\mathbf{b}^0$ состоит из всех функций $g \in \mathbf{b}$, стремящихся при $t \rightarrow \infty$ к нулю по метрике пространства $\mathbf{b}$; нетрудно показать, что $\mathbf{b}^0$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{b}$ и совпадает с замыканием по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{b}}$ линейного многообразия всех финитных функций $g \in \mathbf{b}$. Аналогично определим пространство $\mathbf{b}_0^0$. Введем обозначение $Q_{22} = \mathcal{L}_{22}W_{22}$.

4. Теоремы о существовании пределов решений на бесконечности для ЛФДУП и ЛРУП. Ниже дополнительно предполагаем, что пространство $\mathbf{B}$ содержит все функции-константы, а подпространство $\mathbf{B}_0$ не содержит отличных от нуля констант.

Будем говорить, что вектор $z(\infty) = \mathbf{B}\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$ есть $\mathbf{B}$ -предел функции $z \in \mathbf{B}$, если разность $z - z(\infty)$ принадлежит пространству $\mathbf{B}_0$, т.е. если

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|[z - z(\infty)]^s\|_{\mathbf{B}} = 0.$$

Корректность этого определения следует из того, что если $\xi_1 = \mathbf{B}\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$ и $\xi_2 = \mathbf{B}\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$, то $\xi_1 - \xi_2 \in \mathbf{B}_0$. Отсюда $\xi_1 = \xi_2$ ввиду свойств пространства $\mathbf{B}_0$.

Для $(n \times n)$ -матрицы $A(t) = \{A_1(t), \dots, A_n(t)\}$ будем писать

$$A(\infty) = \mathbf{B}\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \left\{ \mathbf{B}\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} A_1(t), \dots, \mathbf{B}\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} A_n(t) \right\}.$$

Если $\mathbf{B} = L_\infty$, то

$$z(\infty) = \text{vrai lim}_{t \rightarrow \infty} z(t), \quad A(\infty) = \text{vrai lim}_{t \rightarrow \infty} A(t).$$

Обозначим через $\mathbf{B}_l$ пространство функций $z \in \mathbf{B}$, для каждой из которых существует $\mathbf{B}$ -предел с нормой $\|z\|_{\mathbf{B}_l} = \|z\|_{\mathbf{B}}$. Аналогично определим пространство C_l функций $x \in C$, для которых существует $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x(\infty) \in \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{C_l} = \|x\|_C$.

Относительно модельного уравнения $\mathcal{L}_{11}^0 x = z$ и пространства $\mathbf{B}$ будем предполагать следующее:

- (а) оператор Коши W_{11} действует из пространства $\mathbf{B}_l$ в пространство C_l и ограничен;
- (б) столбцы фундаментальной матрицы U_{11} принадлежат пространству C_l .

Эти условия означают, что имеет место непрерывное вложение $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_l) \subset C_l$. Следовательно, предполагается, что фундаментальная матрица U_{11} имеет конечный предел $U_{11}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} U_{11}(t)$.

Имеет место непрерывное вложение $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}) \subset C$.

Отметим, что для интегральных уравнений утверждения о наличии пределов решений были получены ранее в [12, 13, 22–24]; некоторыми идеями этих работ мы воспользовались.

Здесь предполагаем, что пространство $\mathbf{b}$ содержит все функции-константы, а подпространство $\mathbf{b}^0$ не содержит отличных от нуля констант. Через $\mathbf{b}^l$ обозначим пространство функций $g \in \mathbf{b}$, для которых существует $\mathbf{b}$ -предел $g(\infty)$ с нормой $\|g\|_{\mathbf{b}^l} = \|g\|_{\mathbf{b}}$. Иначе говоря, пространство $\mathbf{b}^l$ состоит из всех функций $g \in \mathbf{b}$, стремящихся при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathbb{N}$, к пределу $g(\infty)$ по метрике пространства $\mathbf{b}$. Нетрудно показать, что $\mathbf{b}^l$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{b}$ и совпадает с замыканием по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{b}}$ линейного многообразия всех финитных функций $g \in \mathbf{b}$ и функций-констант. Аналогично определяем пространство $\mathbf{b}_0^l$.

Всюду будем предполагать, что для пространства $\mathbf{b}$ и модельного уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 y = u$ выполнены следующие условия:

- (а) оператор Коши W_{22} действует из пространства $\mathbf{b}^l$ в пространство $\ell_{\infty 0}^l$ и ограничен;
- (б) столбцы фундаментальной матрицы U_{22} уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 y = 0$ принадлежат пространству $\ell_{\infty 0}^l$.

Таким образом, имеет место непрерывное вложение $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^l) \subset \ell_{\infty 0}^l$ и существование пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = y(\infty)$$

всех решений уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 y = g$ в случае $g \in \mathbf{b}^l$.

Имеет место непрерывное вложение $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}) \subset \ell_{\infty 0}$.

5. Асимптотически периодические решения. Пусть ω — фиксированное положительное число. Определим оператор сдвига S^ω равенством $(S^\omega z)(t) = z(t + \omega)$. Будем предполагать, что пространство $\mathbf{B}$ содержит все функции-константы, $S^\omega \mathbf{B} \subset \mathbf{B}$ и $\|S^\omega\|_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}} = 1$. Таким образом, пространство $\mathbf{B}_0$ не содержит отличных от нуля функций-констант. Обозначим через $\mathbf{B}_\omega$ подпространство всех асимптотически ω -периодических функций: $z \in \mathbf{B}_\omega$, если $(S^\omega z - z) \in \mathbf{B}_0$. Аналогично определяем пространство $\mathbf{C}_\omega$, элементами которого являются такие $x \in \mathbf{C}$, что $(S^\omega x - x) \in \mathbf{C}_0$. Ниже будем предполагать, что пространство $\mathbf{B}$ вольтеррово допустимо для модельного уравнения $\mathcal{L}_{11}^0 x = z$ и пространство $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_\omega)$ вложено в пространство $\mathbf{C}_\omega$. Таким образом, $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_\omega)$ -устойчивость уравнения $\mathcal{L}_{11} x = f$ означает, что если $f \in \mathbf{B}_\omega$, то любое решение x этого уравнения является асимптотической ω -периодической функцией.

Введем обозначение $[S^\omega, Q_{11}] = S^\omega Q_{11} - Q_{11} S^\omega$, где $Q_{11} = \mathcal{L}_{11} W_{11}$. Пусть модельное уравнение $\mathcal{L}_{11}^0 x = z$ удовлетворяет условиям (а) и (б) из п. 4.

Теорема 1. Пусть уравнение $\mathcal{L}_{11} x = f$ является $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})$ -устойчивым, а оператор

$$\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \rightarrow L$$

действует из пространства $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_l)$ в пространство $\mathbf{B}_l$ и ограничен, а также

$$[S^\omega, \mathcal{L}_{11} W_{11}] \mathbf{B} \subset \mathbf{B}_l.$$

Тогда это уравнение $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_\omega)$ -устойчиво.

Эти утверждения дополняют результаты работ [7, 8].

Лемма 1. Пусть линейный ограниченный оператор $Q_{11} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ вольтерров, $Q_{11} \mathbf{B} \subset \mathbf{B}$. Далее, пусть оператор $[S^\omega, Q_{11}]$ переводит пространство $\mathbf{B}$ в пространство $\mathbf{B}_l$. Тогда оператор Q_{11} действует в пространстве $\mathbf{B}_\omega$. Если, кроме того, оператор $Q_{11} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ имеет обратный оператор $Q_{11}^{-1} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$, то оператор Q_{11}^{-1} действует в пространстве $\mathbf{B}_\omega$.

Теорема 1 и лемма 1 опубликованы в статье [3] и в книге [4][гл. IV, § 4.4, теорема 4.4.1 и лемма 4.4.2]. Отметим, что для интегральных уравнений Вольтерра утверждения, аналогичные лемме 1, приведены в обзоре [22][гл. 2, § 2].

Пусть $\omega \in \mathbb{N}$ — фиксированное число. Будем предполагать, что пространство $\mathbf{b}$ содержит все функции-константы, $S^\omega \mathbf{b} \subset \mathbf{b}$ и $\|S^\omega\|_{\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}} = 1$. Таким образом, пространство $\mathbf{b}^0$ не содержит отличных от нуля функций-констант. Обозначим через $\mathbf{b}^\omega$ подпространство всех асимптотически ω -периодических функций: $u \in \mathbf{b}^\omega$, если $(S^\omega u - u) \in \mathbf{b}^0$. Аналогично определяем пространство $\ell_{\infty 0}^\omega$, элементами которого являются такие функции $y \in \ell_{\infty 0}$, что $(S^\omega y - y) \in \ell_{\infty 0}^0$. Ниже будем предполагать, что пространство $\mathbf{b}$ вольтеррово допустимо для модельного уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 g = u$ и пространство $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^\omega)$ вложено в пространство $\ell_{\infty 0}^\omega$. Таким образом, $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^\omega)$ -устойчивость уравнения $\mathcal{L}_{22} y = g$ означает, что если $g \in \mathbf{b}^\omega$, то любое решение y этого уравнения является асимптотической ω -периодической функцией.

Введем обозначение $[S^\omega, Q_{22}] = S^\omega Q_{22} - Q_{22} S^\omega$, где $Q_{22} = \mathcal{L}_{22} W_{22}$. Пусть модельное уравнение $\mathcal{L}_{22}^0 g = u$ удовлетворяет условиям (а) и (б) из п. 4.

Теорема 2. Пусть уравнение $\mathcal{L}_{22} y = g$ является $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b})$ -устойчивым, а оператор

$$\mathcal{L}_{22} : D(\mathcal{L}_{22}) \rightarrow \ell$$

действует из пространства $D(\mathcal{L}_{22}^l, \mathbf{b}^l)$ в пространство $\mathbf{b}^l$ и ограничен, а также

$$[S^\omega, \mathcal{L}_{22} W_{22}] \mathbf{b} \subset \mathbf{b}^l.$$

Тогда это уравнение $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^\omega)$ -устойчиво.

Лемма 2. Пусть линейный ограниченный оператор $Q_{22} : \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}$ вольтерров, $Q_{22} \mathbf{b} \subset \mathbf{b}$. Пусть, далее, оператор $[S^\omega, Q_{22}]$ переводит пространство $\mathbf{b}$ в пространство $\mathbf{b}^l$. Тогда оператор Q_{22} действует в пространстве $\mathbf{b}^\omega$. Если, кроме того, оператор $Q_{22} : \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}$ имеет обратный оператор $Q_{22}^{-1} : \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}$, то оператор Q_{22}^{-1} действует в пространстве $\mathbf{b}^\omega$.

Сформулируем распространение теоремы Боля—Перрона на уравнение $\mathcal{L}\{x, y\} = \{f, g\}$.

Теорема 3. Пусть $\omega \in \mathbb{N}$ — фиксированное число. Предположим, что выполнены следующие условия: операторы

$$\mathcal{L}_{12} : D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}) \rightarrow B, \quad \mathcal{L}_{21} : D(\mathcal{L}_{11}^0, B) \rightarrow \mathbf{b}$$

действуют и ограничен, причем

$$\mathcal{L}_{12}(D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^l)) \subset B_l, \quad \mathcal{L}_{21}(D(\mathcal{L}_{11}^0, B_l)) \subset \mathbf{b}^l;$$

операторы

$$\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \rightarrow L, \quad \mathcal{L}_{22} : D(\mathcal{L}_{22}) \rightarrow \ell$$

непрерывно действуют из пространств $D(\mathcal{L}_{11}^0, B_l)$ и $D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^l)$ в пространства B_l и $\mathbf{b}^l$ и справедливы включения

$$[S^\omega, \mathcal{L}_{11}W_{11}]B \subset B_l, \quad [S^\omega, \mathcal{L}_{22}W_{22}]\mathbf{b} \subset \mathbf{b}^l.$$

Пусть уравнение $\mathcal{L}_{11}x = f$ является $D(\mathcal{L}_{11}^0, B)$ -устойчивым, а и уравнение $\mathcal{L}_{22}y = g - D(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b})$ -устойчивым. Далее, пусть уравнение

$$\mathcal{L}_1x = (\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21})x = f_1$$

является $D(\mathcal{L}_{11}^0, B)$ -устойчивым, оператор $\mathcal{L}_1W_{11} : B_l \rightarrow B_l$ ограничен и справедливо включение

$$[S^\omega, \mathcal{L}_1W_{11}]B \subset B_l.$$

Тогда уравнение $\mathcal{L}\{x, y\} = \text{col}\{f, g\}$ будет $D(\mathcal{L}_0, B_\omega \times \mathbf{b}^\omega)$ -устойчивым.

Предложенная статья продолжает исследование, начатое в [14–20, 24]. В [14–16, 24] получена теорема Боля—Перрона для ГЛСФДУП в случае экспоненциальной устойчивости. В [17, 18] получена теорема Боля—Перрона для ГЛСФДУП в случае асимптотической устойчивости. В [19] получено обращение к теореме Боля—Перрона для ГЛСФДУП в случае асимптотической устойчивости. В [20] получена теорема Боля—Перрона об асимптотических периодических решениях для ГЛСФДУП в случае асимптотической устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н. В., Березанский Л. М., Симонов П. М., Чистяков А. В. Устойчивость линейных систем с последствием. II// Диффер. уравн. — 1991. — 27, № 4. — С. 555–562.
2. Азбелев Н. В., Березанский Л. М., Симонов П. М., Чистяков А. В. Устойчивость линейных систем с последствием. III// Диффер. уравн. — 1991. — 27, № 10. — С. 1659–1668.
3. Азбелев Н. В., Березанский Л. М., Симонов П. М., Чистяков А. В. Устойчивость линейных систем с последствием. IV// Диффер. уравн. — 1993. — 29, № 2. — С. 196–204.
4. Азбелев Н. В., Симонов П. М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. — Пермь: Перм. ун-т, 2001.
5. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967.
6. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
7. Домошницкий А. И., Драхлин М. Е. О периодических решениях функционально-дифференциальных уравнений// Докл. семин. Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа — 1988. — 3, № 3. — С. 54–57.
8. Драхлин М. Е. Один признак существования асимптотически периодических решений// в кн.: Функционально-дифференциальные уравнения/ Межвуз. сб. науч. тр.. — Пермь: Перм. политехн. ин-т, 1990. — С. 168–170.
9. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — СПб.: Невский Диалект, 2004.
10. Крейн М. Г. О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости// Усп. мат. наук. — 1948. — 3, № 3 (25). — С. 166–169.
11. Массера Х. Л., Шеффер Х. Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970.
12. Пуляев В. Ф. О допустимости некоторых пар пространств относительно линейных интегральных уравнений Вольтерра// Диффер. уравн. — 1984. — 20, № 10. — С. 1800–1805.

13. Пуляев В. Ф. О спектре линейных непрерывных операторов// Изв. Сев.-Кав. науч. центра высш. школы. Естеств. науки. — 1985. — № 4. — С. 25–28.
14. Симонов П. М. Теорема Боля–Перрона для гибридных линейных систем с последействием// Вестн. Перм. ун-та. Мат. Мех. Информ. — 2016. — № 2 (33). — С. 56–60.
15. Симонов П. М. К вопросу о теореме Боля–Перрона для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием// Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2016. — 18, № 1. — С. 75–81.
16. Симонов П. М. Теорема Боля–Перрона для гибридных линейных систем с последействием// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2017. — 132. — С. 122–126.
17. Симонов П. М. Теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием// Вестн. РАЕН. Диффер. уравн. — 2016. — 16, № 3. — С. 55–59.
18. Симонов П. М. Теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости гибридных систем// в кн.: Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения/ Мат. конф., посв. 95-летию со дня рожд. проф. Н. В. Азбелева (Пермь, 17–19 мая 2017 г.). — Пермь, 2018. — С. 230–235.
19. Симонов П. М. Теорема Боля–Перрона и обратная к ней об асимптотической устойчивости для гибридных линейных систем с последействием// Вестн. Перм. ун-та. Мат. Мех. Информ. — 2018. — 2, № 41. — С. 38–43.
20. Симонов П. М. Теорема Боля–Перрона об асимптотически периодических решениях для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием// Вестн. РАЕН. Диффер. уравн. — 2018. — 18, № 4. — С. 58–64.
21. Сокол Д. Г. О допустимости некоторых пар пространств для интегральных операторов и уравнений// Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. — 2000. — 1. — С. 135–137.
22. Цалюк З. Б. Интегральные уравнения Вольтерра// в кн.: Итоги науки и техн. Мат. анализ. — М.: ВИНТИ, 1977. — 15. — С. 131–198.
23. Цалюк З. Б. О допустимости некоторых пар пространств для интегральных операторов и уравнений Вольтерра// Диффер. уравн. — 1977. — 13, № 11. — С. 2096–2098.
24. Simonov P. M. The Bohl–Perron theorem for hybrid linear systems with aftereffect// J. Math. Sci. — 2018. — 230, № 5. — P. 775–781.

Симонов Петр Михайлович

Пермский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: simpm@mail.ru