Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Ульянов, А. Ю. Кирьянов, В. А. Хрипин, Движение тела, подвешенного на нити, с изменяющей длиной подвеса, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 168, 99–104

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-168-99-104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 02:46:38

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 99–104
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-99-104

УДК 517.933

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО НА НИТИ, С ИЗМЕНЯЮЩЕЙ ДЛИНОЙ ПОДВЕСА

© 2019 г. В. М. УЛЬЯНОВ, А. Ю. КИРЬЯНОВ, В. А. ХРИПИН

Аннотация. Рассмотрена задача о движении тела, подвешенного на нити переменной длины, и найдены выражения для скорости перемещения гибкой нити при ее наматывании на барабан, угловой скорости барабана, а также времени, затрачиваемого на рассматриваемый процесс.

Ключевые слова: материальная точка, гибкая нить, угол поворота, угловая скорость, пневмодвигатель.

ON THE MOTION OF A BODY SUSPENDED ON A THREAD WITH VARIABLE LENGTH

© 2019 V. M. ULYANOV, A. YU. KIRYANOV, V. A. KHRIPIN

ABSTRACT. In this paper, we consider the motion of a body suspended on a thread of variable length. We obtain expressions for the speed of the flexible thread when it is wound on a drum, the angular velocity of the drum, and the total duration of the process.

Keywords and phrases: particle, flexible thread, rotation angle, angular velocity, pneumatic motor.

AMS Subject Classification: 34K06

1. Введение. Задача о перемещении тела, соединенного нитью с закрепленным на неподвижном корпусе барабаном, носит прикладной характер. Так, при машинном доении коров важно своевременное снятие доильного аппарата с вымени коровы. Добиться этого можно за счет снабжения переносных доильных аппаратов устройством автоматического снятия (см. [1–3]): подвесная часть аппарата по завершению доения снимается с вымени и выводится из-под коровы посредством гибкой нити, наматываемой на барабан.

Главным требованием к исполнительному механизму при снятии доильного аппарата с вымени является исключение удара о пол (рис. 1). При этом для упрощения задачи аппарат моделируется материальной точкой M с массой m . На точку действуют сила тяжести $P = mg$ и сила натяжения гибкой нити K , под действием которых точка M перемещается по некоторой дуге. При движении точки происходит укорачивание длины подвеса за счет наматывания нити на барабан. Принимаем, что начальная длина нити подвеса, связывающая барабан с точкой M равна l_0 . Угол отклонения нити от вертикали в начальный момент времени обозначим ϕ_0 .

Для нахождения закона движения тела подвешенного на нити используем уравнение Лагранжа (см. [4])

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (1)$$

Рис. 1

где L — функция Лагранжа, равная $T - U$; T — кинетическая энергия; U — силовая функция; ϕ — угол отклонения тела от вертикали. В момент времени t тело находится в некоторой точке 1 ; его скорость, направленная по касательной к траектории движения, складывается из нормальной составляющей вдоль нити подвеса длиной l и перпендикулярной тангенциальной составляющей v_τ . Тогда кинетическая энергия тела равна

$$T = \frac{m\dot{\vartheta}^2}{2} = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dl}{dt} \right)^2 + l^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right]. \quad (2)$$

Силовой функцией в системе выступит потенциальная энергия. При допущении, что в точке подвеса потенциальная энергия равна нулю, на высоте $h_1 = l \cos \phi$ относительно оси барабана она будет равна

$$U = -mgl \cos \phi. \quad (3)$$

После соответствующих преобразований уравнение (1) с учетом формул (2) и (3), примет вид

$$l \frac{d^2 \phi}{dt^2} + 2 \frac{dl}{dt} \frac{d\phi}{dt} + g \sin \phi = 0. \quad (4)$$

Найти решение уравнения (3) в аналитическом виде проблематично. Примем, что при уменьшении величины угла ϕ длина l гибкой нити сокращается таким образом, что материальная точка движется параллельно поверхности пола, сохраняя расстояние b от него. Тогда длина гибкой нити равна

$$l = \frac{h - b}{\cos \phi} \quad (5)$$

где h — высота установки над полом стойла барабана пневмодвигателя. Дифференцируя соотношение (5), подставляя результат в (4) и решая получившееся уравнение совместно с формулой (5), получим:

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + 2 \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{g}{h - b} \sin \phi \cdot \cos \phi = 0. \quad (6)$$

Введем обозначение $a = g/(h - b) > 0$ и примем следующие начальные условия для уравнения (6):

$$\phi(0) = \phi_0 > 0, \quad \dot{\phi}(0) = 0.$$

Выполним в уравнении (6) замену

$$y = y(\phi) = \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2, \quad y(\phi_0) = \left(\frac{d\phi}{dt} \Big|_t = 0 \right)^2 = 0. \quad (7)$$

Продифференцируем функцию (7):

$$\frac{d\phi^2}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{dy}{d\phi} \quad (8)$$

Тогда уравнение (6) с учетом выражения (8) примет вид

$$\frac{dy}{d\phi} + 4 \cdot \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \cdot y + 2a \sin \phi \cdot \cos \phi = 0. \quad (9)$$

Получившееся линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка решим методом вариации постоянных. Сначала рассмотрим однородное уравнение в (9):

$$\frac{dy}{d\phi} + 4 \cdot \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \cdot y = 0 \Rightarrow y = c \cdot \cos^4 \phi. \quad (10)$$

Далее ищем решение исходного неоднородного уравнения (9) в виде

$$y(\phi) = c(\phi) \cdot \cos^4 \phi. \quad (11)$$

Подставляя (11) в уравнение (9), получим

$$\dot{c}(\phi) = -2a \frac{\sin \phi}{\cos^3 \phi} \Rightarrow c(\phi) = -\frac{a}{\cos^3 \phi} + c, \quad (12)$$

где c — постоянная интегрирования. Подставляя в (11) выражение для $c(\phi)$, имеем:

$$y(\phi) = c \cdot \cos^4 \phi - a \cdot \cos^2 \phi. \quad (13)$$

Константу интегрирования c в выражении (13) найдем, применив начальное условие $y(\phi_0) = 0$: $c \cdot \cos^4 \phi_0 - a \cdot \cos^2 \phi_0 = 0$, откуда $c = a / \cos^2 \phi_0$. Формула (13) с учетом значения постоянной c будет

$$y(\phi) = \frac{a \cdot \cos^2 \phi}{\cos^2 \phi_0} (\cos^2 \phi - \cos^2 \phi_0). \quad (14)$$

После преобразований уравнение (14) принимает вид

$$\frac{d\phi}{dt} = \pm \sqrt{a} \frac{\cos \phi}{\cos \phi_0} \cdot \sqrt{\cos^2 \phi - \cos^2 \phi_0}. \quad (15)$$

В правой части уравнения (15) выберем знак «−», так как величина угла поворота ϕ уменьшается с течением времени t ; тогда

$$\frac{d\phi}{\cos \phi \cdot \sqrt{\cos^2 \phi - \cos^2 \phi_0}} = -\frac{\sqrt{a}}{\cos \phi_0} dt. \quad (16)$$

Интегрируя выражение (16), получаем

$$\int \frac{d\phi}{\cos \phi \cdot \sqrt{\cos^2 \phi - \cos^2 \phi_0}} = -\frac{\sqrt{a}}{\cos \phi_0} (t + c_1). \quad (17)$$

Вычислим интеграл левой части (17):

$$\int \frac{\cos \phi d\phi}{\cos^2 \phi \cdot \sqrt{\cos^2 \phi - \cos^2 \phi_0}} = \int \frac{d(\sin \phi)}{(1 - \sin^2 \phi) \sqrt{(1 - \sin^2 \phi) - (1 - \sin^2 \phi_0)}} = \int \frac{dz}{(1 - z^2) \sqrt{z_0 - z^2}},$$

где выполнена замена $z = \sin \phi$ и введено обозначение $z_0 = \sin^2 \phi_0$, причем $0 < z_0 < 1$. Далее, замена $z = z_0 \sin \tau$ приводит к интегралу

$$\int \frac{z_0 \cos \tau d\tau}{(1 - z_0^2 \sin^2 \tau) \sqrt{(z_0^2 - z_0^2 \sin^2 \tau)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - z_0^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{1 - z_0^2} \cdot \operatorname{tg} \tau \right).$$

Осуществляя обратную замену переменных, после упрощения находим интеграл левой части (17):

$$\frac{1}{\cos \phi_0} \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos \phi_0 \cdot \sin \phi}{\sqrt{\sin^2 \phi_0 - \sin^2 \phi}} \right), \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), получим:

$$\frac{1}{\cos \phi_0} \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos \phi_0 \cdot \sin \phi}{\sqrt{\sin^2 \phi_0 - \sin^2 \phi}} \right) = -\frac{\sqrt{a}}{\cos \phi_0} (t + c_1). \quad (19)$$

Для нахождения постоянной c_1 применяем начальное условие $\phi(0) = \phi_0$. При $\phi \rightarrow \phi_0$

$$\frac{\cos \phi_0 \cdot \sin \phi}{\sqrt{\sin^2 \phi_0 - \sin^2 \phi}} \rightarrow \infty \Rightarrow \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos \phi_0 \cdot \sin \phi}{\sqrt{\sin^2 \phi_0 - \sin^2 \phi}} \right) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

поэтому $-\sqrt{a} \cdot c_1 = \pi/2$; тогда

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{\cos \phi_0 \cdot \sin \phi}{\sqrt{\sin^2 \phi_0 - \sin^2 \phi}} \right) = -\sqrt{a} \cdot t - \sqrt{a} \cdot c_1 = \frac{\pi}{2} - \sqrt{a} \cdot t,$$

откуда

$$\frac{\cos \phi_0 \cdot \sin \phi}{\sqrt{\sin^2 \phi_0 - \sin^2 \phi}} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{a} \cdot t \right) = \operatorname{ctg} (\sqrt{a} \cdot t). \quad (20)$$

Преобразования формулы (20) приводят ее к следующему виду:

$$\sin \phi = \pm \frac{\cos (\sqrt{a} \cdot t) \cdot \sin \phi_0}{\sqrt{1 - \sin^2 (\sqrt{a} \cdot t) \cdot \sin^2 \phi_0}}; \quad (21)$$

при этом в правой части формулы (21) выбирается знак «+», так как при $t = 0$ должно быть $\phi = \phi_0$. Для угла поворота нити получаем выражение

$$\phi(t) = \arcsin \frac{\cos (\sqrt{a} \cdot t) \cdot \sin \phi_0}{\sqrt{1 - \sin^2 (\sqrt{a} \cdot t) \cdot \sin^2 \phi_0}}. \quad (22)$$

Длина нити с уменьшением угла ϕ также уменьшается из-за наматывания ее на барабан; при этом формула для скорости движения нити имеет вид

$$-\frac{dl}{dt} = \omega(t) \cdot r \quad (23)$$

где r — радиус барабана, $\omega(t)$ — угловая скорость барабана. Решая совместно уравнения (5) и (23), после преобразований получим:

$$\omega(t) = -\frac{(h-b) \cdot \sin \phi \, d\phi}{r \cdot \cos^2 \phi \, dt}. \quad (24)$$

Совместное решение (15), (21) и (24) приводит к следующему результату:

$$\omega(t) = \frac{\sqrt{g(h-b)} \cdot \sin^2 \phi_0}{r \cdot \cos \phi_0} \cdot \frac{\sin (\sqrt{a} \cdot t) \cdot \cos (\sqrt{a} \cdot t)}{\sqrt{1 - \sin^2 (\sqrt{a} \cdot t) \cdot \sin^2 \phi_0}}. \quad (25)$$

Исследуем функцию $\omega(t)$ на экстремум с целью нахождения критической угловой скорости барабана. Вычислим производную от (25), введя обозначение

$$B_1 = \frac{\sqrt{g(h-b)} \cdot \sin^2 \phi_0}{r \cdot \cos \phi_0},$$

Имеем:

$$\omega(t) = B_1 \cdot \frac{\sin (\sqrt{a} \cdot t) \cdot \cos (\sqrt{a} \cdot t)}{\sqrt{1 - \sin^2 (\sqrt{a} \cdot t) \cdot \sin^2 \phi_0}} = B_1 \cdot \frac{\sin 2\sqrt{a} \cdot t}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + (\cos 2\sqrt{a}t - 1) \cdot \sin^2 \phi_0}}. \quad (26)$$

Производная от выражения (26) равна

$$\dot{\omega}(t) = B_1 \frac{\sqrt{a}}{2 \left(\sqrt{2 + (\cos 2\sqrt{a}t - 1) \cdot \sin^2 \phi_0} \right)^3} \left(\sin^2 \phi_0 \cos^2 2\sqrt{a}t - 2 \cos 2\sqrt{a}t (\sin^2 \phi_0 - 2) + \sin^2 \phi_0 \right).$$

Приравнявая к нулю полученное выражение, получаем

$$\sin^2 \phi_0 \cos^2 2\sqrt{a}t - 2 \cos 2\sqrt{a}t (\sin^2 \phi_0 - 2) + \sin^2 \phi_0 = 0. \quad (27)$$

Рис. 2. Зависимость скорости движения v нити от начального угла ϕ_0 отклонения подвесной части от вертикали

Преобразуем выражение (27), используя замену $k = \cos 2\sqrt{a}t$, к квадратному уравнению

$$k^2 - 2 \frac{\sin^2 \phi_0 - 2}{\sin^2 \phi_0} \cdot k + 1 = 0, \quad (28)$$

имеющему корни

$$k_1 = \frac{\cos \phi_0 + 1}{\cos \phi_0 - 1} = -\operatorname{ctg}^2 \frac{\phi_0}{2}, \quad k_2 = \frac{\cos \phi_0 - 1}{\cos \phi_0 + 1} = -\operatorname{tg}^2 \frac{\phi_0}{2}.$$

Начальный угол отклонения материальной точки ϕ_0 лежит будет в интервале

$$0 < \phi_0 < \frac{\pi}{2} \iff 0 < \frac{\phi_0}{2} < \frac{\pi}{4};$$

если $\operatorname{ctg}(\phi_0/2) > 1$, то корень $k_1 = -\operatorname{ctg}^2(\phi_0/2)$, является посторонним. Если $0 < \operatorname{tg}(\phi_0/2) < 1$, то $k_2 = -\operatorname{tg}^2(\phi_0/2)$ является корнем уравнения. Функция $\omega = f(t)$ в точке $t = t_{\text{кр}}$ изменяет свой знак с плюса на минус, что соответствует максимуму. Найдем величину $t = t_{\text{кр}}$, при котором значения угловой скорости $\omega = \omega_{\text{кр}}$. Имеем:

$$\cos 2\sqrt{a}t = -\operatorname{tg}^2 \frac{\phi_0}{2},$$

откуда

$$t_{\text{кр}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \arccos \left(-\operatorname{tg}^2 \frac{\phi_0}{2} \right). \quad (29)$$

Подставив $t = t_{\text{кр}}$ из (29) в (26), после преобразований получим выражение для угловой скорости барабана:

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{\sqrt{g(h-b)}(1 - \cos \phi_0)}{r \cdot \cos \phi_0}; \quad (30)$$

соответственно, скорость движения нити v с подвесной частью при вращении барабана равна

$$v = \frac{\sqrt{g(h-b)}(1 - \cos \phi_0)}{r \cdot \cos \phi_0}. \quad (31)$$

Графическая интерпретация выражения (31) при постоянных параметрах фиксации исполнительного устройства на вакуумном проводе доильной установки представлена на рис. 2.

Из рис. 2 следует, что с увеличением угла поворота ϕ_0 скорость движения гибкой нити увеличивается. Как показала практика применения рассмотренного устройства в производственных условиях, скорость перемещения нити для исключения травмирования вымени коровы должна быть в пределах 0,15–0,2 м/с (см. [5]). Так, для данного диапазона скоростей нити при диаметре

барабана пневмодвигателя $25 \cdot 10^{-3}$ м необходимая угловая скорость согласно (30) составляет 12–16 рад/с. Продолжительность процесса перемещения подвесной части доильного аппарата при снятии по завершению доения можно определить, если в формуле (21) принять, что $\phi = 0$, что правомочно, так как в конце процесса движения подвесная часть висит под вакуумным проводом, т.е. угол будет $\phi = 0$. Имеем:

$$\sin \phi = \frac{\cos(\sqrt{a} \cdot t) \cdot \sin \phi_0}{\sqrt{1 - \sin^2(\sqrt{a} \cdot t) \cdot \sin^2 \phi_0}} = 0;$$

отсюда следует $\cos(\sqrt{a} \cdot t) = 0$, так что

$$\sqrt{a} \cdot t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}.$$

Заменяя постоянную a , получим:

$$t = \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{g}{h-b}}}.$$

Очевидно, время перемещения подвесной части зависит от высоты ее расположения над полом и геометрических параметров закрепления барабана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Некрашевич В. Ф., Ульянов В. М., Кирьянов А. Ю., Москвитин И. А. Устройство для автоматического снятия доильного аппарата/ Патент RU 2 203 535 С2.
2. Ульянов В. М., Коледов Р. В., Хрипин В. А., Утолин В. В. Определение величины магнитного поля элементов пневмодвигателя, устройства для автоматического снятия подвесной части доильного аппарата// Науч. ж. КубГАУ. — 2015. — 108, № 4. — С. 10.
3. Ульянов В. М., Шапошников С. В. Переносной доильный аппарат с манипулятором// Сельский механизатор. — 2004. — 11. — С. 35.
4. Жуковский Н. Е. Теоретическая механика. — М.: ГИТТЛ, 1952.
5. Ульянов В. М. Производственная проверка технологий доения коров// Механизация и электрификация сельского хозяйства. — 2008. — 6. — С. 13–14.

Ульянов Вячеслав Михайлович

Рязанский государственный агротехнологический университет им. П. А. Костычева

E-mail: ulyanov-v@list.ru

Кирьянов Александр Юрьевич

Академия права и управления Федеральной службы исполнения наказаний России, Рязань

E-mail: customs.rzn.kay@yandex.ru

Хрипин Владимир Александрович

Рязанский государственный агротехнологический университет им. П. А. Костычева

E-mail: khripin@mail.ru