Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Ухоботов, С. А. Никитина, Управление дискретной динамической системой с помехой, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 168, 105–113

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-168-105-113>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:37:26

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 168 (2019). С. 105–113
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-105-113

УДК 517.977

УПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ПОМЕХОЙ

© 2019 г. В. И. УХОВОТОВ, С. А. НИКИТИНА

Аннотация. Для дискретной динамической управляемой системы с помехой рассматривается задача удержания фазовой точки в заданном семействе множеств в дискретные моменты времени. Проанализирован случай, когда вектограмма управления является многогранником, задаваемым с помощью системы линейных неравенств. Доказаны некоторые свойства многогранников специального вида, удовлетворяющих условию линейности, которое позволяет получить условие возможности удержания в явном виде. Приведены необходимые и достаточные условия возможности удержания. Полученные результаты проиллюстрированы примером.

Ключевые слова: дискретная система, многошаговая задача управления, многогранник значений управления.

CONTROL OF A DISCRETE DYNAMIC SYSTEM WITH NOISE

© 2019 V. I. UKHOVOTOV, S. A. NIKITINA

ABSTRACT. For a discrete dynamic controlled system with noise, we consider the problem of retaining a phase point in a given family of sets at discrete instants of time. We analyze the case where the control vectogram is a polyhedron defined by a system of linear inequalities. We prove some properties of specific polyhedra satisfying the linearity condition, which allows us to obtain a condition of retention in the explicit form. Necessary and sufficient conditions for the possibility of retention are given. The results obtained are illustrated by an example.

Keywords and phrases: discrete system, multi-step control problem, polyhedron of control values.

AMS Subject Classification: 93C41, 93C55

1. Введение. В [5, 6] рассматривались дифференциальные игры удержания, в которых цель одного из игроков состоит в том, чтобы фазовая точка находилась в заданных множествах в некоторые моменты времени. В [9] задача удержания решена для динамической системы при наличии помехи и с заданным множеством моментов коррекции. В [7, 8] рассматривались непрерывные задачи управления. В этих работах были предложены процедуры построения стабильного моста и управления, гарантирующего выполнения заданных условий в момент окончания процесса. В данной статье продолжается исследование, начатое в указанных работах. Рассмотрена дискретная модель управляемого процесса, в котором вектограмма управления является многогранником, задаваемым с помощью системы линейных неравенств.

Дискретные процессы управления возникают, как правило, при решении прикладных задач (см. [2, 10]). Это связано с тем, что зачастую информация о состоянии процесса поступает в дискретные моменты времени, а управление осуществляется по шагам.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00264а).

2. Постановка задачи. Рассмотрим дискретный конфликтно-управляемый процесс, заданный уравнением

$$z(t+1) = z(t) - u(t) + v(t), \quad (1)$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $v(t) \in V(t) \subset \mathbb{R}^n$, $u(t) \in U(t) \subset \mathbb{R}^n$, $t = \overline{0, p}$. Здесь u — значения управления, v — значения помехи. Считаем, что число шагов (длительность) процесса управления $p \geq 1$ задано. Множество $V(t)$ при каждом $t = \overline{0, N}$ является выпуклым компактом в $\mathbb{R}^n$.

Предполагаем, что $U(t) = A(\alpha(t))$. Здесь $A(y)$ — многогранник, задаваемый с помощью фиксированного набора из q векторов $c_j \in \mathbb{R}^n$ системой линейных неравенств

$$A(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \langle c_j, z \rangle \leq y_j, \quad j = \overline{1, q} \right\}, \quad (2)$$

где $\langle c, z \rangle$ — скалярное произведение векторов c и z в $\mathbb{R}^n$. Далее будет рассмотрен случай, когда многогранник (2) удовлетворяет следующему условию линейности:

$$A(y + y^*) = A(y) + A(y^*). \quad (3)$$

Процесс управления строится следующим образом. В начальный момент времени задано начальное состояние $z(0)$. Выбирается управление $u(0)$ из множества $U(0) = A(\alpha(0))$. Тогда при реализовавшейся помехе $v(0)$ из множества $V(0)$ по формуле (1) реализуется состояние $z(1)$; оно принимается за начальное. Далее управление строится по правилу, описанному выше. Требуется определить множество начальных положений $z(0)$, откуда возможно осуществить включения

$$z(t) \in A(\beta(t)) \quad (4)$$

при любых допустимых реализациях помехи.

3. Многогранники, линейно зависящие от правых частей. Известно (см. [3]), что многогранник (2) не пуст тогда и только тогда, когда $y \in K$, где

$$K = \left\{ y \in \mathbb{R}^q : \sum_{j=1}^q \lambda_j y_j \geq 0 : \forall \lambda_j \geq 0, \quad j = \overline{1, q}; \quad \sum_{j=1}^q \lambda_j c_j = 0 \right\}. \quad (5)$$

Многогранник (2) будет ограниченным тогда и только тогда (см. [3]), когда

$$\left\{ z \in \mathbb{R}^n : z = \sum_{j=1}^q \lambda_j c_j, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = \overline{1, q} \right\} = \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим многогранник (2) следующего вида:

$$A(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \langle x_j, z \rangle \leq y_j, \quad j \in \overline{0, k}, \quad \langle x_j, z \rangle \leq y_j, \quad j \in \overline{k+1, n}, \right. \\ \left. \langle -x_j, z \rangle \leq y_{j+n-k}, \quad j \in \overline{k+1, n} \right\}. \quad (6)$$

Здесь векторы $x_1, \dots, x_n$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$ и

$$x_0 = f_1 x_1 + \dots + f_k x_k. \quad (7)$$

Лемма 1. Многогранник (6) ограничен тогда и только тогда, когда в разложении (7) коэффициенты отрицательны:

$$f_i < 0, \quad i \in \overline{1, k}. \quad (8)$$

Доказательство. Учитывая разложение (7), равенство $z = \sum_{j=1}^l \lambda_j x_j$ можно записать в следующем виде:

$$z = \sum_{j=1}^k (\lambda_0 f_j + \lambda_j) x_j + \sum_{j=k+1}^n (\lambda_j - \lambda_j^*) x_j, \quad (9)$$

где z — вектор из $\mathbb{R}^n$, а λ_i ($i \in \overline{0, n}$), λ_j^* ($j \in \overline{k+1, n}$) — некоторые числа.

Пусть многогранник (6)) ограничен, но, например, $f_1 \geq 0$. Возьмем $z = -x_1$. Тогда из (9) следует, что $-x_1 = (\lambda_0 f_1 + \lambda_1)x_1$. Очевидно, что полученное равенство не выполняется ни при каких $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0$.

Докажем обратное утверждение. Пусть в разложении (7) коэффициенты отрицательны, $f_i < 0$ ($i \in \overline{1, k}$). Возьмем $z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ и подставим в (9). Приравняв коэффициенты при x_j , получим систему скалярных равенств

$$c_i = \lambda_0 f_i + \lambda_i, \quad i \in \overline{1, k}, \quad c_j = \lambda_j - \lambda_j^*, \quad j \in \overline{k+1, n}.$$

Из неравенств $f_i < 0$ ($i \in \overline{1, k}$) следует, что существует такое число $\lambda_0 \geq 0$, что выполняются равенства $c_i - \lambda_0 f_i = \lambda_i \geq 0$ ($i \in \overline{1, k}$). Далее можно взять такие $\lambda_j^* \geq 0$, чтобы выполнялось неравенство $c_j = \lambda_j - \lambda_j^* \geq 0$. Таким образом, мы показали, что (8) справедливо при некотором наборе чисел $\lambda_i \geq 0$ ($i \in \overline{0, n}$), $\lambda_j^* \geq 0$ ($j \in \overline{k+1, n}$). Лемма доказана. $\square$

Лемма 2. Пусть условие (8) выполнено. Тогда конус (5) для многогранника (6) имеет следующий вид:

$$K = \left\{ y \in \mathbb{R}^{2n-k+1} : y_0 - \sum_{i=1}^k f_i y_i \geq 0; \quad y_i + y_{n+i-k} \geq 0, \quad i \in \overline{k+1, n} \right\}. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть y принадлежит конусу K (см. (5)). Тогда система неравенств

$$\langle x_j, z \rangle \leq y_j, \quad j \in \overline{0, n}, \quad \langle -x_j, z \rangle \leq y_{j+n-k}, \quad j \in \overline{k+1, n}, \quad (11)$$

является совместной, откуда следует (см. [3, с. 140]), что не существует таких $\lambda_i \geq 0, \lambda_i^* \geq 0$, что

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j x_j + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j^* (-x_j) = 0, \quad \sum_{j=0}^n \lambda_j y_j + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j^* y_{j+n-k} = -1. \quad (12)$$

Учитывая разложение (7), перепишем первое равенство в (12) в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^k (\lambda_0 f_j + \lambda_j) x_j + \sum_{j=k+1}^n (\lambda_j - \lambda_j^*) x_j = 0.$$

Так как векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно независимы, это равенство эквивалентно системе скалярных равенств

$$\lambda_0 f_j + \lambda_j = 0, \quad j = \overline{1, k}, \quad \lambda_i - \lambda_i^* = 0, \quad i \in \overline{k+1, n}. \quad (13)$$

Допустим теперь, что одно из неравенств

$$y_0 - \sum_{i=1}^k f_i y_i \geq 0, \quad y_i + y_{n+i-k} \geq 0, \quad i \in \overline{k+1, n}, \quad (14)$$

не выполнено. Согласно (8), для любого набора чисел λ , удовлетворяющего условиям $\lambda_0 \geq 0, \lambda_j = -\lambda_0 f_j \geq 0$ ($j \in \overline{1, k}$), $\lambda_i^* = \lambda_i \geq 0$ ($i \in \overline{k+1, n}$) выполнены равенства (13).

Подставляя эти числа во второе равенство (12), получим

$$\lambda_0 \left(y_0 - \sum_{j=1}^k f_j y_j \right) + \sum_{i=k+1}^n \lambda_i (y_i + y_{i+n-k}) = -1.$$

Это равенство выполнено при некоторых $\lambda_0 \geq 0, \lambda_i \geq 0$ ($i \in \overline{k+1, n}$). Следовательно, второе равенство в (12) выполнено при некоторых $\lambda_j = -\lambda_0 f_j \geq 0$ ($j \in \overline{1, k}$), $\lambda_i^* = \lambda_i \geq 0$ ($i \in \overline{k+1, n}$). Это противоречит совместности системы (11).

Докажем обратное утверждение. Пусть $y \in \mathbb{R}^{2n-k+1}$ удовлетворяет неравенствам (14). Покажем, что y принадлежит конусу (5). Допустим, что это не так. Тогда существует такой набор

чисел $\lambda_j \geq 0$ ($j \in \overline{0, 2n-k}$), что

$$\sum_{j=0}^{2n-k} \lambda_j x_j = 0, \quad \sum_{j=0}^{2n-k} \lambda_j y_j < 0. \quad (15)$$

Учитывая разложение (7), а также условие линейной независимости векторов x_j ($j \in \overline{1, n}$), получим, что первое условие в (15) эквивалентно системе равенств (13). Используя эту систему, второе условие в (15) запишем в виде

$$\lambda_0 \left(y_0 - \sum_{j=1}^k f_j y_j \right) + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j (y_j + y_{j+n-k}) < 0.$$

Однако из неравенств (14) следует, что последнее неравенство не выполняется ни при каких $\lambda_j \geq 0$ ($j \in \overline{0, 2n-k}$). Следовательно, сделанное предположение неверно. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. Пусть для многогранника (6) выполнены соотношения (7) и (8). Тогда для любых $y, y^* \in K$ выполнено условие линейности

$$A(y + y^*) = A(y) + A(y^*).$$

Доказательство. Включение $A(y) + A(y^*) \subset A(y + y^*)$ следует из определения суммы множеств.

Докажем обратное включение. Пусть $z \in A(y + y^*)$. Для доказательства включения $z \in A(y) + A(y^*)$ достаточно найти такую точку $x \in A(y)$, чтобы $z - x \in A(y^*)$; такая точка $x \in A(y)$ существует, если совместна система неравенств

$$\begin{aligned} \langle x_j, x \rangle &\leq y_j, & j \in \overline{0, k}; \\ \langle -x_j, x \rangle &\leq y_j^* - \langle x_j, z \rangle, & j \in \overline{0, k}; \\ \langle x_j, x \rangle &\leq y_j, & j \in \overline{k+1, n}; \\ \langle -x_j, x \rangle &\leq y_{j+n-k}, & j \in \overline{k+1, n}; \\ \langle -x_j, x \rangle &\leq y_j^* - \langle x_j, z \rangle, & j \in \overline{k+1, n}; \\ \langle x_j, x \rangle &\leq y_{j+n-k}^* + \langle x_j, z \rangle, & j \in \overline{k+1, n}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для совместности системы (16) необходимо и достаточно (см. [3, с. 140]), чтобы не существовало таких $\lambda_j \geq 0$ ($j \in \overline{0, n}$), $\lambda_j^* \geq 0$ ($j \in \overline{k+1, n}$), $\mu_j \geq 0$ ($j \in \overline{0, n}$), $\mu_j^* \geq 0$ ($j \in \overline{k+1, n}$), чтобы выполнялись равенства

$$\sum_{j=0}^k \lambda_j x_j + \sum_{j=0}^k \mu_j (-x_j) = 0, \quad (17)$$

$$\sum_{j=0}^k \left(\lambda_j y_j + \mu_j y_j^* - \mu_j \langle x_j, z \rangle \right) = -1, \quad (18)$$

$$\sum_{j=k+1}^n (\lambda_j - \lambda_j^*) x_j + \sum_{j=k+1}^n (\mu_j^* - \mu_j) x_j = 0, \quad (19)$$

$$\sum_{j=k+1}^n (\lambda_j y_j + \lambda_j^* y_{j+n-k}) + \sum_{j=k+1}^n \mu_j (y_j^* - \langle x_j, z \rangle) + \sum_{j=k+1}^n \mu_j^* (y_{j+n-k}^* + \langle x_j, z \rangle) = -1. \quad (20)$$

Возьмем $\lambda_j \geq 0$ ($j \in \overline{0, n}$), $\lambda_j^* \geq 0$ ($j \in \overline{k+1, n}$), $\mu_j \geq 0$ ($j \in \overline{0, n}$), $\mu_j^* \geq 0$ ($j \in \overline{k+1, n}$), удовлетворяющие равенствам (17) и (19). Покажем, что равенства (18) и (20) при этом не выполнены. Для этого достаточно показать справедливость неравенств

$$\sum_{j=0}^k \mu_j \langle x_j, z \rangle \leq \sum_{j=0}^k (\lambda_j y_j + \mu_j y_j^*), \quad (21)$$

$$\sum_{j=k+1}^n (\mu_j - \mu_j^*) \langle x_j, z \rangle \leq \sum_{j=k+1}^n (\lambda_j y_j + \lambda_j^* y_{j+n-k}) + \sum_{j=k+1}^n (\mu_j y_j + \mu_j^* y_{j+n-k}). \quad (22)$$

По условию $z \in A(y + y^*)$, поэтому выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \langle x_j, z \rangle &\leq y_j + y_j^*, & j \in \overline{0, k}, \\ \langle x_j, z \rangle &\leq y_j + y_j^*, & j \in \overline{k+1, n}, \\ \langle -x_j, z \rangle &\leq y_{j+n-k} + y_{j+n-k}^*, & j \in \overline{k+1, n}. \end{aligned}$$

Умножив данные неравенства соответственно на λ_j , λ_j^* , μ_j , μ_j^* и сложив, получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \lambda_j \langle x_j, z \rangle &\leq \sum_{j=0}^k \lambda_j (y_j + y_j^*), \\ \sum_{j=k+1}^n (\lambda_j - \lambda_j^*) \langle x_j, z \rangle &\leq \sum_{j=k+1}^n \lambda_j (y_j + y_j^*) + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j^* (y_{j+n-k} + y_{j+n-k}^*), \\ \sum_{j=0}^k \mu_j \langle x_j, z \rangle &\leq \sum_{j=0}^k \mu_j (y_j + y_j^*), \\ \sum_{j=k+1}^n (\mu_j - \mu_j^*) \langle x_j, z \rangle &\leq \sum_{j=k+1}^n \mu_j (y_j + y_j^*) + \sum_{j=k+1}^n \mu_j^* (y_{j+n-k} + y_{j+n-k}^*). \end{aligned}$$

Учитывая равенства (17), (19), получим, что (21) и (22) выполнены, если правые части выражений (21) и (19) не меньше хотя бы одного из следующих двух выражений соответственно:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \lambda_j (y_j + y_j^*), \quad \sum_{j=0}^k \mu_j (y_j + y_j^*); \\ \sum_{j=k+1}^n (\lambda_j (y_j + y_j^*) + \lambda_j^* (y_{j+n-k} + y_{j+n-k}^*)), \\ \sum_{j=k+1}^n (\mu_j (y_j + y_j^*) + \mu_j^* (y_{j+n-k} + y_{j+n-k}^*)). \end{aligned}$$

Поэтому осталось показать справедливость хотя бы одного из следующих неравенств соответственно:

$$\sum_{j=0}^k (\mu_j - \lambda_j) y_j^* \geq 0, \quad \sum_{j=0}^k (\lambda_j - \mu_j) y_j \geq 0 \quad (23)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{j=k+1}^n (\mu_j - \lambda_j) y_j^* + \sum_{j=k+1}^n (\mu_j^* - \lambda_j^*) y_{j+n-k}^* \geq 0, \\ \sum_{j=k+1}^n (\lambda_j - \mu_j) y_j + \sum_{j=k+1}^n (\lambda_j^* - \mu_j^*) y_{j+n-k}^* \geq 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Из равенства (17), учитывая разложение (7), получаем

$$\lambda_j - \mu_j = (\mu_0 - \lambda_0) f_j, \quad j \in \overline{1, k}.$$

Из равенства (19), учитывая, что векторы x_j ($j \in \overline{1, n}$) линейно независимы, получаем

$$\mu_j - \lambda_j = \mu_j^* - \lambda_j^*, \quad j \in \overline{k+1, n}.$$

Перепишем условия (23) в эквивалентной форме

$$(\mu_0 - \lambda_0) \left(\sum_{j=1}^k f_j y_j - y_0 \right) \geq 0, \quad (\lambda_0 - \mu_0) \left(\sum_{j=1}^k f_j y_j^* - y_0^* \right) \geq 0.$$

Отсюда и из условия $y, y^* \in K$ следует, что одно из неравенств (23) справедливо.

Аналогично запишем условия (24):

$$\sum_{j=k+1}^n (\mu_j - \lambda_j) (y_j^* + y_{j+n-k}^*) \geq 0, \quad \sum_{j=k+1}^n (\lambda_j - \mu_j) (y_j + y_{j+n-k}) \geq 0.$$

Учитывая условия $y, y^* \in K$, получим, что одно из неравенств (24) выполняется. Лемма доказана.

□

В [4] рассмотрены конкретные случаи многогранников (6), а именно, параллелепипед и симплекс. В случае параллелепипеда

$$A(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \langle x_j, z \rangle \leq y_j, \langle -x_j, z \rangle \leq y_{n+j}, j \in \overline{1, n} \right\},$$

где векторы $x_j \in \mathbb{R}^n$ ($j \in \overline{1, n}$) являются линейно независимыми, конус (5) имеет вид

$$K = \left\{ y = (y_1, \dots, y_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} : y_j + y_{n+j} \geq 0, j \in \overline{1, n} \right\}.$$

В случае симплекса

$$A(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \langle x_j, z \rangle \leq y_j, j \in \overline{0, n} \right\},$$

где векторы $x_1, \dots, x_n$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$, а $x_0 = f_1 x_1 + \dots + f_n x_n$, причем все $f_i < 0$, конус (5) имеет вид

$$K = \left\{ y = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : y_0 - \sum_{j=1}^n y_j f_j \geq 0 \right\}.$$

4. Решение задачи управления. Сначала введем в рассмотрение геометрическую разность двух множеств A и B из пространства $\mathbb{R}^n$ (см. [1]):

$$A \overset{*}{-} B = \{ z \in \mathbb{R}^n : z + B \subset A \}.$$

Если $A = \emptyset$, то $A \overset{*}{-} B = \emptyset$.

Лемма 4 (см. [4]). Пусть A — многогранник вида (2), B — компакт в $\mathbb{R}^n$ и $b_j = \max \langle c_j, z \rangle$, где максимум берется по $z \in B$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_q)$. Тогда

$$A \overset{*}{-} B = A(y - b),$$

если $y \in K$.

Введем оператор T_t , который каждому числу $t = \overline{0, p-1}$ и каждому множеству $Y \subset \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие множество $T_t(Y)$, определяемое следующим образом: $z \in T_t(Y)$ тогда и только тогда, когда существует такое управление $u(t) \in A(\alpha(t))$, что

$$z(t+1) = z - u(t) + v(t) \in Y$$

при любой помехе $v(t) \in V(t)$. Положим $T_t(\emptyset) = \emptyset$. Отсюда получим

$$T_t(Y) = \left(Y \overset{*}{-} V(t) \right) + A(\alpha(s)).$$

Рассмотрим случай, когда $Y = A(\gamma)$, $\gamma \in K$. Используя формулу (3) и лемму 4, получим

$$T_t(A(\gamma)) = \emptyset \quad \text{при } \gamma - b(t) \notin K$$

и

$$T_t(A(\gamma)) = A(\gamma - b(t) + \alpha(t)) \quad \text{при } \gamma - b(t) \in K. \quad (25)$$

Определим при $t \leq p$ семейство множеств $W_k(t)$ следующим образом:

$$W_0(t) = A(\beta(t)), \quad (26)$$

$$W_k(t) = A(\beta(t)) \cap T_t(W_{k-1}(t+1)), \quad k = \overline{1, p} \quad (27)$$

Теорема 1. Пусть $p \geq 1$. Из начального положения $z(0)$ возможно осуществить включение (4) при любой реализации помехи тогда и только тогда, когда

$$z(0) \in W_p(0). \quad (28)$$

Доказательство. Предположим, что выполнено включение (28). Тогда из (26) следуют включения $z(0) \in A(\beta(0))$ и

$$z(0) = T_0(W_{p-1}(1)). \quad (29)$$

Используя определение оператора T_t , из включения (29) получим, что существует такое управление $u(0) \in A(\beta(0))$, что соотношение

$$z(1) = W_{p-1}(1) \subset A(\beta(1)) \quad (30)$$

выполнено при любой помехе $v(0) \in V(0)$. Продолжая рассуждения, построим управление так, что будут выполнены включения

$$z(s) \in W_{p-s}(s) \subset A(\beta(s)), \quad s = \overline{1, p},$$

при любых реализациях помехи.

Пусть теперь включение (28) не выполнено. Тогда из (27) следует, что либо не выполнено включение (4) при $t = 0$, либо не выполнено включение (29).

В последнем случае, используя определение оператора T_t , получим, что для любого управления $u(0) \in A(\alpha(0))$ найдется такая реализация помехи $v(0) \in V(0)$, что включение (30) не выполнено. Продолжая это рассуждение дальше, получим, что либо $z(s) \notin A(\beta(s))$ при некотором $s \in \overline{0, p-1}$, либо $z(s) \in A(\beta(s))$, но $z(p-1) \notin W_1(p-1) \subset A(\beta(p-1))$.

Во втором случае $z(p-1) \notin T_{p-1}(W_0(p))$. Значит, для любого управления $u(p-1) \in A(\alpha(p-1))$ найдется такая помеха $v(p-1) \in V(p-1)$, что $z(p) \notin W_0(p)$. Отсюда и из (25) следует, что включение (29) не выполнено при $t = p$. Теорема доказана. $\square$

Из доказанной теоремы следует, что множество $W_k(t)$ задается системой линейных неравенств вида (2) с правой частью $y_j = \delta_j^{(k)}(t)$ ($j = \overline{1, q}$, $k = \overline{0, p}$). Из (27) получим, что $\delta_j^{(k)}(t)$ можно определить, используя рекуррентные выражения вида

$$\delta_j^{(0)}(t) = \beta_j(t),$$

где

$$\delta_j^{(k)}(t) = \min \left\{ \beta_j(t); \delta_j^{(k-1)}(t+1) - b_j(t) + \alpha_j(t) \right\}, \quad (31)$$

при $\delta_j^{(k-1)}(t+1) - b_j(t) \in K$ ($j = \overline{1, q}$, $k = \overline{1, p}$). Таким образом, для того, чтобы из начального положения $z(0)$ осуществить включение (4), должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} \langle c_1, z(0) \rangle &\leq \min \left\{ \beta_1(0); \delta_1^{(p-1)}(1) - b_1(0) + \alpha_1(0) \right\}, \\ \langle c_2, z(0) \rangle &\leq \min \left\{ \beta_2(0); \delta_2^{(p-1)}(1) - b_2(0) + \alpha_2(0) \right\}, \\ &\dots\dots\dots \\ \langle c_q, z(0) \rangle &\leq \min \left\{ \beta_q(0); \delta_q^{(p-1)}(1) - b_q(0) + \alpha_q(0) \right\}, \\ \sum_{j=1}^q \lambda_j \cdot \left[\delta_j^{(p-1)}(1) - b_j(0) \right] &\geq 0 \quad \forall \lambda_j \geq 0, \quad j = \overline{1, q}; \quad \sum_{j=1}^q \lambda_j c_j = 0. \end{aligned}$$

5. Пример. Рассмотрим дискретный процесс, заданный уравнениями

$$x_1(t+1) = x_1(t) - u_1(t) + v_1(t), \quad x_2(t+1) = x_2(t) - u_2(t) + v_2(t).$$

Число шагов p процесса управления задано. Ограничения на выбор управления имеют вид

$$0 \leq u_1 \leq a_1, \quad 0 \leq u_2 \leq a_2,$$

причем $a_1 \geq 1$, $a_2 \geq 1$. Множество значений помехи задается следующим образом:

$$V = \{(v_1, v_2) : v_1^2 + v_2^2 \leq 1\}.$$

Цель процесса управления заключается в том, чтобы при всех $0 \leq t \leq p$ выполнялись неравенства

$$0 \leq x_1(t) \leq d_1, \quad 0 \leq x_2(t) \leq d_2 \quad (32)$$

при любой реализации помехи.

Определим условия на множество начальных положений $(x_1(0), x_2(0))$, откуда возможно осуществить выполнение (32). Запишем векторы $c_1 = (1, 0)$, $c_2 = (-1, 0)$, $c_3 = (0, 1)$, $c_4 = (0, -1)$. Тогда $b_j = \max_{v \in V} \langle c_j, v \rangle = 1$ при всех $j = \overline{1, 4}$.

Обозначим четырехугольник, заданный с помощью системы векторов c_1, c_2, c_3, c_4 , следующим образом:

$$A(y_1, y_2, y_3, y_4) = \{(z_1, z_2) : z_1 \leq y_1, -z_1 \leq y_2, z_2 \leq y_3, -z_2 \leq y_4\}. \quad (33)$$

Тогда для множества управлений получим $U(t) = A(a_1, 0, a_2, 0)$. Условие (32) запишется в виде $(x_1(t), x_2(t)) \in A(d_1, 0, d_2, 0)$.

Как показано выше, для многогранника вида (33) выполнено условие линейности (3). Конус для четырехугольника (33) имеет вид

$$K = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) : y_1 + y_2 \geq 0, y_3 + y_4 \geq 0\}.$$

Запишем (31) для рассматриваемого примера:

$$\delta_j^{(0)} = \beta_j, \quad \delta_j^{(k)} = \min \left\{ \beta_j; \delta_j^{(k-1)} - b_j + \alpha_j \right\}, \quad j = \overline{1, 4}, \quad k = \overline{1, p}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} \delta_1^{(0)} &= d_1, \quad \delta_2^{(0)} = 0, \quad \delta_3^{(0)} = d_2, \quad \delta_4^{(0)} = 0, \\ \delta_1^{(1)} &= \min \{ \beta_1; \beta_1 - b_1 + \alpha_1 \} = \min \{ d_1; d_1 - 1 + a_1 \} = d_1. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $a_1 \geq 1$. Аналогично определяем

$$\begin{aligned} \delta_2^{(1)} &= \min \{ 0; 0 - 1 + 0 \} = -1, \\ \delta_3^{(1)} &= \min \{ d_2; d_2 - 1 + a_2 \} = d_2, \\ \delta_4^{(1)} &= \min \{ 0; 0 - 1 + 0 \} = -1, \end{aligned}$$

причем условие непустоты запишется в виде $d_1 - 1 \geq 0$, $d_2 - 1 \geq 0$. Далее находим

$$\begin{aligned} \delta_1^{(2)} &= \min \{ \beta_1; \delta_1^{(1)} - b_1 + \alpha_1 \} = \min \{ d_1; d_1 - 1 + a_1 \} = d_1, \\ \delta_2^{(2)} &= \min \{ 0; -1 - 1 + 0 \} = -2, \\ \delta_3^{(2)} &= \min \{ d_2; d_2 - 1 + a_2 \} = d_2, \\ \delta_4^{(2)} &= \min \{ 0; -1 - 1 + 0 \} = -2. \end{aligned}$$

Условие непустоты четырехугольника запишется в виде $d_1 - 2 \geq 0$, $d_2 - 2 \geq 0$.

Продолжая далее, получим

$$\delta_1^{(k)} = d_1, \quad \delta_2^{(k)} = -k, \quad \delta_3^{(k)} = d_2, \quad \delta_4^{(k)} = -k, \quad k = \overline{1, p}.$$

Условие непустоты принимает вид $d_1 \geq k$, $d_2 \geq k$, $k = \overline{1, p}$.

Таким образом, для того, чтобы из начального положения $(x_1(0), x_2(0))$ осуществить (32), должны выполняться следующие условия:

$$p \leq x_1(0) \leq d_1, \quad p \leq x_2(0) \leq d_2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры. II // Докл. АН СССР. — 1967. — 175, № 4. — С. 764–766.
2. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. — М.: Наука, 1973.
3. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Мир, 1980.
4. Ухоботов В. И. К построению стабильных мостов // Прикл. мат. мех. — 1980. — 44, № 5. — С. 934–938.
5. Ухоботов В. И. К построению стабильного моста в игре удержания // Прикл. мат. мех. — 1981. — 45, № 2. — С. 236–240.
6. Ухоботов В. И. Дифференциальная игра удержания // Техн. киберн. — 1984. — 22, № 3. — С. 53–59.
7. Ухоботов В. И., Никитина С. А. Стабильный мост для одной декомпозиционной дифференциальной игры // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2003. — 1 (7). — С. 99–107.
8. Ухоботов В. И., Никитина С. А. Построение гарантированного управления в квазилинейных системах // Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2005. — 11, № 1. — С. 201–211.
9. Ухоботов В. И., Стабулит И. С. Динамическая задача управления при наличии помехи и с заданным множеством моментов коррекции // Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2018. — 28, № 1. — С. 74–81.
10. Шорилов А. Ф. Алгоритм адаптивного минимаксного управления для процесса преследования-уклонения в дискретных системах // Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2000. — 6, № 2. — С. 515–535.

Ухоботов Виктор Иванович

Челябинский государственный университет

E-mail: ukh@csu.ru

Никитина Светлана Анатольевна

Челябинский государственный университет

E-mail: nikitina@csu.ru