Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Бодренко, О подмногообразиях с параллельным нормальным векторным полем в пространствах постоянной кривизны, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 169, 3–10

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-169-3-10>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:40:02

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 169 (2019). С. 3–10
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-169-3-10

УДК 514.76

О ПОДМНОГООБРАЗИЯХ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ НОРМАЛЬНЫМ ВЕКТОРНЫМ ПОЛЕМ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

© 2019 г. И. И. БОДРЕНКО

Посвящается профессору В. Т. Фоменко

Аннотация. В работе описаны нормальные векторные поля специального вида вдоль геодезических на n -мерных подмногообразиях в $(n + p)$ -мерных пространствах постоянной кривизны, в частности, поля векторов нормальной кривизны и нормального кручения подмногообразия в точке по заданному направлению. Изучены свойства подмногообразий, вдоль геодезических которых эти нормальные векторные поля параллельны в нормальной связности.

Ключевые слова: подмногообразие, пространство постоянной кривизны, вторая фундаментальная форма, нормальное векторное поле, вектор нормальной кривизны, вектор нормального кручения.

ON SUBMANIFOLDS WITH A PARALLEL NORMAL VECTOR FIELD IN SPACES OF CONSTANT CURVATURE

© 2019 I. I. BODRENKO

ABSTRACT. In this paper, we describe normal vector fields of a special form along geodesic lines on n -dimensional submanifolds of $(n + p)$ -dimensional spaces of constant curvature, in particular, fields of normal curvature and normal torsion of a submanifold at a point in a given direction. We study submanifolds such that these normal vector fields are parallel in the normal connection along their geodesic lines.

Keywords and phrases: submanifold, space of constant curvature, second fundamental form, normal vector field, normal curvature vector, normal torsion vector.

AMS Subject Classification: 53B25, 53C40

1. Введение. Пусть M^{n+p} — $(n + p)$ -мерное гладкое риманово многообразие, $\tilde{g}$ — риманова метрика на M^{n+p} , $\tilde{\nabla}$ — риманова связность, согласованная с $\tilde{g}$. Обозначим через $\tilde{R}$ преобразование кривизны связности $\tilde{\nabla}$. Риманово многообразие M^{n+p} называется *пространством постоянной кривизны* $\tilde{c}$ ($\tilde{c} = \text{const}$) и обозначается $M^{n+p}(\tilde{c})$, если преобразование кривизны $\tilde{R}$ удовлетворяет условию

$$\tilde{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = \tilde{c}(\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Z})\tilde{X} - \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Z})\tilde{Y})$$

для любых векторных полей $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$, касательных к M^{n+p} .

Пусть F^n — n -мерное ($n \geq 2$) гладкое подмногообразие в $(n + p)$ -мерном ($p \geq 2$) пространстве постоянной кривизны $M^{n+p}(\tilde{c})$. Обозначим через g индуцированную риманову метрику на F^n ,

через ∇ — риманову связность на F^n , согласованную с g , через R — преобразование кривизны связности ∇ . Вторая фундаментальная форма b подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ определяется по формуле Гаусса

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + b(X, Y)$$

для любых векторных полей X, Y , касательных к F^n .

Обозначим через D нормальную связность подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$, через $R^\perp$ — преобразование кривизны нормальной связности D . Нормальная связность D называется *плоской*, если $R^\perp \equiv 0$ на F^n . Для любого векторного поля ξ , нормального к F^n , и любого векторного поля X , касательного к F^n , формула Вейнгартена имеет вид:

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi,$$

где A_ξ — второй фундаментальный тензор, соответствующий ξ . Оператор Вейнгартена A_ξ удовлетворяет равенству

$$\tilde{g}(b(X, Y), \xi) = g(A_\xi X, Y)$$

для любых векторных полей X, Y , касательных к F^n , и любого векторного поля ξ , нормального к F^n .

Нормальное векторное поле ξ на F^n называется *параллельным в нормальной связности D* , если $D_X \xi = 0$ для любого векторного поля X , касательного к F^n .

Обозначим через $\bar{\nabla} = \nabla \oplus D$ связность Ван дер Вардена—Борлолотти. Ковариантная производная $\bar{\nabla}b$ определяется равенством

$$(\bar{\nabla}_X b)(Y, Z) = D_X(b(Y, Z)) - b(\nabla_X Y, Z) - b(Y, \nabla_X Z)$$

для любых векторных полей X, Y, Z , касательных к F^n .

Для подмногообразия F^n в $M^{n+p}(\tilde{c})$ уравнения Гаусса, Петерсона—Кодацци и Риччи имеют, соответственно, следующий вид:

$$g(R(X, Y)Z, W) = \tilde{c}(g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)) + \tilde{g}(b(X, W), b(Y, Z)) - \tilde{g}(b(X, Z), b(Y, W)),$$

$$(\bar{\nabla}_X b)(Y, Z) = (\bar{\nabla}_Y b)(X, Z),$$

$$\tilde{g}(R^\perp(X, Y)\xi, \eta) = g([A_\xi, A_\eta]X, Y)$$

для любых векторных полей X, Y, Z, W , касательных к F^n , и векторных полей ξ, η , нормальных к F^n .

Пусть $x \in F^n$ — произвольная точка, $T_x F^n$ и $N_x F^n$ — касательное и нормальное пространства к F^n в x , соответственно; $T_x M^{n+p}(\tilde{c}) = T_x F^n \oplus N_x F^n$. Пусть γ — кривая на F^n , проходящая через точку x в направлении вектора $t \in T_x F^n$, $T_{(\gamma)}$ — единичное векторное поле, касательное к γ . Введем обозначение $T_{(\gamma)}(x) = \tau$, где $\tau = t/|t|$. Обозначим через $\tilde{X}_{(\gamma)}$ поле вектора первой кривизны кривой γ в $M^{n+p}(\tilde{c})$:

$$\tilde{\nabla}_{T_{(\gamma)}} T_{(\gamma)} = \tilde{X}_{(\gamma)}.$$

Пусть $k_T \in T_x F^n$ и $k_N \in N_x F^n$ — касательная и нормальная составляющие вектора $\tilde{X}_{(\gamma)}(x) \in T_x M^{n+p}(\tilde{c})$, соответственно. Тогда в силу формулы Гаусса имеем:

$$k_T = \nabla_{T_{(\gamma)}} T_{(\gamma)}(x), \quad k_N = b(\tau, \tau).$$

Вектор $k_N \in N_x F^n$, нормальный к F^n в точке x , зависит от точки x и направления t , и не зависит от выбора кривой γ : $k_N \equiv k_N(x, t)$.

Определение 1. Вектор $k_N(x, t) \in N_x F^n$ называется *вектором нормальной кривизны* подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ в точке $x \in F^n$ по направлению $t \in T_x F^n$.

Обозначим через $\gamma(x, t)$ геодезическую на F^n , проходящую через точку $x \in F^n$ в направлении $t \in T_x F^n$. Пусть в каждой точке $y \in \gamma(x, t)$ многообразия $M^{n+p}(\tilde{c})$ однозначно определен единичный вектор первой нормали $\eta = \eta(y)$. Обозначим через $|k_g(x, t)|$ первую кривизну геодезической $\gamma(x, t)$ в $M^{n+p}(\tilde{c})$, вычисленную в точке x . Тогда

$$\tilde{\nabla}_{T_{(\gamma)}} T_{(\gamma)} = |k_g(y, T_{(\gamma)}(y))| \eta(y) \quad \forall y \in \gamma(x, t),$$

где $T_{(\gamma)} = T_{(\gamma)}(y)$ — единичный касательный вектор к геодезической $\gamma(x, t)$ в точке y , $T_{(\gamma)}(x) = t/|t|$, $|k_g(y, T_{(\gamma)}(y))|$ — первая кривизна геодезической $\gamma(x, t)$ в точке y .

Замечание 1. В [15] В. Т. Фоменко классифицировал двумерные поверхности с плоской нормальной связностью в пространствах постоянной кривизны, геодезические которых имеют постоянную первую кривизну.

Учитывая, что $\nabla_{T_{(\gamma)}} T_{(\gamma)} = 0$ вдоль геодезической $\gamma(x, t)$, имеем

$$|k_g(y, T_{(\gamma)}(y))|\eta(y) = b(T_{(\gamma)}, T_{(\gamma)}) \quad \forall y \in \gamma(x, t).$$

Так как $\eta(y) \in N_y F^n$, то, используя формулу Вейнгартена, вдоль $\gamma(x, t)$ получим

$$\tilde{\nabla}_{T_{(\gamma)}} \eta = -A_\eta T_{(\gamma)} + D_{T_{(\gamma)}} \eta.$$

Обозначим через $\varkappa_N \in N_x F^n$ нормальную составляющую вектора $\tilde{\nabla}_{T_{(\gamma)}} \eta$ в точке x , т.е. $\varkappa_N = D_{T_{(\gamma)}} \eta(x)$. Вектор $\varkappa_N \in N_x F^n$, нормальный к F^n в точке x , зависит от точки $x \in F^n$ и направления $t \in T_x F^n$: $\varkappa_N \equiv \varkappa_N(x, t)$.

Определение 2. Вектор $\varkappa_N(x, t) \in N_x F^n$ называется *вектором нормального кручения* подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ в точке $x \in F^n$ по направлению $t \in T_x F^n$.

Определение 3. Инварианты $|k_N(x, t)|$ и $|\varkappa_N(x, t)|$ называются соответственно *нормальной кривизной* и *нормальным кручением* подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ в точке $x \in F^n$ по направлению $t \in T_x F^n$.

Замечание 2. Для двумерных поверхностей в четырехмерном римановом пространстве понятие нормального кручения поверхности F^2 в точке x по неасимптотическому направлению t ввел В. Т. Фоменко в [16]. Понятие вектора нормального кручения подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ в точке $x \in F^n$ по неасимптотическому направлению $t \in T_x F^n$ в случае $n \geq 2$, $p \geq 2$ введено в [12].

Имеет место следующая формула (см. [12]):

$$\varkappa_N(x, t) = \frac{(\bar{\nabla}_\tau b)(\tau, \tau)}{|b(\tau, \tau)|} - \frac{b(\tau, \tau)\tilde{g}(b(\tau, \tau), (\bar{\nabla}_\tau b)(\tau, \tau))}{|b(\tau, \tau)|^3}, \quad (1)$$

где $\tau = t/|t|$. Формула (1) имеет смысл, если t — неасимптотическое направление.

Свойства двумерных поверхностей F^2 с нулевым нормальным кручением в четырехмерном евклидовом пространстве E^4 изучались в [13]. Исследования свойств подмногообразий F^n с нулевым нормальным кручением в евклидовых пространствах E^{n+p} для произвольных n и p продолжены в [1].

В геометрии погруженных многообразий значительное место занимают исследования подмногообразий со специальными свойствами второй фундаментальной формы.

Определение 4. Вторая фундаментальная форма $b \neq 0$ называется *параллельной* (в связности $\bar{\nabla}$), если $\bar{\nabla}b = 0$.

Определение 5. Вторая фундаментальная форма $b \neq 0$ называется *рекуррентной*, если на F^n существует такая 1-форма μ , что $\bar{\nabla}b = \mu \otimes b$.

Полная локальная классификация и геометрическое описание подмногообразий с непараллельной рекуррентной второй фундаментальной формой в пространствах постоянной кривизны получены в [4]. Свойства кэлеровых подмногообразий с рекуррентной второй фундаментальной формой в пространствах постоянной голоморфной секционной кривизны исследовались в [3].

Определение 6. Вторая фундаментальная форма $b \neq 0$ называется *циклически рекуррентной*, если на F^n существует такая 1-форма μ , что

$$(\bar{\nabla}_X b)(Y, Z) = \mu(X)b(Y, Z) + \mu(Y)b(Z, X) + \mu(Z)b(X, Y)$$

для любых векторных полей X, Y, Z , касательных к F^n .

Подмногообразие $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой $b \neq 0$ (коротко, циклически рекуррентные подмногообразия) являются естественными обобщениями поверхностей Дарбу в трехмерном евклидовом пространстве E^3 (см. [9]). Класс циклически рекуррентных подмногообразий содержит подклассы параллельных подмногообразий и непараллельных рекуррентных подмногообразий, но не исчерпывается ими. Некоторые свойства гиперповерхностей F^n с циклически рекуррентной непараллельной второй фундаментальной формой в евклидовых пространствах E^{n+1} установлены в [5, 8, 11]. Циклически рекуррентные подмногообразия F^n с плоской нормальной связностью в евклидовых пространствах E^{n+p} классифицированы в [6, 7].

В [12] доказано, что подмногообразие F^n без асимптотических направлений в пространстве постоянной кривизны $M^{n+p}(\tilde{c})$ является циклически рекуррентным подмногообразием тогда и только тогда, когда F^n имеет нулевой вектор нормальной кривизны $\varkappa_N(x, t) \equiv 0$ в каждой точке $x \in F^n$ по любому направлению $t \in T_x F^n$, и на F^n существует такая функция $f \neq 0$, что вдоль каждой геодезической $\gamma(x, t)$ выполняется соотношение:

$$f(y) \left| k_g(y, T_{(\gamma)}(y)) \right| \equiv \text{const} \quad \forall y \in \gamma(x, t).$$

Обозначим через $|\varkappa_g(x, t)|$ кручение геодезической $\gamma(x, t)$ в $M^{n+p}(\tilde{c})$, вычисленное в точке x .

Определение 7. Кручение $|\varkappa_g(x, t)|$ геодезической $\gamma(x, t)$ называется *геодезическим кручением* подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ в точке $x \in F^n$ по направлению $t \in T_x F^n$.

В [10] исследовано строение подмногообразий F^n с нулевым геодезическим кручением в евклидовых пространствах E^{n+p} . В частности, в [10] найдены условия, при которых циклически рекуррентные подмногообразия F^n без асимптотических направлений в евклидовых пространствах E^{n+p} имеют нулевое геодезическое кручение $|\varkappa_g(x, t)| \equiv 0$ в каждой точке $x \in F^n$ по любому направлению $t \in T_x F^n$.

На $F^n \subset M^{n+p}(c)$ определены специальные классы нормальных векторных полей в терминах второй фундаментальной формы b .

Определение 8. Нормальное векторное поле $b(T, T)$, определенное для любого единичного векторного поля T , касательного к F^n , называется *полем вектора нормальной кривизны* подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ в направлении T .

В [2] доказано, что если циклически рекуррентное подмногообразие F^n без асимптотических направлений в $M^{n+p}(\tilde{c})$ имеет постоянную точечную коразмерность, равную 1, то направление вектора нормальной кривизны $b(T, T)$ переносится параллельно в нормальной связности по любому направлению T .

Пусть подмногообразие $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ не имеет асимптотических направлений. Для любого единичного векторного поля T , касательного к F^n , определим нормальное векторное поле $\zeta = \zeta(T)$ по формуле

$$\zeta(T) = \frac{(\bar{\nabla}_T b)(T, T)}{|b(T, T)|} - \frac{b(T, T) \tilde{g}(b(T, T), (\bar{\nabla}_T b)(T, T))}{|b(T, T)|^3}. \quad (2)$$

Определение 9. Нормальное векторное поле $\zeta = \zeta(T)$, определенное по формуле (2) для любого единичного векторного поля T , касательного к F^n , называется *полем вектора нормального кручения* подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ в направлении T .

Заметим, что $\zeta(T(x)) = \varkappa(x, t)$, где $T(x) = t/|t|$.

Пусть f — функция на F^n , $f(x) \neq 0$ для любого $x \in F^n$. Рассмотрим вдоль кривой γ нормальное векторное поле

$$f|_{\gamma} b(T_{(\gamma)}, T_{(\gamma)}),$$

где $f|_{\gamma}(u) = f(u)$ для любого $u \in \gamma$.

Определение 10. Поле вектора нормальной кривизны $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ вдоль кривой γ называется *рекуррентным*, если существует такая функция f на F^n , $f(x) \neq 0$ для всех $x \in F^n$,

что

$$D_{T(\gamma)}(f_\gamma b(T(\gamma), T(\gamma))) = 0.$$

Замечание 3. Для подмногообразий F^n в евклидовом пространстве E^{n+p} понятие рекуррентного вектора нормальной кривизны ввел В. Т. Фоменко в [14]. Понятие рекуррентного поля вектора нормальной кривизны подмногообразия F^n вдоль кривой γ в пространстве постоянной кривизны $M^{n+p}(\tilde{c})$ введено в [12].

В [12] доказано, что если подмногообразие F^n без асимптотических направлений в $M^{n+p}(\tilde{c})$ имеет рекуррентное поле вектора нормальной кривизны вдоль каждой геодезической $\gamma(x, t)$, то F^n имеет нулевой вектор нормального кручения $\varkappa_N(x, t) \equiv 0$ в каждой точке $x \in F^n$ по любому направлению $t \in T_x F^n$ и существует такая функция $f \neq 0$ на F^n , что вдоль каждой геодезической $\gamma(x, t)$ выполняется соотношение

$$f(y) \left| k_g(y, T(\gamma)(y)) \right| \equiv \text{const} \quad \forall y \in \gamma(x, t).$$

2. Формулировка результатов. Пусть подмногообразие $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ не имеет асимптотических направлений, и на F^n выполняются следующие условия:

$$k_N(x, t) \neq 0, \quad \varkappa_N(x, t) \neq 0 \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n. \quad (3)$$

Рассмотрим вдоль геодезической $\gamma(x, t)$ нормальные векторные поля:

$$\xi(\gamma) = b(T(\gamma), T(\gamma)), \quad (4)$$

$$\vartheta(\gamma) = D_{T(\gamma)}(b(T(\gamma), T(\gamma))), \quad (5)$$

$$\zeta(\gamma) = \frac{1}{|\xi(\gamma)|} \vartheta(\gamma) - \frac{\tilde{g}(\xi(\gamma), \vartheta(\gamma))}{|\xi(\gamma)|^3} \xi(\gamma). \quad (6)$$

Теорема 1. *Предположим, что подмногообразие $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ не имеет асимптотических направлений и на F^n выполняются условия (3). Вдоль каждой геодезической $\gamma(x, t)$ на F^n нормальное векторное поле $\vartheta(\gamma)$ параллельно в нормальной связности тогда и только тогда, когда вдоль каждой геодезической $\gamma(x, t)$ на F^n выполняются соотношения*

$$\tilde{\nabla}_{T(\gamma)}(\tilde{\nabla}_{T(\gamma)} \xi(\gamma)) = |\zeta(\gamma)|^2 \xi(\gamma), \quad (7)$$

$$|\xi(\gamma)|^2 |\zeta(\gamma)| = C, \quad (8)$$

$$|\zeta(\gamma)| \xi(\gamma)_1 + D_{T(\gamma)} \zeta(\gamma)_1 = 0, \quad (9)$$

где C — положительная константа, зависящая, вообще говоря, от геодезической $\gamma(x, t)$,

$$\xi(\gamma)_1 = \frac{\xi(\gamma)}{|\xi(\gamma)|}, \quad \zeta(\gamma)_1 = \frac{\zeta(\gamma)}{|\zeta(\gamma)|}.$$

Введем в некоторой окрестности $U(x) \subset F^n$ локальные координаты $(u^1, \dots, u^n)$. Пусть геодезическая $\gamma(x, t)$ задана в $U(x) \subset F^n$ уравнениями $u^i = u^i(s)$ ($i = 1, \dots, n$), отнесенными к натуральному параметру s . Пусть точка $y \in \gamma(x, t)$ отвечает значению параметра s , вектор $T(\gamma)(y)$ — единичный касательный вектор к $\gamma(x, t)$ в точке y . Обозначим векторы нормальной кривизны $k_N(y, T(\gamma)(y))$ и нормального кручения $\varkappa_N(y, T(\gamma)(y))$ через $k_N(s)$ и $\varkappa_N(s)$ соответственно.

Теорема 2. *Предположим, что подмногообразие $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ не имеет асимптотических направлений и на F^n выполняются условия (3). Вдоль каждой геодезической $\gamma(x, t)$ на F^n нормальное векторное поле $\vartheta(\gamma)$ параллельно в нормальной связности тогда и только тогда, когда*

вдоль каждой геодезической $\gamma(x, t)$ на F^n выполняются соотношения

$$|k_N(s)| = \sqrt{(C_2 s + C_3 C_2)^2 + \frac{C_1}{C_2^2}}, \quad (10)$$

$$|\varkappa_N(s)| = \frac{C}{(C_2 s + C_3 C_2)^2 + C_1/C_2^2}, \quad (11)$$

$$\frac{|\varkappa_N(s)|}{|k_N(s)|} k_N(s) + D_{T(\gamma)} \left(\frac{\varkappa_N(s)}{|\varkappa_N(s)|} \right) = 0, \quad (12)$$

где s — натуральный параметр $\gamma(x, t)$, точка $y \in \gamma(x, t)$ отвечает значению параметра s ,

$$k_N(s) \equiv k_N(y, T_{(\gamma)}(y)), \quad \varkappa_N(s) \equiv \varkappa_N(y, T_{(\gamma)}(y));$$

$C_1 = C^2 = \text{const} > 0$, $C_2 = \text{const} \neq 0$, $C_3 = \text{const}$ — константы, зависящие, вообще говоря, от геодезической $\gamma(x, t)$.

3. Доказательства теорем.

Лемма 1. Пусть $\gamma(x, t)$ — геодезическая на F^n , проходящая через точку $x \in F^n$ в направлении $t \in T_x F^n$, $T_{(\gamma)}$ — единичное векторное поле, касательное к $\gamma(x, t)$, $\tilde{\gamma}(x, t)$ — открытое подмножество $\gamma(x, t)$, на котором $b(T_{(\gamma)}, T_{(\gamma)}) \neq 0$. Тогда вдоль $\tilde{\gamma}(x, t)$ справедливы равенства

$$D_{T_{(\gamma)}} \xi_{(\gamma)} = \vartheta_{(\gamma)}, \quad D_{T_{(\gamma)}} \xi_{(\gamma)|1} = \zeta_{(\gamma)}, \quad \tilde{g}(\xi_{(\gamma)}, \zeta_{(\gamma)}) = 0,$$

где нормальные векторные поля $\xi_{(\gamma)}$, $\vartheta_{(\gamma)}$, $\zeta_{(\gamma)}$ определены, соответственно, по формулам (4), (5), (6) и $\xi_{(\gamma)|1} = \xi_{(\gamma)}/|\xi_{(\gamma)}|$.

Лемма 2. Пусть $\gamma(x, t)$ — геодезическая на F^n , проходящая через точку $x \in F^n$ в направлении $t \in T_x F^n$, $T_{(\gamma)}$ — единичное векторное поле, касательное к $\gamma(x, t)$, $\tilde{\gamma}(x, t)$ — открытое подмножество $\gamma(x, t)$, на котором $b(T_{(\gamma)}, T_{(\gamma)}) \neq 0$. Тогда в каждой точке $y \in \tilde{\gamma}(x, t)$ выполняются соотношения

$$\xi_{(\gamma)}(y) = k_N(y, T_{(\gamma)}(y)), \quad \vartheta_{(\gamma)}(y) = \left((\overline{\nabla}_{T_{(\gamma)}} b)(T_{(\gamma)}, T_{(\gamma)}) \right)(y), \quad \zeta_{(\gamma)}(y) = \varkappa_N(y, T_{(\gamma)}(y)),$$

где нормальные векторные поля $\xi_{(\gamma)}$, $\vartheta_{(\gamma)}$, $\zeta_{(\gamma)}$ определены, соответственно, по формулам (4), (5), (6).

Лемма 3. Пусть $\gamma(x, t)$ — геодезическая на F^n , проходящая через точку $x \in F^n$ в направлении $t \in T_x F^n$; $T_{(\gamma)}$ — единичное векторное поле, касательное к $\gamma(x, t)$; $\tilde{\gamma}(x, t)$ — такое открытое подмножество $\gamma(x, t)$, что $k_N(y, T_{(\gamma)}(y)) \neq 0$, $\varkappa_N(y, T_{(\gamma)}(y)) \neq 0$ в каждой точке $y \in \tilde{\gamma}(x, t)$. Тогда на $\tilde{\gamma}(x, t)$ имеет место равенство

$$\vartheta_{(\gamma)} = \tilde{g}(\xi_{(\gamma)|1}, \vartheta_{(\gamma)}) \xi_{(\gamma)|1} + |\xi_{(\gamma)}| |\zeta_{(\gamma)}| \zeta_{(\gamma)|1},$$

где нормальные векторные поля $\xi_{(\gamma)}$, $\vartheta_{(\gamma)}$, $\zeta_{(\gamma)}$ определены, соответственно, по формулам (4), (5), (6);

$$\xi_{(\gamma)|1} = \frac{\xi_{(\gamma)}}{|\xi_{(\gamma)}|}, \quad \zeta_{11} = \frac{\zeta_{(\gamma)}}{|\zeta_{(\gamma)}|}.$$

Используя леммы 1 и 3, получим следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть $\gamma(x, t)$ — геодезическая на F^n , проходящая через точку $x \in F^n$ в направлении $t \in T_x F^n$; $T_{(\gamma)}$ — единичное векторное поле, касательное к $\gamma(x, t)$; $\tilde{\gamma}(x, t)$ — такое открытое подмножество $\gamma(x, t)$, что $k_N(y, T_{(\gamma)}(y)) \neq 0$, $\varkappa_N(y, T_{(\gamma)}(y)) \neq 0$ в каждой точке $y \in \tilde{\gamma}(x, t)$.

Тогда на $\tilde{\gamma}(x, t)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} |D_{T(\gamma)}\vartheta(\gamma)|^2 &= |\xi(\gamma)|^2 |\zeta(\gamma)|^2 |D_{T(\gamma)}\zeta(\gamma)| + |\zeta(\gamma)| |\xi(\gamma)| + \frac{|\vartheta(\gamma)|^2 \left(\tilde{g}(\xi(\gamma)|, D_{T(\gamma)}\vartheta(\gamma)) \right)^2}{|\xi(\gamma)|^2 |\zeta(\gamma)|^2} + \\ &+ \frac{\left(\tilde{g}(\vartheta(\gamma), D_{T(\gamma)}\vartheta(\gamma)) \right)^2 - 2\tilde{g}(\xi(\gamma)|, \vartheta(\gamma)) \tilde{g}(\xi(\gamma)|, D_{T(\gamma)}\vartheta(\gamma)) \tilde{g}(\vartheta(\gamma), D_{T(\gamma)}\vartheta(\gamma))}{|\xi(\gamma)|^2 |\zeta(\gamma)|^2}, \end{aligned}$$

где нормальные векторные поля $\xi(\gamma)$, $\vartheta(\gamma)$, $\zeta(\gamma)$ определены, соответственно, по формулам (4), (5), (6);

$$\xi(\gamma)| = \frac{\xi(\gamma)}{|\xi(\gamma)|}, \quad \zeta| = \frac{\zeta(\gamma)}{|\zeta(\gamma)|}.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $x \in F^n$ — произвольная точка, $t \in T_x F^n$ — произвольный касательный вектор к F^n в точке x . Рассмотрим на F^n геодезическую $\gamma(x, t)$ и нормальные векторные поля $\xi(\gamma)$, $\vartheta(\gamma)$, $\zeta(\gamma)$, определенные вдоль $\gamma(x, t)$ по формулам (4), (5), (6), соответственно. Нормальное векторное поле $\vartheta(\gamma)$ параллельно в нормальной связности вдоль $\gamma(x, t)$ тогда и только тогда, когда вдоль $\gamma(x, t)$ на F^n выполняется соотношение

$$|D_{T(\gamma)}\vartheta(\gamma)| = 0. \quad (13)$$

В силу леммы 4 условие (13) эквивалентно соотношениям

$$\begin{aligned} |\zeta(\gamma)| \xi(\gamma)| + D_{T(\gamma)}\zeta(\gamma)| &= 0, \\ \tilde{g}(\vartheta(\gamma), D_{T(\gamma)}\vartheta(\gamma)) &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\tilde{g}(\xi(\gamma), D_{T(\gamma)}\vartheta(\gamma)) = 0. \quad (15)$$

Из (15) находим

$$\tilde{\nabla}_{T(\gamma)}(\tilde{\nabla}_{T(\gamma)}\xi(\gamma)) = |\zeta(\gamma)|^2 \xi(\gamma).$$

Отсюда в силу (14) получим

$$|\xi(\gamma)|^2 |\zeta(\gamma)| = C,$$

где C — положительная константа, зависящая, вообще говоря, от геодезической $\gamma(x, t)$. Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть $x \in F^n$ — произвольная точка, $t \in T_x F^n$ — произвольный касательный вектор к F^n в точке x . Рассмотрим на F^n геодезическую $\gamma(x, t)$. Введем в некоторой окрестности $U(x) \subset F^n$ локальные координаты $(u^1, \dots, u^n)$. Пусть геодезическая $\gamma(x, t)$ задана в $U(x) \subset F^n$ уравнениями $u^i = u^i(s)$ ($i = 1, \dots, n$), отнесенными к натуральному параметру s . Пусть точка $y \in \gamma(x, t)$ отвечает значению параметра s , вектор $T(\gamma)(y)$ — единичный касательный вектор к $\gamma(x, t)$ в точке y . Согласно лемме 2, в каждой точке $y \in \gamma(x, t)$ выполняются равенства

$$\xi(\gamma)(y) = k_N(s), \quad \zeta(\gamma)(y) = \varkappa_N(s),$$

где $k_N(s) \equiv k_N(y, T(\gamma)(y))$, $\varkappa_N(s) \equiv \varkappa_N(y, T(\gamma)(y))$.

В силу теоремы 1 нормальное векторное поле $\vartheta(\gamma)$ параллельно в нормальной связности вдоль геодезической $\gamma(x, t)$ тогда и только тогда, когда вдоль $\gamma(x, t)$ на F^n выполняются соотношения (7), (8), (9). В силу леммы 2, из соотношения (8) находим

$$|k_N(s)|^2 |\varkappa_N(s)| = C, \quad (16)$$

где C — положительная константа, зависящая, вообще говоря, от геодезической $\gamma(x, t)$. Из равенства (7), учитывая (8), получим

$$\tilde{\nabla}_{T(\gamma)}(\tilde{\nabla}_{T(\gamma)}\xi(\gamma)) = \frac{C_1}{|\xi(\gamma)|^4} \xi(\gamma), \quad (17)$$

где $C_1 = C^2$ — положительная константа, зависящая, вообще говоря, от геодезической $\gamma(x, t)$.

Из (17), учитывая лемму 2, приходим к равенству (10). Подставляя равенство (10) в (16), приходим к соотношению (11). Соотношение (12) следует из (9) в силу леммы 2. Теорема доказана.

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бодренко И. И. О подмногообразиях с нулевым нормальным кручением в евклидовом пространстве // Сиб. мат. ж. — 1994. — 35, № 3. — С. 527–536.
2. Бодренко И. И. Параллельные поля нормальных q -направлений на псевдорекуррентных подмногообразиях // Вестн. Волгоград. гос. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. — 2002. — № 7. — С. 5–11.
3. Бодренко И. И. Некоторые свойства кэлеровых подмногообразий с рекуррентными тензорными полями // Вестн. Волгоград. гос. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. — 2006. — 10, № 1. — С. 11–21.
4. Бодренко И. И. Подмногообразия с рекуррентной второй фундаментальной формой в пространствах постоянной кривизны // Обзор. прикл. пром. мат. — 2007. — 14, № 4. — С. 679–682.
5. Бодренко И. И. О гиперповерхностях с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой в евклидовом пространстве // Вестн. Волгоград. гос. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. — 2010. — № 13. — С. 23–35.
6. Бодренко И. И. О подмногообразиях с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой в евклидовых пространствах // Обзор. прикл. пром. мат. — 2011. — 18, № 5. — С. 746.
7. Бодренко И. И. Строение подмногообразий с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой в евклидовом пространстве // Вестн. Волгоград. гос. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. — 2011. — № 1 (14). — С. 10–17.
8. Бодренко И. И. Об аналоге поверхностей Дарбу в многомерных евклидовых пространствах // Вестн. Волгоград. гос. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. — 2013. — № 1 (18). — С. 24–30.
9. Бодренко И. И. Обобщенные поверхности Дарбу в пространствах постоянной кривизны. — Saarbrücken: LAP LAMBERT, 2013.
10. Бодренко И. И. Некоторые свойства нормальных сечений и геодезических на циклически рекуррентных подмногообразиях // Вестн. Волгоград. гос. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. — 2014. — № 2 (21). — С. 6–16.
11. Бодренко И. И. Обобщение теоремы Бонне о поверхностях Дарбу // Мат. заметки. — 2014. — 95, № 6. — С. 812–820.
12. Бодренко И. И. О подмногообразиях с нулевым вектором нормального кручения в пространствах постоянной кривизны // Ломоносовские чтения на Алтае. Фундаментальные проблемы науки и образования (Барнаул, 20–24 октября 2015 г.). — Барнаул: Алтайск. гос. ун-т, 2015. — С. 461–465.
13. Фоменко В. Т. Некоторые свойства двумерных поверхностей с нулевым нормальным кручением в E^4 // Мат. сб. — 1978. — 106 (148), № 4 (8). — С. 589–603.
14. Фоменко В. Т. Об одном обобщении поверхностей Дарбу // Мат. заметки. — 1990. — 48, № 2. — С. 107–113.
15. Фоменко В. Т. Двумерные поверхности с плоской нормальной связностью в пространстве постоянной кривизны, несущие геодезические постоянной кривизны // Мат. заметки. — 2000. — 68, № 4. — С. 579–586.
16. Фоменко В. Т. Классификация двумерных поверхностей с нулевым нормальным кручением в четырехмерном пространстве постоянной кривизны // Мат. заметки. — 2004. — 75, № 5. — С. 744–756.

Бодренко Ирина Ивановна

ООО «Интерактивные системы», Волгоград

E-mail: irina@bodrenko.org