Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Климентов, Стохастический критерий k -движения регулярной поверхности ненулевой средней и знакопостоянной гауссовой кривизны в трехмерном евклидовом пространстве, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 169, 11–16

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-169-11-16>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:27:03

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 169 (2019). С. 11–16
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-169-11-16

УДК 514.772, 519.217.13

СТОХАСТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ k -ДВИЖЕНИЯ РЕГУЛЯРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НЕНУЛЕВОЙ СРЕДНЕЙ И ЗНАКОПОСТОЯННОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2019 г. Д. С. КЛИМЕНТОВ

Посвящается восьмидесятилетию Валентина Трофимовича Фоменко

Аннотация. Получен стохастический критерий k -движения регулярной двумерной поверхности в трехмерном евклидовом пространстве — стохастический аналог основной теоремы теории изгибов.

Ключевые слова: изгибание поверхностей, случайный процесс.

STOCHASTIC CRITERION FOR k -MOTION OF A REGULAR SURFACE OF NONZERO MEAN AND SIGN-CONSTANT GAUSSIAN CURVATURES IN THREE-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

© 2019 D. S. KLIMENTOV

ABSTRACT. In this paper, we obtain a stochastic criterion for the k -motion of a regular two-dimensional surface in three-dimensional Euclidean space—a stochastic analog of the main theorem of bending theory.

Keywords and phrases: surface bending, stochastic process.

AMS Subject Classification: 31A10, 60J60

В предлагаемой заметке выводится стохастический критерий k -движения регулярной поверхности ненулевой средней и знакопостоянной гауссовой кривизны в трехмерном евклидовом пространстве. Настоящая работа является продолжением работы [7].

В дальнейшем будем требовать, чтобы гауссова кривизна двумерной регулярной поверхности F в трехмерном евклидовом пространстве была отделена от нуля и поверхность F была односвязной, конформно эквивалентной кругу с ненулевой средней кривизной. Первую, вторую и третью квадратичные формы поверхности F будем обозначать $I = g_{ij}dx^i dx^j$, $II = b_{ij}dx^i dx^j$ и $III = f_{ij}dx^i dx^j$ соответственно, где x^1, x^2 — локальные координаты на поверхности.

Структура статьи следующая: в разделе 1 приведены некоторые определения из теории изгибов регулярных двумерных поверхностей в трехмерном пространстве; в разделе 2 приведены необходимые сведения из теории случайных процессов; в разделе 3 сформулирован и доказан стохастический критерий k -движения регулярной поверхности ненулевой средней и знакопостоянной гауссовой кривизны в трехмерном евклидовом пространстве.

1. Необходимые сведения из теории изгибаний. Предполагается, что читатель знаком с определением регулярной поверхности, гауссовой и средней кривизн, основными формами поверхности. Подробные сведения можно найти в [8]. В этом разделе будем следовать работе [5].

Рассмотрим регулярную, класса C^n , $n \geq 2$, поверхность, параметризованную в некотором круге D , лежащем в плоскости с координатами (x^1, x^2) . Границу круга будем обозначать ∂D ; полагаем $\bar{D} = D \cup \partial D$.

Введем следующие обозначения: $C^n(\bar{D})$, $n = 1, 2, \dots, \infty, \omega$ — множество вектор-функций, определенных в $\bar{D}$ и обладающих в $\bar{D}$ непрерывными частными производными до порядка n (аналитическими в случае $n = \omega$). Частные производные на ∂D понимаются как предельные значения частных производных в D при стремлении точки, в которой они вычисляются, к ∂D .

Регулярную поверхность S , заданную вектор-функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2) \in C^n(\bar{D})$, будем отождествлять с этой вектор-функцией и мыслить как точку в пространстве $C^n(\bar{D})$.

На линейном пространстве вектор-функций класса $C^n(\bar{D})$ будем считать заданной топологию нормы

$$\|\mathbf{r}(u^1, u^2)\|_{C^n(\bar{D})} = \|\mathbf{r}\|_n = \sum_{i=0}^n \sum_{\alpha=0}^i \max_{(u^1, u^2) \in \bar{D}} \left| \frac{\partial^i \mathbf{r}}{\partial^\alpha u^1 \partial^{i-\alpha} u^2} \right|.$$

Эта норма превращает $C^n(\bar{D})$ в банахово пространство.

Определение 1 (см. [5, с. 3]). *Непрерывной по параметру τ деформацией S^τ поверхности S называется непрерывное отображение интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $(-\infty, \infty)$, $[0, 1]$ (любого промежутка, содержащего 0) в банахово пространство $C^n(\bar{D})$, для которого $S^0 \equiv S$ и для любого τ из рассматриваемого промежутка S^τ есть регулярная поверхность класса $C^n(\bar{D})$.*

Определение 2 (см. [5, с. 5]). Если для любого значения параметра τ из рассматриваемого промежутка поверхность S^τ изометрична поверхности S , то такая деформация называется *непрерывным изгибанием поверхности S* .

Определение 3 (см. [5, с. 5]). Пусть функция $\mathbf{r}^\tau$ дифференцируема по параметру τ . Функция

$$\delta^l \mathbf{r}(u^1, u^2) = \frac{1}{2l!} \frac{d^l \mathbf{r}^\tau}{d\tau^l} \Big|_{\tau=0}$$

называется l -й вариацией (по Рембсу) радиус-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ поверхности S при деформации S^τ .

Аналогично определяются вариации других величин, связанных с поверхностью S , причем по определению полагаем $\delta^0 f \equiv f$.

Определение 4 (см. [5, с. 6]). Пусть S^τ — деформация поверхности S класса C^m по параметру, $m = 1, \dots, \infty, \omega$, $1 \leq k \leq m$. S^τ называется бесконечно малым изгибанием k -го порядка поверхности S , если

$$\delta^l g_{ij} = 0, \quad l = 1, \dots, k,$$

где d_{ij} — метрический тензор поверхности S .

Приведем формулировку основной теоремы теории бесконечно малых изгибаний.

Теорема 1 (см. [5, с. 30]). *Для того, чтобы S^τ была бесконечно малым изгибанием k -го порядка, необходимо и достаточно выполнение уравнений*

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^l \left(\delta^{l-s} b_{11} \delta^s b_{22} + \delta^s b_{11} \delta^{l-s} b_{22} - 2\delta^{l-s} b_{12} \delta^s b_{12} \right) = 0, \\ \partial_2(\delta^l b_{11}) - \partial_1(\delta^l b_{12}) = \Gamma_{12}^\alpha \delta^l b_{\alpha 1} - \Gamma_{11}^\alpha \delta^l b_{\alpha 2}, \\ \partial_2(\delta^l b_{21}) - \partial_1(\delta^l b_{22}) = \Gamma_{22}^\alpha \delta^l b_{\alpha 1} - \Gamma_{21}^\alpha \delta^l b_{\alpha 2}, \end{cases} \quad l = 1, \dots, k, \quad (1)$$

где b_{ij} — коэффициенты второго основного тензора поверхности S , Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля второго рода поверхности S , ∂_i — частная производная по i -й переменной.

2. Необходимые сведения из теории случайных процессов. Предполагается, что читатель знаком с определениями случайного, марковского и строго марковского процессов, диффузионного процесса. Здесь принимаются обозначения из [3]; более подробные сведения можно найти в [1, 3].

Будем считать заданным вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Рассмотрим многообразие (фазовое пространство) $(E, \mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B}$ — σ -поле борелевских множеств на E . Подробное определение случайного процесса на многообразии можно найти в [1].

Определение 5 (см. [3, с. 74]). Функция $P(t, x, \Gamma)$ ($t > 0$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$) называется *переходной функцией*, если выполнены следующие условия:

- (1) при фиксированных t и x функция $P(t, x, \Gamma)$ является мерой на σ -алгебре $\mathfrak{B}$;
- (2) при фиксированных t и Γ $P(t, x, \Gamma)$ есть $\mathfrak{B}$ -измеримая функция точки x ;
- (3) $P(t, x, \Gamma) \leq 1$;
- (4) $P(0, x, E \setminus x) = 0$;
- (5) $P(s + t, x, \Gamma) = \int_E P(s, x, dy) P(t, y, \Gamma)$.

Пусть μ — некоторая мера в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$.

Определение 6 (см. [3, с. 75]). Функция $p(t, x, y)$ ($t > 0$, $x, y \in E$) называется *переходной плотностью*, если выполнены следующие условия:

- (1) $p(t, x, y) \geq 0$;
- (2) при фиксированном t функция $p(t, x, y)$ является $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ -измеримой функцией от (x, y) ;
- (3) $\int_E p(t, x, y) \mu(dy) \leq 1$;
- (4) $p(s + t, x, z) = \int_E p(s, x, y) p(t, y, z) dy$.

Легко проверить (см. [3, с. 75]), что если $p(t, x, y)$ — переходная плотность, то формула

$$P(t, x, \Gamma) = \int_{\Gamma} p(t, x, y) dy, \quad t > 0, \quad P(t, x, \Gamma) = \chi_{\Gamma}, \quad t = 0,$$

определяет переходную функцию.

Со всякой переходной функцией связана сжимающая полугруппа T_t следующим образом (см. [3, с. 80]):

$$T_t f(x) = \int_E P(t, x, dy) f(y),$$

где $f \in B$, B — совокупность всех ограниченных измеримых функций с естественными линейными операциями и нормой $\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$.

Определение 7 (см. [3, с. 214]). *Инфинитезимальным оператором* полугруппы T_t (переходной функции $P(t, x, \Gamma)$) будем называть оператор A , действующий по правилу

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t},$$

причем область определения оператора A состоит из тех функций f , для которых предел в правой части существует.

Если на фазовом пространстве введена структура многообразия, то инфинитезимальный оператор, суженный на дважды непрерывно дифференцируемые функции, называется *генератором* (случайного процесса)

$$Af(x) = a^{ij} \partial_i \partial_j f(x) + b^i \partial_i f(x) - Cf(x),$$

где ∂_i — частная производная по i -й переменной, a^{ij} — положительно определенная матрица.

Переходная плотность связана с генератором случайного процесса обратным уравнением Колмогорова (см. [3, с. 238])

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a^{ij} \partial_i \partial_j p + b^i \partial_i p - Cp.$$

В [3] показано, что со всяким случайным процессом однозначно связаны сжимающая полугруппа, переходная функция и инфинитезимальный оператор.

3. Формулировка основного результата. Пусть S — регулярная поверхность класса C^3 с отделенной от нуля гауссовой кривизной K и ненулевой средней кривизной H с первой квадратичной формой $I = g_{ij} dx^i dx^j$, второй формой $II = b_{ij} dx^i dx^j$ и третьей формой $III = dn^2 = f_{ij} dx^i dx^j$. Пусть на S заданы две диффузии X_t, Z_t , порожденные квадратичными формами I и III соответственно (т.е. генератором диффузии X_t является $A = g^{ij} \partial_i \partial_j$ и аналогично для диффузии Z_t). Переходную плотность процесса X_t будем обозначать $p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ (отметим, что $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ являются точками на поверхности S с контравариантными внутренними координатами $(x^1, x^2), (y^1, y^2)$); переходную функцию процесса Z_t обозначим $P(t, \mathbf{x}, \Gamma)$. Кроме того, потребуем, чтобы поверхность S была односвязной и конформно эквивалентной кругу.

Теорема 2. Для того чтобы поверхность S допускала нетривиальные бесконечно малые изгибания k -го порядка, необходимо и достаточно выполнения системы уравнений

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^l \left(\delta^{l-s} b_{11} \delta^s b_{22} + \delta^s b_{11} \delta^{l-s} b_{22} - 2 \delta^{l-s} b_{12} \delta^s b_{12} \right) = 0, \\ \partial_2 (\delta^l b_{11}) - \partial_1 (\delta^l b_{12}) = \Gamma_{12}^\alpha \delta^l b_{\alpha 1} - \Gamma_{11}^\alpha \delta^l b_{\alpha 2}, \\ \partial_2 (\delta^l b_{21}) - \partial_1 (\delta^l b_{22}) = \Gamma_{22}^\alpha \delta^l b_{\alpha 1} - \Gamma_{21}^\alpha \delta^l b_{\alpha 2}, \end{cases} \quad l = 1, \dots, k, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= g^{kl} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\delta_{ik} \frac{\Delta p}{\partial_t p} \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\delta_{jk} \frac{\Delta p}{\partial_t p} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\delta_{ij} \frac{\Delta p}{\partial_t p} \right) \right], \\ f_{ij} &= \sum_{k,l=1}^2 \frac{1}{|I|^2} \int \partial_t [P_3(t, \mathbf{x}, dy)]_{t=0} \frac{y_i y_k}{1 + \delta_{ik}} \int \partial_t [P_3(t, \mathbf{x}, dy)]_{t=0} \frac{y_j y_l}{1 + \delta_{jl}} \int \partial_t [P_3(t, \mathbf{x}, dy)]_{t=0} \frac{y_k y_l}{1 + \delta_{kl}}, \\ b_{ij} &= \frac{K g_{ij} + f_{ij}}{2H}, \quad g_{ij} = \delta_{ij} \frac{\Delta p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial_t p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})}; \end{aligned}$$

частные производные переходной функции берутся в момент времени $t = 0$, δ^{ij} — символ Кронекера.

4. Доказательство. Для доказательства основной теоремы понадобятся несколько лемм.

Лемма 1. Изотермический элемент поверхности S представим в виде

$$\lambda = \frac{\Delta p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial_t p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})}, \quad (3)$$

где Δ — обычный лапласиан.

Доказательство. В [2, с. 89] показано, что первую квадратичную форму поверхности можно привести к изотермическому виду

$$I = \lambda(\mathbf{x}) ((dx^1)^2 + (dx^2)^2),$$

где функция λ называется изотермическим элементом поверхности. Переходная плотность процесса X_t удовлетворяет обратному уравнению Колмогорова:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\lambda} \Delta p.$$

Так как коэффициент λ строго положителен, то выражения $\partial p/\partial t$ и Δp если и обращаются в нуль, то одновременно, причем эти нули имеют одинаковый порядок. Следовательно, после умножения на λ и деления на $\partial p/\partial t$ получим верное равенство. $\square$

Лемма 2. Контравариантные коэффициенты f^{ij} третьей формы поверхности S и переходная функция $P(t, \mathbf{x}, \Gamma)$ процесса Z_t связаны равенством

$$f^{ij} = \int \frac{\partial}{\partial t} [P(t, \mathbf{x}, dy)]_{t=0} \frac{y^i y^j}{2}.$$

Доказательство. В [3, с. 80] выведена формула $T_t f = \int P(t, \mathbf{x}, dy) f(y)$. По определению, инфинитезимальный оператор диффузии Z_t задается равенством

$$A_Z f = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{T_t f - f}{t}. \quad (4)$$

Отметим, что переходная плотность процесса Z_t дифференцируема не менее двух раз по внутренним координатам и по крайней мере один раз по переменной t . Так как переходная функция диффузии Z_t связана с переходной плотностью p_3 равенством

$$P_3(t, \mathbf{x}, \Gamma) = \int_{\Gamma} p_3(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) dy,$$

то и функция $P_3(t, \mathbf{x}, \Gamma)$ дифференцируема по крайней мере один раз по переменной t .

Рассмотрим подробнее равенство (4). Для дважды непрерывно дифференцируемых функций f левая часть определена, в правой части в знаменателе стоит бесконечно малая величина; следовательно, в числителе также находится бесконечно малая величина. Применим к пределу правило Лопиталя:

$$A_Z f = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\frac{\partial}{\partial t} [T_t f - f]}{1} = \frac{\partial}{\partial t} [T_t f]_{t=0}.$$

В нашем случае генератор процесса Z_t имеет вид $A_Z f = f^{ij} \partial_i \partial_j f$. Выбирая в качестве функции f функцию $f = y^i y^j / 2$ и подставляя в последнее равенство для генератора, получим утверждение леммы. $\square$

Лемма 3. Ковариантные коэффициенты третьей формы поверхности имеют вид

$$f_{ij} = \sum_{k,l=1}^2 \frac{1}{|\Gamma|^2} \int \partial_t [P_3(t, \mathbf{x}, dy)]_{t=0} \frac{y_i y_k}{1 + \delta_{ik}} \int \partial_t [P_3(t, \mathbf{x}, dy)]_{t=0} \frac{y_j y_l}{1 + \delta_{jl}} \int \partial_t [P_3(t, \mathbf{x}, dy)]_{t=0} \frac{y_k y_l}{1 + \delta_{kl}}.$$

Доказательство. Требуемая формула элементарно следует из известной формулы $f_{ij} = g_{ik} g_{jl} f^{kl}$ и предыдущих лемм. $\square$

Лемма 4. Для символов Кристоффеля первого рода поверхности S имеет место равенство

$$\Gamma_{ij,l} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\delta_{ik} \frac{\Delta p}{\partial_t p} \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\delta_{jk} \frac{\Delta p}{\partial_t p} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\delta_{ij} \frac{\Delta p}{\partial_t p} \right) \right].$$

Доказательство. Формула очевидным образом следует из формулы для вычисления символов Кристоффеля и леммы 1. $\square$

Лемма 5. Для символов Кристоффеля второго рода поверхности имеет место равенство

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \delta^{kl} \frac{\partial_t p}{\Delta p} \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\delta_{ik} \frac{\Delta p}{\partial_t p} \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\delta_{jk} \frac{\Delta p}{\partial_t p} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\delta_{ij} \frac{\Delta p}{\partial_t p} \right) \right].$$

Доказательство. Формула очевидным образом следует из леммы 1 и формулы для вычисления символов Кристоффеля второго рода. $\square$

Лемма 6. Для коэффициентов второй формы имеет место соотношение

$$b_{ij} = \frac{Kg_{ij} + f_{ij}}{2H}.$$

Доказательство. В [4, с. 205] была доказана формула $KI - 2H\Pi + \Pi\Pi = 0$. Из этого соотношения очевидно следует утверждение леммы. $\square$

Доказательство теоремы 2 получается подстановкой выражений для b_{ij} и символов Кристоффеля в систему уравнений (1).

Достаточность следует из того, что поверхность положительной кривизны однозначно определяется двумя случайными процессами (см. [6]).

Из доказанной теоремы 2 получается простое следствие.

Теорема 3. Для того чтобы деформация поверхности S была k -движением, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\delta^l \left(\frac{\Delta p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial_t p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})} \right) = 0, \quad l = 1, \dots, k, \quad (5)$$

$$\delta^l b_{ij} = 0, \quad l = 1, \dots, k, \quad (6)$$

где

$$b_{ij} = \frac{Kg_{ij} + f_{ij}}{2H}, \quad g_{ij} = \delta_{ij} \frac{\Delta p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial_t p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})},$$

$$f_{ij} = \sum_{k,l=1}^2 \frac{1}{|\mathbb{I}|^2} \int \partial_t [P_3(t, \mathbf{x}, dy)]_{t=0} \frac{y_i y_k}{1 + \delta_{ik}} \int \partial_t [P_3(t, \mathbf{x}, dy)]_{t=0} \frac{y_j y_l}{1 + \delta_{jl}} \int \partial_t [P_3(t, \mathbf{x}, dy)]_{t=0} \frac{y_k y_l}{1 + \delta_{kl}}.$$

Доказательство. В [5, с. 36] доказана теорема о том, что k -изгибание является k -движением тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\delta^l b_{ij} = 0$, $l = 1, \dots, k$. Равенство (5) следует из определения бесконечно малого изгиба и леммы (1). Подставив в последние формулы выражение для коэффициентов второй формы, получим утверждение теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ватанабе С., Икеда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. — М.: Наука, 1986.
2. Веква И. Н. Обобщенные аналитические функции. — М.: Наука, 1988.
3. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. — М.: Физматлит, 1963.
4. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей. — М.: ОГИЗ, 1947.
5. Климентов С. Б. Введение в теорию изгибаний. Двумерные поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. — Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2014.
6. Климентов Д. С. Стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей ненулевой средней кривизны // Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. — 2014. — № 1. — С. 63–67.
7. Климентов Д. С. Стохастический критерий k -движения регулярной поверхности положительной гауссовой кривизны в трехмерном евклидовом пространстве // Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. — 2015. — № 4. — С. 63–68.
8. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. — М.: ГОНТИ, 1939.

Климентов Дмитрий Сергеевич

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

E-mail: dklimentov75@gmail.com