Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Климентов, Об изгибаниях поверхностей рода $p \geq 1$ положительной внешней кривизны, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 169, 17–22

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-169-17-22>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:10:13

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 169 (2019). С. 17–22
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-169-17-22

УДК 514.772.22

ОБ ИЗГИБАНИЯХ ПОВЕРХНОСТЕЙ РОДА $p \geq 1$ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ

© 2019 г. С. Б. КЛИМЕНТОВ

Посвящается восьмидесятилетию Валентина Трофимовича Фоменко

Аннотация. Статья представляет собой обзор работ по изгибаниям поверхностей положительной внешней кривизны рода $p \geq 1$.

Ключевые слова: изгибание поверхностей, кривизна, род поверхности.

ON BENDING OF SURFACES OF GENUS $p \geq 1$ OF POSITIVE EXTERNAL CURVATURE

© 2019 S. B. KLIMENTOV

ABSTRACT. This paper is a review on bending of surfaces of positive external curvature of genus $p \geq 1$.

Keywords and phrases: surface bending, curvature, genus of a surface.

AMS Subject Classification: 53C40

1. Основные определения и обозначения. Обозначим через M^2 двумерное дифференцируемое многообразие (возможно, с краем) с дифференцируемой структурой класса C_α^k , $k \geq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$ (обозначения функциональных пространств стандартные; см. [1]); (u^1, u^2) — локальные координаты в некоторой (произвольной) координатной окрестности U . Будем всегда считать, что замыкание $\bar{U}$ компактно и содержится в некоторой координатной окрестности V той же дифференцируемой структуры.

Обозначим через $g = g_{ij} du^i du^j$ риманову метрику на M^2 класса C_α^{k-1} . Таким образом, (M^2, g) — двумерное риманово многообразие класса C_α^{k-1} . Аналогично определим трехмерное риманово многообразие (риманово пространство) (R^3, G) .

Под поверхностью S класса C_α^k в (R^3, G) будем понимать такое изометрическое погружение $f : (M^2, g) \rightarrow (R^3, G)$ класса C_α^k , что $f(M^2) = S$. Там, где это не может вызвать недоразумений, будем отождествлять образ $f(M^2) = S$ с погружением f .

Две различные изометричные поверхности $S \neq S'$ одной регулярности в (R^3, G) , вообще говоря, являются погружениями различных изометричных римановых многообразий. В случае регулярности C_α^k , $k \geq 1$, $0 < \alpha < 1$, эти поверхности можно считать погружениями одного и того же риманова многообразия (M^2, g) ; при этом соответствующие друг другу по изометрии точки на S и S' будут иметь общий прообраз на M^2 (см. [12, 15]).

В римановом пространстве, в котором имеется группа движений, поверхность S называется однозначно определенной, если любая другая поверхность S' , изометричная S , конгруэнтна S . Конгруэнтные поверхности называют тривиально изометричными.

Будем считать риманово пространство R^3 евклидовым пространством E^3 , а многообразие M^2 компактным. Зафиксируем на M^2 некоторое конечное покрытие координатными окрестностями $\{U_i\}_{i=1}^n$. Если вектор-функция $\mathbf{r}$ принадлежит классу $C_\alpha^k(M^2)$, определим ее норму следующим образом (см. [5]):

$$\|\mathbf{r}\|_{C_\alpha^k(M^2)} = \max_{i=1, \dots, n} \|\mathbf{r}\|_{C_\alpha^k(\bar{U}_i)};$$

эта норма банахова. Аналогично для скалярных функций и тензорных полей соответствующей регулярности.

Деформацией класса C^m , $m \geq 0$, по параметру поверхности $S = f(M^2)$ будем называть такое отображение $f(t) \equiv f_t$ класса C^m промежутка вещественной оси, содержащего нуль $([0, 1], (-\varepsilon, \varepsilon))$, $\varepsilon > 0$ и т. д.) в банахово пространство вектор-функций класса $C_\alpha^k(M^2)$, что

- (1) $f(0) \equiv f_0 = f(M^2) = S$;
- (2) для любого t вектор-функция f_t задает погружение класса C_α^k многообразия M^2 в E^3 .

Если для любого t поверхность $S_t = f_t(M^2)$ изометрична поверхности $S = f_0(M^2)$, то деформация называется *изгибанием* класса C^m по параметру. Если для любого t изометрия тривиальна, изгибание называется *тривиальным*. При отсутствии у поверхности нетривиальных изгибаний ее называют *неизгибаемой*.

Для некомпактных поверхностей определения аналогичны, только опираться приходится не на банахову структуру, а на структуру счетно-нормированного пространства Фреше.

Обобщения этих определений на случай риманова пространства несложны и используют некоторое фиксированное покрытие координатными компактными окрестностями уже и пространства R^3 .

Ясно, что все характеристики деформируемой поверхности $S_t = f_t(M^2)$ будут функциями класса C^m относительно параметра t , как-то: первый и второй основные тензоры (формы), гауссова и средняя кривизна и т. д. Если $\lambda = \lambda(t)$ — какая-либо величина, связанная с поверхностью S_t , то вариацией функции $\lambda(t)$ называют выражение (если $m \geq 1$)

$$\delta\lambda = \left. \frac{d\lambda(t)}{dt} \right|_{t=0}.$$

Если при деформации S_t имеем $\delta I = 0$, где $I = g_{ij} du^i du^j$ — первая квадратичная форма поверхности, то деформация называется бесконечно малым (б.м.) изгибанием поверхности S , а векторное поле δf — полем бесконечно малого изгибания. Принято отождествлять б.м. изгибания с одинаковым полем δf (см. [11]), т.е. б.м. изгибание фактически есть класс эквивалентности деформаций.

В случае наличия в R^3 движений б.м. изгибание называется *тривиальным*, если δf есть сужение на S поля скоростей движения пространства R^3 .

Поверхность, у которой отсутствуют нетривиальные б.м. изгибания, называется *жесткой*.

2. Замкнутые поверхности ненулевого рода и положительной внешней кривизны.

На существование в некоторых римановых пространствах (достаточно сложной топологической структуры) замкнутых регулярных поверхностей рода $p \geq 1$ и положительной внешней кривизны указал А. В. Погорелов (см. [13], [14, гл. 6, § 12]). Он же доказал, что поле любого б.м. изгибания замкнутой поверхности рода $p = 1$ и положительной внешней кривизны есть тождественный нуль при условии закрепления одной точки поверхности, и продемонстрировал на примере, что условие закрепления точки существенно. Класс регулярности пространства и поверхности при этом не фиксируется, но фактически предполагается C^k , $k \geq 4$.

В вышеупомянутых работах А. В. Погорелов сформулировал утверждение, что любое поле б.м. изгибания замкнутой поверхности рода $p > 1$ положительной внешней кривизны тождественно равно нулю, и выдвинул задачу доказательства этого утверждения.

Дальнейшее развитие теории изгибаний поверхностей рода $p > 0$ положительной внешней кривизны проводилось В. Т. Фоменко и его учениками: Е. В. Тюриковым, С. Б. Климентовым, Ю. П. Золотухиным. В [18] В. Т. Фоменко предложил для изучения изгибаний поверхностей ненулевого рода аппарат теории обобщенных аналитических функций на римановых поверхностях и

доказал сформулированную А. В. Погореловым теорему о жесткости замкнутых поверхностей рода $p > 1$ положительной внешней кривизны. В [19] В. Т. Фоменко также доказал неизгибаемость таких поверхностей в пространстве постоянной кривизны; в случае $p = 1$ при условии закрепления одной точки поверхности. В обеих этих работах требования на регулярность C_α^k , $k \geq 3$, $0 < \alpha < 1$.

Два следующие результата по замкнутым поверхностям принадлежат С. Б. Климентову.

1. В [21] была доказана неизгибаемость замкнутых поверхностей рода $p \geq 1$ положительной внешней кривизны уже без ограничений на кривизну пространства; в случае $p = 1$ при условии закрепления одной точки поверхности (методом, отличным от метода работы [19]) в предположениях, что пространство и поверхность класса регулярности C_α^k , $k \geq 5$, $0 < \alpha < 1$.
2. В [9] были получены необходимые и достаточные условия существования б.м. деформации замкнутой поверхности рода $p \geq 1$ положительной внешней кривизны с заданным б.м. изменением метрики. Требования на регулярность поверхности и пространства те же, что и в предыдущем случае.

Отметим, что из второго результата следует, что не всякая метрика на многообразии M^2 , близкая к погружаемой в виде поверхности положительной внешней кривизны, также погружаема, в отличие от случая $p = 0$ (см. [14, гл. 6, § 7]).

Замкнутые поверхности положительной внешней кривизны с разрезами исследовались Ю. П. Золотухиным в [2, 3]. Сформулируем эти результаты подробнее.

Пусть V^3 — трехмерное риманово пространство постоянной кривизны, $S \subset V^3$ — двумерная замкнутая поверхность положительной внешней кривизны $K_e \geq \text{const} > 0$, рода $p \geq 0$; $S \in C_\alpha^3$, $0 < \alpha < 1$. Далее, пусть $\mathcal{L} = \bigcup_{k=0}^m \mathcal{L}_k$ — совокупность $m + 1$ замкнутых или незамкнутых непесекающихся и не имеющих общих концов ляпуновских кривых на S . Если все кривые $\mathcal{L}_k$, $k = 0, 1, \dots, m$, замкнуты, то будем предполагать, что контур $\mathcal{L}$ ограничивает на S связную область S^+ . На контуре $\mathcal{L}$ обычным образом задаем положительное направление обхода. Если контур $\mathcal{L}$ состоит из незамкнутых кривых $\mathcal{L}_k$, $k = 0, 1, \dots, m$, с концами α_k, β_k , то за положительное направление обхода принимаем обход от α_k к β_k . В дальнейшем рассматриваем поверхность S с разрезом $\mathcal{L}$ и различаем левый ($\mathcal{L}^+$) и правый ($\mathcal{L}^-$) берега разреза. Будем рассматривать изометрические преобразования поверхности S с разрезами в классе $C_\alpha^3((S \setminus \mathcal{L}) \cup (\mathcal{L}^+ \cup \mathcal{L}^-))$.

Пусть τ — касательная плоскость поверхности S в точке s (расположенная в соприкасающемся к V^3 евклидовом пространстве); D — индикатриса внешней кривизны поверхности в точке s , расположенная в плоскости τ . Далее, пусть S^* — изометричная S поверхность, $s^* \in S^*$ — точка, соответствующая по изометрии точке $s \in S$, и D^* — индикатриса кривизны в точке s^* . Обозначим через ν^* угол между соответствующими главными направлениями ω и ω^* индикатрис D и D^* , считая, что $0 \leq \nu^* \leq \pi/2$. Главные кривизны в точках s и s^* по направлениям ω и ω^* обозначим k_1 и k_1^* . Изгибом поверхности S^* в точке s^* при изометрическом преобразовании назовем комплексное число $I(z) = \nu^* + i(k_1^* - k_1)$. В [3] поверхность S называется однозначно определенной, если при любом изометрическом преобразовании этой поверхности $I(z) \equiv 0$.

Пусть поверхность S^* при изометрическом преобразовании вдоль берегов разреза подчинена внешней связи

$$\Delta k_{nl}^+ = a_{11} \Delta k_{nl}^- + a_{12} \Delta \tau_{gl}^-, \quad \Delta \tau_{gl}^+ = a_{21} \Delta k_{nl}^- + a_{22} \Delta \tau_{gl}^-, \quad (1)$$

где $\Delta k_{nl}^\pm$, $\Delta \tau_{gl}^\pm$ — соответственно приращения нормальной кривизны и геодезического кручения вдоль берегов разреза в направлении l ; l — заданное вдоль контура $\mathcal{L}$ поле направлений класса $C_\alpha^1(\mathcal{L})$; a_{ij} — заданные функции класса $C_\alpha^1(\mathcal{L})$. Предположим, что в концах незамкнутых кривых направление поля l совпадает с предельным положением в этих точках поля касательных направлений контура $\mathcal{L}$ и в этих точках $a_{ij} = \delta_{ij}$ (символ Кронекера). Введем функцию $d = \det(a_{ij})$ и при $d > 0$ число

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \arg(a_{11} + a_{22} + i(a_{12} - a_{21}))_{\mathcal{L}_k}.$$

Приращения аргумента вычисляются при положительном обходе контура $\mathcal{L}$.

Рис. 1

Теорема 1 (см. [3]). В пространстве V^3 поверхность S рода $p \geq 0$ с разрезом $\mathcal{L}$, подчиненная внешней связи (1), является однозначно определенной, если $d > 0$ всюду на $\mathcal{L}$ и $\kappa < 4 - 4p$.

Вопрос, существуют ли нетривиальные изометрические преобразования у поверхности S рода $p \geq 1$ с незамкнутыми разрезами без каких-либо внешних условий в [3] не обсуждался и остается открытым по сей день. Следует отметить, что при $p = 0$ пунктированный в двух точках регулярный оваллоид положительной гауссовой кривизны $K \geq \text{const} > 0$ в евклидовом пространстве E^3 всегда допускает нетривиальные изометрические преобразования (см. [14, гл. 6, § 11]).

3. Поверхности ненулевого рода и положительной внешней кривизны с краем. Такого сорта поверхности существуют не только в римановых пространствах сложной топологической структуры, но и в трехмерном евклидовом пространстве. Существование поверхностей рода $p \geq 1$, положительной, отделенной от нуля гауссовой кривизны, с регулярными краями строго доказано в [10]; как могут выглядеть такие поверхности, демонстрирует рис. 1¹.

Первый вопрос, который здесь возникает, существуют ли вообще нетривиальные изгибания и б.м. изгибания таких поверхностей? Ответ положительный и он вполне аналогичен ответу на этот же вопрос для односвязных, гомеоморфных кругу поверхностей положительной кривизны. Сформулируем его точнее.

Пусть $S = f(M^2) \subset R^3$ — компактная поверхность рода $p \geq 0$ с краем, строго положительной внешней кривизны $K_e \geq \text{const} > 0$. Считаем, что $S, R^3 \in C_\alpha^k$, $k \geq 5$, $0 < \alpha < 1$. Вводя в окрестности каждой точки $P \in M^2$ сопряженно изотермическую систему координат (u, v) , в которой вторая основная форма поверхности S имеет канонический вид (см. [1, гл. 2, § 6])

$$\Pi = \Lambda(u, v)(du^2 + dv^2) > 0,$$

превратим M^2 в риманову поверхность с краем с локальной униформизирующей $z = u + iv$, $i^2 = -1$ (см. [24, гл. 2, §1]).

В [5, 6, 20] установлено, что всякой голоморфной на римановой поверхности M^2 функции $\Phi(z) \in C_\alpha^{k-2}(M^2)$ соответствует вполне определенное б.м. изгибание поверхности S , причем различным функциям $\Phi_1(z) \neq \Phi_2(z)$ соответствуют различные б.м. изгибания. Также каждому семейству $\{\Phi_t(z)\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)} \subset C_\alpha^{k-2}(M^2)$, $\varepsilon > 0$, голоморфных на римановой поверхности M^2 функций, класса C^m , $m \geq 0$, по параметру t , соответствует вполне определенное изгибание класса C^m поверхности S .

¹Рисунок выполнен Е. В. Тюриковым в 1975 г.

Поскольку изгибаний и б.м. изгибаний у поверхности положительной кривизны с краем «много», естественной является задача об изгибаниях при различных внешних условиях, в том числе и краевых.

Различные краевые задачи для б.м. изгибаний довольно обстоятельно исследованы в [2–4, 6–8, 16, 17, 22, 23].

Рассматривалось краевое условие

$$\lambda(s)\delta k_n + \mu(s)\delta\tau_g = \sigma(s), \quad s \in \mathcal{L} = \partial S,$$

где $\lambda(s)$, $\mu(s)$, $\sigma(s)$ — наперед заданные функции точек края $\mathcal{L}$, δk_n — вариация нормальной кривизны, а $\delta\tau_g$ — вариация геодезического кручения вдоль края в направлении края при б.м. изгибании (см. [16, 17]), а также краевое условие обобщенного скольжения

$$\xi(s) \cdot l(s) = \gamma(s), \quad qqs \in \mathcal{L} = \partial S,$$

где $\xi(s)$ — поле б.м. изгибания на краю поверхности, $l(s)$ — заранее заданное векторное поле на крае $\mathcal{L}$, $\gamma(s)$ — заданная скалярная функция на $\mathcal{L}$, точка означает скалярное произведение (см. [6, 7]).

Получены различные условия жесткости и нежесткости поверхности при рассматриваемых краевых условиях. По причине их громоздкости мы их здесь не воспроизводим.

Более сложный (нелинейный) случай конечных изгибаний изучен меньше; в [3, 22] установлены лишь достаточные условия отсутствия изгибаний в пространствах постоянной кривизны, в [10] показано, что изгибания могут быть со сколь угодно большим изменением второй основной формы (изгиба, см. п. 2) в фиксированной точке.

Отметим, что *любой* результат, касающийся конечных изгибаний класса C^m , $m \geq 1$, автоматически влечет за собой аналогичный результат для б.м. изгибаний (для линеаризованной задачи; см. [11, гл. 1]).

Приведем один новый, пока не опубликованный результат относительно достаточных условий однозначной определенности поверхности положительной гауссовой кривизны в трехмерном евклидовом пространстве (который вполне мог быть получен 40 лет назад).

К автору обратился И. Х. Сабитов с вопросом: будут ли конгруэнтны две изометричные, локально выпуклые, регулярные поверхности положительной гауссовой кривизны, с краями, если конгруэнтны края этих поверхностей? Для ограниченных выпуклых поверхностей с краями утвердительный ответ на этот вопрос следует из результатов А. В. Погорелова по однозначной определенности общих выпуклых поверхностей с краем (см. [14, гл. 3, § 7]). Для компактных поверхностей произвольного рода $p \geq 0$, положительной, отделенной от нуля гауссовой кривизны, с регулярными краями, верен более общий результат (см. [12]).

Теорема 2. Пусть S и S' — изометричные поверхности класса C_α^k , $k \geq 3$, $0 < \alpha < 1$, рода $p \geq 0$, гауссова кривизна которых удовлетворяет условию $K \geq k_0 = \text{const} > 0$. Если края этих поверхностей $\Gamma = \partial S$ и $\Gamma' = \partial S'$ содержат соответствующие друг другу по изометрии конгруэнтные дуги $\gamma \subset \Gamma$ и $\gamma' \subset \Gamma'$, то поверхности S и S' конгруэнтны.

Очевидно, дуги γ и γ' можно считать расположенными (частично или полностью) внутри поверхностей S и S' .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векун И. Н. Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959.
2. Золотухин Ю. П. Изгибания поверхностей положительной внешней кривизны с разрезами в римановом пространстве/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Одесса, 1980.
3. Золотухин Ю. П. Об однозначной определенности поверхностей с разрезами в пространстве постоянной кривизны// Укр. геом. сб. — 1984. — 27. — С. 42–49.
4. Золотухин Ю. П. О жесткости поверхностей ненулевого рода с краем и разрезами в римановом пространстве при внешних связях// Изв. Сев.-Кав. центра высш. школы. Сер. Естеств. науки. — 1984. — № 1. — С. 22–27.
5. Климентов С. Б. Изгибания поверхностей рода $p \geq 0$ положительной внешней кривизны// Укр. геом. сб. — 1976. — 19. — С. 37–56.

6. Климентов С. Б. Бесконечно малые изгибания поверхностей рода $p \geq 1$ положительной внешней кривизны с краевым условием обобщенного скольжения// Укр. геом. сб. — 1976. — 19. — С. 57–65.
7. Климентов С. Б. Изгибания поверхностей рода $p \geq 0$ положительной внешней кривизны в римановом пространстве/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Одесса, 1976.
8. Климентов С. Б. О гладкости решений краевых задач теории изгибаний поверхностей рода $p \geq 0$ // Укр. геом. сб. — 1978. — 21. — С. 34–44.
9. Климентов С. Б. О деформациях замкнутых поверхностей рода $p \geq 1$ с заданным бесконечно малым изменением метрики// Мат. сб. — 1979. — 108, № 3. — С. 307–325.
10. Климентов С. Б. О степени изгибаемости поверхностей положительной кривизны// Укр. геом. сб. — 1981. — № 24. — С. 39–52.
11. Климентов С. Б. Введение в теорию изгибаний. Двумерные поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. — Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2014.
12. Климентов С. Б. Об однозначной определенности локально выпуклых поверхностей положительной кривизны рода $p \geq 0$ с краем// Сиб. мат. ж. — 2019. — 60, № 1. — С. 109–117.
13. Погорелов А. В. Некоторые вопросы геометрии в целом в римановом пространстве. — Харьков: Изд-во ХГУ, 1957.
14. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Наука, 1969.
15. Сабитов И. Х. К вопросу о гладкости изометрий// Сиб. мат. ж. — 1993. — 34, № 4. — С. 169–176.
16. Тюриков Е. В. Некоторые краевые задачи теории изгибаний поверхностей в пространстве Лобачевского/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Ростов-на-Дону, 1975.
17. Тюриков Е. В. О жесткости поверхностей рода $p \geq 1$ с краем, расположенных в пространстве Лобачевского// Сиб. мат. ж. — 1976. — 17, № 5. — С. 1129–1140.
18. Фоменко В. Т. О жесткости и однозначной определенности замкнутых поверхностей рода $p \geq 1$ в римановом пространстве// Докл. АН СССР. — 1973. — 213, № 1. — С. 45–48.
19. Фоменко В. Т. Об однозначной определенности замкнутых поверхностей рода $p \geq 1$ в пространстве постоянной кривизны// Мат. заметки. — 1974. — 16, № 3. — С. 441–445.
20. Фоменко В. Т., Климентов С. Б. Об изгибаниях поверхностей рода $p \geq 0$ положительной внешней кривизны в римановом пространстве// Докл. АН СССР. — 1976. — 227, № 5. — С. 1064–1066.
21. Фоменко В. Т., Климентов С. Б. Неизгибаемость замкнутых поверхностей рода $p \geq 1$ и положительной внешней кривизны// Мат. сб. — 1976. — 101, № 3. — С. 402–415.
22. Фоменко В. Т., Тюриков Е. В. Исследование основных уравнений теории поверхностей положительной внешней кривизны, расположенных в пространстве Лобачевского// Изв. Сев.-Кав. центра высш. школы. Сер. Естеств. науки. — 1977. — № 3. — С. 3–7.
23. Фоменко В. Т., Золотухин Ю. П. Исследование некоторых классов двусторонних внешних связей теории изгибаний поверхностей// Изв. вузов. Мат. — 1984. — № 11. — С. 71–74.
24. Шиффер М., Спенсер Д. К. Функционалы на конечных римановых поверхностях. — М.: ИЛ, 1957.

Климентов Сергей Борисович

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону;

Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН

и Правительства Республики Северная Осетия-Алания, Владикавказ

E-mail: sbklimentov@sfsedu.ru