Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Костин, Эволюты меридианов и асимптотические на псевдосферах, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 169, 23–30

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-169-23-30>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 11:54:33

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 169 (2019). С. 23–30
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-169-23-30

УДК 514.1

ЭВОЛЮТЫ МЕРИДИАНОВ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ НА ПСЕВДОСФЕРАХ

© 2019 г. А. В. КОСТИН

Аннотация. В работе изучены некоторые общие свойства асимптотических линий на псевдосферах евклидова пространства и пространства Минковского, найдены взаимосвязи между асимптотическими линиями и соответственно евклидовыми и псевдоевклидовыми эволютами меридианов псевдосфер.

Ключевые слова: псевдосфера, асимптотическая линия, эволюта, плоскость Лобачевского, плоскость де Ситтера.

EVOLUTES OF MERIDIANS AND ASYMPTOTIC ON PSEUDOSPHERES

© 2019 А. V. KOSTIN

ABSTRACT. In this work, some general properties of asymptotic lines on pseudospheres of the Euclidean and Minkowski spaces are studied and relationships between asymptotic lines and, respectively, Euclidean and pseudo-Euclidean evolutes of meridians on pseudospheres are found.

Keywords and phrases: pseudosphere, asymptotic line, evolute, Lobachevsky plane, de Sitter plane.

AMS Subject Classification: 51M10, 53C50

1. Предварительные сведения. Хорошо известно, что асимптотические линии на псевдосфере Бельтрами—Миндинга в карте Пуанкаре задаются теми же уравнениями, что и эволюты меридианов этой поверхности в декартовых координатах в плоскостях главных нормальных сечений (см. [3]). Это является одним из мотивов для конструктивного определения связи между асимптотическими и эволютами меридианов. В данной статье будет показано, что эти связи оказываются аналогичными для псевдосферы Бельтрами—Миндинга и ее аналогов в псевдоевклидовом пространстве. Один из таких аналогов псевдосферы впервые рассмотрел П. А. Широков в 1917 г. Его студенческая работа [10] была опубликована только в 1966 г. Формально построенную поверхность вращения П. А. Широков не вкладывает в псевдоевклидово пространство, но его подход эквивалентен введению в плоскостях, ортогональных оси вращения, антиевклидовой метрики, т.е. введения в пространстве псевдоевклидовой структуры с метрикой $ds^2 = dx^2 - dy^2 - dz^2$. На поверхности при этом индуцируется индефинитная метрика постоянной отрицательной кривизны. Поверхность регулярна. Введение псевдоевклидовой метрики позволяет истолковать меридиан поверхности как один из псевдоевклидовых аналогов трактрисы. В данной работе сигнатура метрики объемлющего пространства изменена на противоположную, и, соответственно, изменен знак индуцированной на поверхности метрики и ее кривизны. Кроме того, будет рассмотрена поверхность, полученная гиперболическим вращением другого псевдоевклидова аналога трактрисы.

Рис. 1. Асимптотическая на псевдосфере и эволюта трактрисы

Необходимая информация о геометрии идеальной области плоскости Лобачевского имеется в монографии Б. А. Розенфельда [9]. Пространство, изометричное идеальной области плоскости Лобачевского, в 1866 г. рассмотрел Л. О. Гессе в [12]. Связи решений уравнения $\sin$ -Гордона с поверхностями постоянной отрицательной кривизны описаны в статье Э. Г. Позняка и А. Г. Попова [7]. Ключевые идеи в исследовании решений уравнения $\sin$ -Гордона изложены в работе А. Г. Попова и Е. В. Маевского [8]. Вообще, проблемам, связанным с решениями уравнений $\sin$ -Гордона, посвящено множество работ, как чисто математических, так и связанных с приложениями к современной теоретической физике в квантовой теории поля, теории сверхпроводимости (туннельный эффект Джозефсона). Геометрической интерпретации решений уравнения $\sinh$ -Гордона посвящены работы Чженя [11], Р. Ф. Галеевой и Д. Д. Соколова [2]. В работе Чженя сетевой угол асимптотической сети поверхностей постоянной кривизны с индефинитной метрикой в псевдоримановом многообразии интерпретирован как решение уравнения $\sinh$ -Гордона. В статье Р. Ф. Галеевой и Д. Д. Соколова проведено детальное исследование сетевых углов асимптотических сетей на поверхностях постоянной кривизны с индефинитной метрикой в трехмерном псевдоевклидовом пространстве в связи с интерпретациями различных уравнений математической физики. Псевдоевклидовы эволюты псевдоевклидовых аналогов трактрисы приведены в [5].

2. Основные результаты. С помощью эволют меридианов псевдосфер в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах построим «линейную развертку» асимптотических на этих поверхностях, т.е. отрезок, длина которого равна длине дуги асимптотической. С использованием этой развертки на псевдосферах, имеющих ребро возврата, конструктивно определим точку пересечения асимптотической, проходящей через выбранную на поверхности точку, с ребром возврата поверхности. Введение в плоскости меридиана поверхности метрики Лобачевского для псевдосферы Бельтрами—Миндинга и метрики де Ситтера для псевдосфер с индефинитной метрикой позволяет эволютно-эвольвентную связь дополнить отображением асимптотических на эволюты меридианов в конформно преобразованной метрике. Это отображение обладает наглядными геометрическими свойствами, описанными в работе.

3. Асимптотические на псевдосфере Бельтрами—Миндинга. В плоскости осевого сечения псевдосферы Бельтрами—Миндинга кривизны $K = -1$ построим эволюту трактрисы, являющейся меридианом этой поверхности вращения. Пусть точка M принадлежит этому меридиану и отрезок MP соединяет эту точку с точкой касания нормали трактрисы с ее эволютой. Из точки M проведем дугу MT асимптотической линии до ребра возврата псевдосферы (рис. 1). Обозначим через N особую точку меридиана. Из точки P опустим перпендикуляр PK на прямую, проходящую через точку N параллельно оси вращения. Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Длина дуги асимптотической MT от точки M до ребра возврата псевдосферы равна длине отрезка NK .*

Доказательство. Угол между касательной к трактрисе в точке M и асимптотой трактрисы, являющейся осью вращения псевдосферы, равен углу MPK . Введем в плоскости рассматриваемого сечения метрику Пуанкаре

$$ds^2 = \frac{(du^1)^2 + (du^2)^2}{(u^2)^2} \quad (1)$$

плоскости Лобачевского, взяв в качестве абсолюта асимптоту трактрисы, таким образом, чтобы прямая NK изометрично отображалась на орицикл гиперболической плоскости. Угол между асимптотической линией и меридианом на псевдосфере равен углу между касательной к меридиану и осью вращения (см. [1]). Этот угол монотонно уменьшается при удалении от точки N . Эволюта трактрисы может служить изображением некоторой асимптотической линии псевдосферы в карте Пуанкаре. Ортогональная абсолюту прямая PK при этом будет изображением меридиана псевдосферы. Из того, что угол MPK равен углу между касательной к меридиану и осью вращения, следует, что длина дуги MT асимптотической линии от точки M до ребра возврата будет равна длине дуги NP в гиперболической метрике (1). Длина же дуги NP равна длине ее проекции на орицикл NK , что завершает доказательство. $\square$

Замечание 1. Доказанное утверждение позволяет для каждой точки M на псевдосфере определить точки касания с ребром возврата асимптотических линий, проходящих через точку M , не проводя сами асимптотические. Построенный выше отрезок NK нужно просто «намотать» на ребро возврата, т.е. найти на ребре такие точки, длина дуги ребра до которых от точки N равна длине отрезка NK .

4. Асимптотические на бабочке де Ситтера—Широкова. В трехмерном псевдоевклидовом пространстве с метрикой

$$ds^2 = (dx^1)^2 - (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (2)$$

рассмотрим поверхность

$$x^1 = \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v, \quad x^2 = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v, \quad x^3 = \operatorname{sh} u - \operatorname{arctg} \operatorname{sh} u.$$

Эта поверхность представляет собой один из псевдоевклидовых аналогов псевдосферы. Метрика на поверхности индефинитна, кривизна постоянна. Будем называть эту поверхность *бабочкой де Ситтера—Широкова*. Одна полость поверхности, ограниченная ребром возврата, отображается на часть идеальной области плоскости Лобачевского, ограниченную орициклом и абсолютом. К ребру возврата асимптотические подходят тангенциально. В особых точках поверхности регулярность асимптотических не нарушается (см. [4]). В плоскости меридиана поверхности введем метрику де Ситтера

$$ds^2 = \frac{(du^1)^2 - (du^2)^2}{(u^2)^2} \quad (3)$$

таким образом, что ось вращения совпадает с абсолютом, а орицикл $u^2 = 1$ проходит через точку возврата на меридиане. Будем использовать обозначения, совпадающие с аналогичными обозначениями для псевдосферы Бельтрами—Миндинга. В плоскости осевого сечения бабочки де Ситтера—Широкова построим псевдоевклидову эволюту меридиана (см. [5]). Пусть кривая на псевдоевклидовой плоскости с метрикой $ds^2 = (du^1)^2 - (du^2)^2$ задана параметрическими уравнениями

$$u^1 = x(t), \quad u^2 = y(t),$$

то ее псевдоевклидова эволюта

$$u^1 = \xi(t), \quad u^2 = \eta(t),$$

являющаяся огибающей псевдоевклидовых нормалей кривой, будет определяться из уравнений

$$\begin{aligned} \xi(t) &= x(t) - \dot{y}(t) \frac{\dot{x}^2(t) - \dot{y}^2(t)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}, \\ \eta(t) &= y(t) - \dot{x}(t) \frac{\dot{x}^2(t) - \dot{y}^2(t)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}. \end{aligned}$$

Рис. 2. Асимптотическая на бабочке де Ситтера—Широкова и псевдоевклидова эволюта меридиана

Если меридиан параметризован с помощью гиперболического угла так же, как и выше:

$$u^1 = \operatorname{sh} t - \operatorname{arctg} \operatorname{sh} t, \quad u^2 = \operatorname{ch} t,$$

то точка возврата N меридиана имеет координаты $(0, 1)$. Тогда уравнение псевдоевклидовой эволюты меридиана будет иметь следующий вид:

$$u^2 = \cos t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

Проведем в точке M псевдоевклидову нормаль к меридиану до точки касания P с его псевдоевклидовой эволютой. Из точки P опустим перпендикуляр PK на прямую $u^2 = 1$. Тогда, как и для псевдосферы Бельтрами—Миндинга, длина отрезка NK будет равна длине дуги асимптотической от точки M на псевдосфере де Ситтера—Широкова до ребра возврата.

Теорема 2. *Длина дуги асимптотической MT от точки M на поверхности до точки T на ребре возврата бабочки де Ситтера—Широкова равна длине проекции NK соответствующей дуги эволюты NP на прямую, проходящую через точку N параллельно оси вращения, или, что эквивалентно, длине проекции соответствующей дуги эволюты на ось вращения.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1. В плоскости осевого сечения поверхности введем локальные координаты u^1, u^2 . В этих координатах в метрике $ds^2 = (du^1)^2 - (du^2)^2$ псевдоевклидова эволюта меридиана будет представляться сегментом косинусоиды (рис. 2). Параметризуем бабочку де Ситтера—Широкова координатами карты Пуанкаре:

$$x^1 = \frac{\operatorname{sh} u^1}{u^2}, \quad x^2 = \frac{\operatorname{ch} u^1}{u^2}, \quad x^3 = \frac{\sqrt{1 - (u^2)^2}}{u^2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - (u^2)^2}}{u^2}.$$

Метрика на поверхности в этих координатах примет вид

$$ds^2 = \frac{(du^1)^2 - (du^2)^2}{(u^2)^2},$$

т.е. станет конформна псевдоевклидовой. Из вида второй квадратичной формы

$$\Pi = -\frac{\sqrt{1 - (u^2)^2}}{(u^2)^2} (du^1)^2 + \frac{1}{(u^2)^2 \sqrt{1 - (u^2)^2}} (du^2)^2 \quad (5)$$

следует, что асимптотические линии в карте Пуанкаре будут задаваться следующими уравнениями:

$$u^2 = \cos(u^1 - c_1), \quad u^2 = \cos(c_2 - u^1). \quad (6)$$

Как и для псевдосферы Бельтрами—Миндинга, угол между асимптотической линией и меридианом бабочки де Ситтера—Широкова в точке M будет равен углу MPK , т.е. углу между эволютой меридиана и прямой, параллельной оси симметрии эволюты. Поскольку в карте Пуанкаре асимптотические на бабочке задаются теми же уравнениями, что и эволюта меридиана, и метрика де Ситтера конформна псевдоевклидовой, эволюта меридиана может служить изображением асимптотической в карте Пуанкаре. Рассматриваемые углы являются монотонными функциями длины дуги асимптотической линии и эволюты меридиана соответственно. Значит, в метрике де Ситтера длина дуги NP косинусоиды равна длине дуги MT асимптотической от точки M до ребра возврата. Длина проекции дуги NP на орицикл $u^2 = 1$ в метрике де Ситтера равна длине этой проекции NK и в метрике де Ситтера, и в псевдоевклидовой метрике. Отсюда следует утверждение теоремы. $\square$

Следствие 1. Если M и T — две соответственные точки на меридиане (5) бабочки де Ситтера—Широкова и эволюте меридиана (4), то длина дуги асимптотической линии от точки M до ребра возврата поверхности равна длине дуги эволюты от точки возврата меридиана до точки T в метрике де Ситтера (3). Это позволяет так же, как и для псевдосферы Бельтрами—Миндинга, с помощью эволюты меридиана найти точки касания с ребром возврата асимптотических, проходящих через точку M на меридиане бабочки де Ситтера—Широкова, не проводя сами асимптотические линии.

Следствие 2. Длина дуги MN меридиана в псевдоевклидовой метрике $ds^2 = (du^1)^2 - (du^2)^2$ равна длине отрезка PK в метрике де Ситтера (3).

Оба следствия очевидны.

5. Асимптотические на воронке де Ситтера—Широкова. В трехмерном пространстве Минковского с метрикой

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (7)$$

рассмотрим поверхность

$$x^1 = \operatorname{sh} u \sin v, \quad x^2 = \operatorname{sh} u \cos v, \quad x^3 = \ln \operatorname{th} \frac{u}{2} + \operatorname{ch} u.$$

Эту поверхность будем называть *воронкой де Ситтера—Широкова*. Воронка де Ситтера—Широкова изометрична фактор-пространству идеальной области плоскости Лобачевского по действию дискретной группы Z орициклических вращений. Поскольку при действии группы орициклических вращений остается неподвижной точка на абсолюте, вследствие проективной двойственности при этом будет неподвижна полярная ей изотропная прямая. Она удаляется из идеальной области при рассматриваемой факторизации. Для этой поверхности псевдоевклидовы эволюты меридианов также можно связать с асимптотическими линиями. Асимптотические на воронке де Ситтера—Широкова определяются уравнением

$$-\operatorname{cth} u du^2 + \operatorname{ch} u \operatorname{sh} u dv^2 = 0; \quad (8)$$

в асимптотических координатах

$$x = \frac{1}{2} \ln \operatorname{th} \frac{u}{2} - \frac{v}{2}, \quad y = \frac{1}{2} \ln \operatorname{th} \frac{u}{2} + \frac{v}{2}.$$

Сетевой угол асимптотической сети $z = 2u = 4 \operatorname{arth} e^{x+y}$, понимаемый здесь, как и в предыдущем случае, как гиперболический угол, удовлетворяет уравнению $\sinh$ -Гордона:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \operatorname{sh} z. \quad (9)$$

Убедимся, что псевдоевклидовой эволютой профиля (начального меридиана) будет ветвь гиперболического синуса. Если на псевдоевклидовой плоскости с метрикой $ds^2 = (du^1)^2 - (du^2)^2$ кривая задана параметрическими уравнениями

$$u^1 = \ln \operatorname{th} \frac{t}{2} + \operatorname{ch} \frac{t}{2}, \quad u^2 = \operatorname{sh} t,$$

то ее псевдоевклидова эволюта будет иметь следующие параметрические уравнения:

$$u^1 = \ln \operatorname{th} \frac{t}{2}, \quad u^2 = -\frac{1}{\operatorname{sh} t}.$$

Отсюда $u^2 = \operatorname{sh} u^1$; для выбранной ветви меридиана $u^1 < 0$. Такими же уравнениями задаются асимптотические линии на этой поверхности в карте Пуанкаре. Действительно, перейдем к конформной карте Пуанкаре на псевдоевклидовой полуплоскости. Положив $u^1 = v$ и $u^2 = 1/\operatorname{sh} u$, получим:

$$x^1 = \frac{1}{u^2} \sin u^1, x^2 = \frac{1}{u^2} \cos u^1, x^3 = \frac{\sqrt{(u^2)^2 + 1}}{u^2 - \operatorname{arsinh} u^2}.$$

В новых локальных координатах индуцированная метрика на воронке де Ситтера—Широкова примет вид (3), вторая квадратичная форма поверхности — следующий вид:

$$\Pi = \frac{\sqrt{(u^2)^2 + 1}}{(u^2)^2} (du^1)^2 - \frac{1}{(u^2)^2 \sqrt{(u^2)^2 + 1}} (du^2)^2. \quad (10)$$

Отсюда получим выражение для асимптотических линий в конформной карте:

$$u^2 = \operatorname{sh}(c_1 + u^1), \quad u^2 = \operatorname{sh}(c_2 - u^1). \quad (11)$$

Для этой поверхности, как и для псевдосферы Бельтрами—Миндинга, имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Угол между асимптотической линией и меридианом воронки де Ситтера—Широкова равен углу между осью вращения и касательной к меридиану.

Доказательство. Это утверждение следует из наглядных геометрических соображений. Параметр u в уравнениях поверхности является углом между касательной к меридиану и осью вращения. Асимптотическая линия второго семейства симметрична относительно плоскости меридиана линии первого семейства. Во внутренней геометрии она симметрична относительно самого меридиана. Значит, сетевой угол $2u$ делится меридианом на две равные части. $\square$

Опираясь на эту лемму, аналогично теоремам 1 и 2 получим следующее утверждение.

Теорема 3. Длина дуги асимптотической (длина всего асимптотического луча, идущего из широкой части воронки де Ситтера—Широкова до выбранной точки) равна длине проекции соответствующей дуги эволюты на ось вращения поверхности.

Доказательство. В плоскости, проходящей через ось вращения воронки де Ситтера—Широкова, введем метрику де Ситтера, конформную псевдоевклидовой метрике, таким образом, чтобы ось вращения была абсолютном, а пространственно-подобная псевдоевклидова прямая $u^2 = 1$ изометрично отображалась на орицикл плоскости де Ситтера. Тогда модуль длины дуги линий $u^2 = \operatorname{sh} u^1$, $u^2 = -\operatorname{sh} u^1$, а также линий, получаемых (псевдо)евклидовыми переносами этих линий вдоль оси $u^2 = 0$, будет совпадать с длиной проекции этих линий на орицикл $u^2 = 1$. Переносы вдоль оси $u^2 = 0$ во внутренней геометрии плоскости де Ситтера моделируют орициклические вращения этой плоскости. Выберем ветвь меридиана, задаваемую в координатах u^1, u^2 уравнениями

$$u^1 = \ln \operatorname{th} \frac{t}{2} + \operatorname{ch} \frac{t}{2}, \quad u^2 = -\operatorname{sh} t,$$

В точке M меридиана воронки де Ситтера—Широкова, лежащего в рассматриваемой плоскости, проведем нормаль к меридиану (рис. 3). Эта нормаль будет времениподобной прямой на псевдоевклидовой плоскости с метрикой

$$ds^2 = (du^1)^2 - (du^2)^2, \quad (12)$$

а в метрике объемлющего псевдоевклидова пространства — пространственноподобной. Пусть P — точка пересечения этой нормали с псевдоевклидовой эволютой $u^2 = -\operatorname{sh} u^1$ меридиана. Пусть точка N имеет координаты $(0, 1)$, а NK является проекцией дуги OP на орицикл $u^2 = 1$. Тогда,

Рис. 3. Проекция дуги эволюты меридиана воронки де Ситтера—Широкова.

очевидно, параметр u^1 будет натуральным параметром на линии $u^2 = -\operatorname{sh} u^1$ в псевдоконформной метрике (3) плоскости де Ситтера. По построению псевдоевклидова длина отрезка NK в метрике (12) (и евклидова длина этого отрезка в метрике $ds^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2$) будет совпадать с псевдоевклидовой (и евклидовой) длиной отрезка OL , который является проекцией и отрезка NK , и дуги OP на прямую $u^2 = 0$. В метрике (7) объемлющего пространства ось вращения воронки де Ситтера—Широкова является времениподобной, как и асимптотические линии. Отсюда следует утверждение теоремы. $\square$

6. Заключительные замечания. Таким образом, несмотря на то, что эволюты меридианов воронки де Ситтера—Широкова и асимптотические линии на этой поверхности являются кривыми разных типов (эволюты пространственноподобны, а асимптотические времениподобны), связь между ними оказывается такой же, как и у двух других псевдосфер. У рассматриваемых псевдосфер евклидова и псевдоевклидова пространств есть масса других общих или аналогичных свойств. Поверхности вращения эволют их меридианов также обладают сходными свойствами: для псевдосферы в евклидовом пространстве — свойством минимальности, для псевдоевклидовой псевдосферы — максимальности (см. [13–15]). Сетевые углы для всех рассматриваемых здесь евклидовой и псевдоевклидовых псевдосфер можно связать с углами параллельности плоскости Лобачевского и ее идеальной области соответственно (см. [6]). Сами же асимптотические линии на бабочке и воронке де Ситтера—Широкова можно использовать для интерпретации мнимых асимптотических на псевдоевклидовом продолжении псевдосферы Бельтрами—Миндинга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Выгодский М. Я.* Дифференциальная геометрия. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.
2. *Галеева Р. Ф., Соколов Д. Д.* О геометрической интерпретации решений некоторых уравнений математической физики// в кн.: Исследования по теории поверхностей в римановых пространствах. — Л.: ЛГПИ, 1984. — С. 8–22.
3. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Т. 2. Поверхности в пространстве. Отображения и изгибания поверхностей. Специальные вопросы. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
4. *Костин А. В.* Регулярность асимптотических линий на псевдосферах де Ситтера// Междунар. конф. «Дни геометрии в Новосибирске–2012», посв. 100-летию со дня рождения А. Д. Александрова (Новосибирск, 30 августа — 1 сентября 2012 г.). — Новосибирск: Ин-т мат. им. С. Л. Соболева СО РАН, 2012. — С. 48–49.
5. *Костин А. В., Костина Н. Н.* Об эволютах некоторых кривых на псевдоевклидовой плоскости// Междунар. школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 5–11 сентября 2004 г.). — Ростов-на-Дону, 2004. — С. 34–35.
6. *Костин А. В., Костина Н. Н.* Об интерпретации асимптотических направлений// Междунар. школа-семинар. «Современная геометрия и ее приложения» (Казань, 27 ноября — 3 декабря 2017 г.). — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. — С. 75–76.
7. *Позняк Э. Г., Попов А. Г.* Геометрия уравнения $\sin$ -Гордона// в кн.: Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. — М.: ВИНТИ, 1991. — 23. — С. 99–130.
8. *Попов А. Г., Маевский Е. В.* Аналитические подходы к исследованию уравнения $\sin$ -Гордона// Совр. мат. прилож. — 2005. — 23. — С. 13–52.
9. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969.
10. *Широков П. А.* Интерпретация и метрика квадратичных геометрий// в кн.: Избранные работы по геометрии. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966. — С. 15–179.
11. *Chern S. S.* Geometrical interpretation of $\sinh$ -Gordon equation// Ann. Polon. Math. — 1981. — 39. — P. 63–69.
12. *Hesse L. O.* Über ein Übertragungsprinzip// J. Reine Angew. Math. — 1866. — 66. — P. 15–21.
13. *Imaizumi T.* Maximal surfaces with simple ends// Kyushi J. Math. — 2004. — 57. — P. 59–70.
14. *Kobayashi O.* Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkovski space L^3 // Tokyo J. Math. — 1983. — 6. — P. 297–309.
15. *Kobayashi O.* Maximal surfaces with conelike singularities// J. Math. Soc. Jpn. — 1984. — 36. — P. 609–617.

Костин Андрей Викторович
 Елабужский институт (филиал)
 Казанского (Приволжского) федерального университета
 E-mail: kostin_andrei@mail.ru