Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Костина, Н. Н. Костина, Метрические характеристики гиперболических многоугольников и многогранников, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 169, 31–38

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-169-31-38>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:06:46

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 169 (2019). С. 31–38
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-169-31-38

УДК 514.132, 515.124

МЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ И МНОГОГРАННИКОВ

© 2019 г. Е. А. КОСТИНА, Н. Н. КОСТИНА

Аннотация. В работе рассмотрены некоторые общие с евклидовыми и некоторые специфические свойства гиперболических многогранников. Исследована асимптотика метрических характеристик многогранников в n -мерном гиперболическом пространстве при изменении параметров многогранников, а также при стремлении размерности пространства к бесконечности; в частности, проведена оценка значений радиуса вписанной сферы многогранника и исследована его асимптотика. В связи с этим поставлена задача об оценке минимального числа граней описанного многогранника в n -мерном гиперболическом пространстве в зависимости от радиуса вписанной сферы. Рассмотрены также некоторые свойства гиперболических многоугольников, как принадлежащие абсолютной геометрии, так и только гиперболической.

Ключевые слова: пространство Лобачевского, гиперболическая тригонометрия, многоугольник, многогранник, сфера, симплекс.

METRIC CHARACTERISTICS OF HYPERBOLIC POLYGONS AND POLYHEDRA

© 2019 Е. А. KOSTINA, E. A. KOSTINA

ABSTRACT. In this paper, we consider some properties of hyperbolic polyhedra, both common with Euclidean and specific. Asymptotic behavior of metric characteristics of polyhedra in the n -dimensional hyperbolic space is examined in the cases where parameters of the polyhedra change and the dimension of the space unboundedly increases; in particular, the radius of the inscribed sphere of a polyhedron is estimated and its asymptotic behavior is obtained. In connection with this, the problem of estimating the minimal number of faces of the described polyhedron in the n -dimensional hyperbolic space depending on the radius of the inscribed sphere is posed. We also consider some properties of hyperbolic polygons, both belonging to absolute geometry and only hyperbolic.

Keywords and phrases: Lobachevsky space, hyperbolic trigonometry, polygon, polyhedron, sphere, simplex.

AMS Subject Classification: 51M10, 51M20

1. Введение. Вписанные многоугольники на гиперболической плоскости регулярно привлекают внимание различных исследователей (см., например, [12]). В первой четверти XX в. Т. Кубота (см. [14]) и П. А. Широков (см. [9]) независимо доказали теорему Птолемея на плоскости Лобачевского. П. А. Широков рассмотрел также различные варианты этой теоремы для четырехугольников, вписанных в орицикл и эквидистанту. Н. В. Абросимов и Л. А. Микайылова (см. [10]) доказали гиперболический аналог теоремы Кези (см. [11]), обобщающей теорему Птолемея. В [2] построена «точечная» интерпретация этой теоремы как теоремы о многоугольнике, вписанном в сферу неевклидова пространства. А. Д. Медных (см. [15]) доказал гиперболический аналог формулы Брахмагупты. Соотношения между сторонами, диагоналями, диаметром

описанной окружности на плоскости Лобачевского автоматически получаются из аналогичных евклидовых соотношений с использованием связи между длиной дуги и стягивающей ее хорды орицикла. Это использовали многие авторы при выводе теорем на гиперболической плоскости. Для многоугольников, вписанных в орицикл или эквидистанту, все утверждения требуют независимого доказательства. Существует множество критериев вписанности треугольников и четырехугольников на плоскости Лобачевского. Часть из них изложена в научной или научно-популярной литературе, другие распространяются в виде математического фольклора. «Линейные» критерии вписанности в циклы, т.е. критерии, в которых фигурируют длины сторон треугольника, приведены в работе П. В. Бибикова [17]. Критерий вписанности для четырехугольников в абсолютной геометрии, т.е. критерий, справедливый и в евклидовой геометрии, и в геометрии Лобачевского, имеется в работе Ф. В. Петрова [7]. Этот же критерий приведен в работе Л. Виммера [17]. Многоугольники, описанные около окружности гиперболической плоскости, значительно менее отражены в литературе. Существенным отличием от евклидовой плоскости является то, что на плоскости Лобачевского минимальное число сторон многоугольника, описанного около окружности, зависит от радиуса окружности. Аналогичное свойство имеет место для числа граней многогранника, описанного около сферы. Изучению метрических характеристик гиперболических многогранников посвящено большое число работ, значительная часть которых относится к вычислению объемов многогранников. Задачи такого типа рассматривали еще сами основатели гиперболической геометрии. Но имеются работы, хотя и мотивированные задачами вычисления объемов, но все-таки ориентированные на определение других метрических характеристик многогранников (см. [5]).

2. Основные результаты. 1. В теореме 1 найдены оценки для числа сторон описанного многоугольника на плоскости Лобачевского в зависимости от радиуса окружности.

2. В теореме 2 доказано общее свойство многоугольников в трех классических геометриях. Свойство сформулировано и доказано для плоских многоугольников, но оно остается справедливым и для пространственных многоугольников общего вида.

3. В теоремах 3–9 установлены асимптотические оценки для радиусов вписанных сфер и углов между гранями правильных многогранников в n -мерном гиперболическом пространстве.

3. Гиперболические многоугольники.

Теорема 1. *Радиус r окружности, вписанной в правильный n -угольник гиперболической плоскости кривизны K , может принимать значения от нуля до*

$$\frac{1}{\sqrt{-K}} \cdot \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}. \quad (1)$$

Как следствие, если радиус некоторой окружности больше или равен величине (1), то число сторон описанного около нее многоугольника, все вершины которого лежат в собственной области гиперболической плоскости, будет больше n .

Доказательство. Опишем около окружности достаточно малого радиуса на гиперболической плоскости правильный n -угольник и будем увеличивать радиус окружности до тех пор, пока стороны многоугольника не станут параллельными. Верхняя грань радиусов вписанных окружностей определяется значением, при котором угол π/n будет углом параллельности этого радиуса. Используя формулу Лобачевского для угла параллельности, получим

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} = e^{r \cdot \sqrt{-K}}. \quad (2)$$

Отсюда получаем, что максимальное значение радиуса равно (1). Если же радиус окружности больше указанного значения или равен ему, то центральный угол, опирающийся на сторону описанного многоугольника, будет меньше, чем $2\pi/n$. Следовательно, число сторон описанного многоугольника должно быть больше, чем n . $\square$

Очевидным следствием этой теоремы будет то, что радиус вписанной окружности любого описанного многоугольника, все вершины которого лежат в собственной области гиперболической плоскости, будет меньше, чем $\frac{1}{\sqrt{-K}} \cdot \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$.

Хорошо известно, что метрические свойства, характеризующие линейные и угловые величины гиперболических многоугольников, существенно отличаются от евклидовых. В частности, сумма углов треугольника и выпуклого многоугольника на плоскости Лобачевского зависит от линейных размеров. Несмотря на это, имеются соотношения (см. [4]), общие для этих геометрий и для геометрии на сфере, т.е. имеющие место во всех трех классических геометриях.

Теорема 2. Пусть $A_1 A_2 \dots A_n$ — произвольный многоугольник на плоскости Лобачевского, сфере или евклидовой плоскости, и перпендикуляры к прямым $A_k A_{k+1}$, $A_{n+1} = A_1$, восстановленные в точках M_k на этих прямых, пересекаются в точке M . Тогда имеют место равенства

$$\cos(A_1 M M_1) \cos(A_2 M M_2) \dots \cos(A_n M M_n) = \cos(A_2 M M_1) \cos(A_3 M M_2) \dots \cos(A_1 M M_n), \quad (3)$$

$$\sin(M A_1 A_2) \sin(M A_2 A_3) \dots \sin(M A_n A_1) = \sin(M A_2 A_1) \sin(M A_3 A_2) \dots \sin(M A_1 A_n). \quad (4)$$

Доказательство. I. На евклидовой плоскости оба соотношения могут быть доказаны следующим образом. Мы исключаем из рассмотрения только те случаи, когда описываемые углы не определены. Для доказательства первого соотношения выразим длины перпендикуляров к прямым, содержащим стороны многоугольника, двумя способами:

$$M M_k = M A_k \cos(A_k M M_k) = M A_k \cos(A_{k+1} M M_k), \quad (5)$$

где $A_{n+1} = A_1$. Перемножив n равенств, получим требуемое соотношение. Для доказательства второго соотношения можно либо перемножить n аналогичных равенств

$$M M_k = M A_k \sin(M A_k M_k) = M A_k \sin(M A_{k+1} M_k), \quad (6)$$

с учетом того, что $\sin(M A_k M_k) = \sin(M A_k A_{k+1})$, либо считать его следствием первого в силу постоянства суммы углов треугольника. Первый подход предпочтительней тем, что может быть применен и в других пространствах постоянной кривизны.

II. На плоскости Лобачевского перпендикуляры к сторонам многоугольника могут принадлежать пучкам трех разных типов. Если перпендикуляры принадлежат эллиптическому пучку, т.е. пересекаются в точке собственной области плоскости Лобачевского, то можно по аналогии с евклидовой плоскостью воспользоваться следующими связями катета a и гипотенузы c гиперболического треугольника:

$$\operatorname{sh} \frac{a}{\rho} = \operatorname{sh} \frac{c}{\rho} \sin A, \quad \operatorname{th} \frac{a}{\rho} = \operatorname{th} \frac{c}{\rho} \cos B. \quad (7)$$

Выразим двумя способами в первом случае приведенные гиперболические тангенсы перпендикуляров $M M_k$:

$$\operatorname{th} \frac{M M_k}{\rho} = \operatorname{th} \frac{M A_k}{\rho} \cos(A_k M M_k) = \operatorname{th} \frac{M A_k}{\rho} \cos(A_{k+1} M M_k), \quad (8)$$

во втором случае — приведенные гиперболические синусы:

$$\operatorname{sh} \frac{M M_k}{\rho} = \operatorname{sh} \frac{M A_k}{\rho} \sin(M A_k M_k) = \operatorname{sh} \frac{M A_k}{\rho} \sin(M A_{k+1} M_k), \quad (9)$$

аналогично тому, как это делали в п. I, получим оба соотношения.

Устремляя точку M к бесконечности, получим, что эти равенства остаются в силе и в том случае, когда перпендикуляры к прямым, содержащим стороны многоугольника, принадлежат пучку параллельных прямых. Первое равенство при этом становится тривиальным тождеством, так как фигурирующие в нем величины углов становятся равными нулю.

Пусть теперь перпендикуляры к прямым, содержащим стороны многоугольника, принадлежат гиперболическому пучку, т.е. пучку перпендикуляров к некоторой прямой плоскости Лобачевского. Центр пучка при этом будет находиться в идеальной области плоскости Лобачевского. Оставаясь в рамках собственной области, можно рассматривать только второе из соотношений

теоремы. Приведем первоначально доказательство этого соотношения. Введем следующие обозначения. Пусть прямая m — полярна точки M . Эта полярна является общим перпендикуляром прямых $M_k M$. Пусть $\tilde{A}_k, \tilde{M}_k$ — точки пересечения с прямой m прямых $A_k M$ и $M_k M$ соответственно. Четырехугольники $A_k M_k \tilde{M}_k \tilde{A}_k$ и $A_{k+1} M_k \tilde{M}_k \tilde{A}_{k+1}$ имеют по три прямых угла, т.е. являются трипрямоугольниками. Геометрия трипрямоугольников подробно описана в книге Н. М. Несторовича [6]. Запишем для указанных трипрямоугольников следующие соотношения:

$$\operatorname{ch} \frac{M_k \tilde{M}_k}{\rho} = \operatorname{ch} \frac{A_k \tilde{A}_k}{\rho} \sin(\tilde{A}_k A_k M_k), \quad (10)$$

$$\operatorname{ch} \frac{M_k \tilde{M}_k}{\rho} = \operatorname{ch} \frac{A_{k+1} \tilde{A}_{k+1}}{\rho} \sin(\tilde{A}_{k+1} A_{k+1} M_k). \quad (11)$$

Здесь $\rho = 1/\sqrt{-K}$. Приравняв правые части и перемножив n таких равенств, получим требуемое соотношение, учитывая, что угол $\tilde{A}_k A_k M_k$ совпадает с углом $M A_k A_{k+1}$, а угол $\tilde{A}_{k+1} A_{k+1} M_k$ — с углом $M A_{k+1} A_k$.

Приступим теперь к доказательству первого соотношения. Так как прямые $A_k M$, $M_k M$ для всех значений k от 1 до n принадлежат пучку расходящихся прямых, углы между ними в собственной области являются мнимыми. Эти мнимые углы в силу известного соотношения $\cos(ix) = \operatorname{ch}(x)$ можно заменить вещественными углами между рассматриваемыми прямыми в идеальной области плоскости Лобачевского. Последние углы, в свою очередь, можно заменить расстояниями на поляре центра пучка в силу равенства соответствующих двойных отношений прямых в пучке и точек на поляре. А это последнее соотношение превратится в следующее соотношение:

$$\prod_{k=1}^n \operatorname{ch} \frac{\tilde{A}_k \tilde{M}_k}{\rho} = \prod_{k=1}^n \operatorname{ch} \frac{\tilde{M}_k \tilde{A}_{k+1}}{\rho}, \quad (12)$$

с учетом замены обозначений совпадающее с основным соотношением из статьи [13] для вырожденного многоугольника, все вершины которого лежат на одной прямой на плоскости Лобачевского кривизны $K = -1/\rho^2$.

III. В сферической геометрии рассмотренные формулы также справедливы для всех случаев расположения точки M , в том числе в тех случаях, когда точка M является полюсом геодезической, содержащей какую-либо сторону. Связи между катетами и гипотенузами аналогичны гиперболическим, только гиперболические функции заменяются тригонометрическими:

$$\sin \frac{a}{R} = \sin \frac{c}{R} \sin A, \quad \operatorname{tg} \frac{a}{R} = \operatorname{tg} \frac{c}{R} \cos B. \quad (13)$$

Для доказательства первого соотношения выражаются тангенсы приведенных длин перпендикуляров к геодезическим, содержащим стороны многоугольника, двумя способами. Получим n равенств:

$$\operatorname{tg} \frac{M M_k}{R} = \operatorname{tg} \frac{M A_k}{R} \cos(A_k M M_k) = \operatorname{tg} \frac{M A_k}{R} \cos(A_{k+1} M M_k), \quad (14)$$

где $i = 1, \dots, n$. Перемножив их, получим первое соотношение.

Для доказательства второго соотношения аналогичным образом выразим синусы приведенных длин отрезков $M M_k$:

$$\sin \frac{M M_k}{R} = \sin \frac{M A_k}{R} \sin(M A_k M_k) = \sin \frac{M A_k}{R} \sin(M A_{k+1} M_k), \quad (15)$$

где также $i = 1, \dots, n$. Перемножив их, получим второе соотношение. $\square$

Замечание 1. Соотношения, связывающие величины углов между пересекающимися прямыми в собственной области плоскости Лобачевского из этой теоремы, можно интерпретировать как соотношения, связывающие приведенные расстояния между точками (расстояния, деленные на радиус кривизны) в идеальной области плоскости Лобачевского. В соответствии с этим первое соотношение можно трактовать как соотношение, связывающее косинусы приведенных расстояний между точками, лежащими на одной эллиптической прямой идеальной области плоскости Лобачевского.

4. Гиперболические симплексы. Радиусы вписанных сфер гиперболических симплексов также ограничены сверху. Верхняя грань радиусов определяется радиусом правильного симплекса, все вершины которого являются бесконечно удаленными точками гиперболического пространства.

Теорема 3. *Радиус описанной сферы R_{n-1} , радиус вписанной сферы r_{n-1} и длина ребра a правильного гиперболического симплекса связаны следующими соотношениями:*

$$R_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{-K}} \cdot \operatorname{arsh} \left(\sqrt{\frac{2n}{n+1}} \cdot \operatorname{sh} \frac{a\sqrt{-K}}{2} \right), \quad (16)$$

$$r_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{-K}} \cdot \operatorname{arth} \left(\frac{1}{n} \cdot \operatorname{th} (R_{n-1} \sqrt{-K}) \right), \quad (17)$$

$$r_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{-K}} \cdot \operatorname{arth} \frac{\frac{1}{n} \sqrt{\frac{2n}{n+1}} \cdot \operatorname{sh} \frac{a\sqrt{-K}}{2}}{\sqrt{1 + \frac{2n}{n+1} \cdot \operatorname{sh}^2 \frac{a\sqrt{-K}}{2}}}. \quad (18)$$

Доказательство. Углы между прямыми, проходящими через центр правильного гиперболического симплекса и вершины, и прямыми, проходящими через центр симплекса и центры граней любой размерности, совпадают с соответствующими углами в правильном евклидовом симплексе. Используя это, первое соотношение получим как следствие теоремы синусов для гиперболической плоскости, второе — как следствие формулы, связывающей катет, гипотенузу и прилежащий угол гиперболического треугольника, а третье — как следствие двух первых соотношений. $\square$

Некоторые метрические характеристики евклидова n -мерного симплекса, которые можно использовать для нахождения углов гиперболического симплекса, имеются в монографии Б. А. Розенфельда [8].

Отсюда уже нетрудно получить асимптотические оценки для радиуса сферы, вписанной в гиперболический симплекс. Нас будет интересовать асимптотика двух видов:

- (2) при постоянстве размерности и стремлении линейных размеров симплекса к бесконечности,
- (2) при стремлении к бесконечности размерности пространства.

Теорема 4. *Радиус r_{n-1} вписанной сферы правильного гиперболического n -симплекса, все вершины которого лежат в собственной области гиперболического пространства, может принимать значения от нуля до*

$$\frac{1}{\sqrt{-K}} \cdot \operatorname{arth} \frac{1}{n}. \quad (19)$$

При стремлении размерности пространства к бесконечности радиус вписанной сферы симплекса будет асимптотически эквивалентен нулю.

Доказательство. Это утверждение является следствием теоремы 3. Для доказательства первой части утверждения достаточно либо во второй формуле теоремы устремить к бесконечности радиус R_{n-1} описанной сферы, либо в третьей формуле устремить к бесконечности длину ребра a . Вторая часть утверждения непосредственно следует из первой. $\square$

Замечание 2. Радиусы вписанных (гипер)сфер всех n -симплексов, все вершины которых лежат в собственной области гиперболического пространства, будут меньше, чем $\operatorname{arth}(1/n)/\sqrt{-K}$. По аналогии с теоремой 3 отсюда получим, что если радиус $(n-1)$ -сферы n -мерного гиперболического пространства больше или равен $\operatorname{arth}(1/n)/\sqrt{-K}$, то число $(n-1)$ -мерных граней описанного около нее многогранника, все вершины которого лежат в собственной области гиперболического пространства, будет больше, чем $n+1$.

В любой фиксированной размерности с увеличением длины ребра правильного гиперболического n -симплекса уменьшаются углы между гипергранями и вообще между смежными k -гранями. Но с ростом размерности этот «люфт» угла между гранями уменьшается.

Теорема 5. *Грани правильного гиперболического n -симплекса при стремлении размерности n пространства к бесконечности асимптотически ортогональны.*

Доказательство. Угол между гипергранями правильного гиперболического n -симплекса ограничен сверху углом между гипергранями правильного евклидова n -симплекса. К этому значению угол между гипергранями правильного гиперболического n -симплекса стремится при стремлении длины ребра к нулю. При стремлении длины ребра к бесконечности угол между гипергранями правильного гиперболического n -симплекса стремится к углу между гипергранями правильного евклидова $(n - 1)$ -симплекса. Это следует, например, из того, что в пределе прямые, содержащие смежные ребра n -симплекса, станут параллельными. Пересечением гиперорисферы с несобственным центром в бесконечно удаленной вершине n -симплекса с этим n -симплексом во внутренней (евклидовой) геометрии гиперорисферы будет правильный евклидов $(n - 1)$ -симплекс. Угол между его $(n - 2)$ -гранями будет совпадать с углом между $(n - 1)$ -гранями правильного гиперболического n -симплекса с бесконечно удаленными вершинами. Поскольку косинус угла между гипергранями правильного евклидова n -симплекса равен $1/n$ (см., например, [16]), величина угла ϕ между гипергранями правильного гиперболического n -симплекса, все вершины которого являются собственными точками n -мерного пространства Лобачевского, удовлетворяет двойному неравенству

$$\arccos \frac{1}{n-1} < \phi < \arccos \frac{1}{n}. \quad (20)$$

Отсюда следует, что при стремлении n к бесконечности величина угла ϕ стремится к $\pi/2$. $\square$

Замечание 3. Очевидным следствием этой теоремы является то, что свойство асимптотической ортогональности граней правильного n -симплекса при стремлении размерности пространства n к бесконечности принадлежит абсолютной геометрии.

5. Гиперболические кубы.

Теорема 6. *Радиусы r_{n-1} вписанных сфер гиперболических n -мерных кубов, все вершины которых лежат в собственной области гиперболического пространства, могут принимать значения от нуля до*

$$\frac{1}{\sqrt{-K}} \cdot \operatorname{arth} \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (21)$$

При стремлении размерности пространства к бесконечности радиусы вписанных сфер гиперболических кубов будут асимптотически эквивалентны нулю.

Доказательство. Достаточно связать радиус вписанной сферы куба с радиусом описанной сферы и устремить последний к бесконечности. Косинус угла между прямыми, проходящими через центр гиперболического куба и вершины, и прямыми, проходящими через центр куба и центры гиперграней, очевидно, равен $1/\sqrt{n}$, так как этот угол совпадает с аналогичным углом у евклидова куба. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой R_{n-1} и катетом r_{n-1} имеем:

$$\operatorname{th}(\sqrt{-K}r_{n-1}) = \operatorname{th}(\sqrt{-K}R_{n-1}) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (22)$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $R_{n-1} \rightarrow \infty$, получим утверждение теоремы. $\square$

Величина угла между гипергранями гиперболического n -мерного куба сверху ограничена величиной угла между гипергранями евклидова куба, а снизу — величиной угла между гипергранями евклидова $(n - 1)$ -мерного симплекса. Следовательно, величина угла α между гипергранями n -мерного гиперболического куба удовлетворяет условию

$$\arccos \frac{1}{n-1} < \alpha < \frac{\pi}{2}. \quad (23)$$

Это обстоятельство является причиной того факта, что замощение гиперболического пространства кубами возможно только в малых размерностях.

Теорема 7. *Грани гиперболического n -мерного куба при $n \rightarrow \infty$ асимптотически ортогональны.*

Доказательство. Это утверждение следует из формулы (23). $\square$

Замечание 4. Вследствие того, что грани евклидова куба ортогональны во всех размерностях, свойство асимптотической ортогональности граней при стремлении размерности пространства к бесконечности также принадлежит абсолютной геометрии.

6. Гиперболические ортоплексы. К правильным многогранникам, наряду с симплексами и кубами, имеющимся во всех размерностях, относятся ортоплексы. Ортоплекс — многогранник, двойственный кубу (другие названия этого многогранника — кросс-политоп, кокуб, гипероктаэдр, n -крест). Конструктивно его можно определить, взяв в качестве вершин центры $(n - 1)$ -мерных граней куба. Любопытным фактом является то, что в гиперболическом пространстве верхняя грань радиусов вписанных сфер ортоплекса совпадает с верхней гранью радиусов вписанных сфер куба.

Теорема 8. *Радиусы вписанных сфер r_{n-1} гиперболических n -мерных ортоплексов, все вершины которых лежат в собственной области гиперболического пространства, могут принимать значения от нуля до*

$$\frac{1}{\sqrt{-K}} \cdot \operatorname{arth} \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (24)$$

При стремлении размерности пространства к бесконечности радиус вписанной сферы любого гиперболического ортоплекса будет асимптотически эквивалентен нулю.

Доказательство. Свяжем радиус вписанной сферы ортоплекса с радиусом описанной сферы и устремим последний к бесконечности. Углы между прямыми, проходящими через центр гиперболического куба и вершины, и прямыми, проходящими через центр куба и центры гиперграней, совпадают с соответствующими углами двойственного ему ортоплекса. Следовательно, для ортоплекса также будет выполняться соотношение

$$\operatorname{th}(\sqrt{-K}r_{n-1}) = \operatorname{th}(\sqrt{-K}R_{n-1}) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (25)$$

Переходя в этой формуле к пределу при $R_{n-1} \rightarrow \infty$, получим утверждение теоремы. $\square$

Для всех типов правильных многогранников пространства Лобачевского верхняя грань радиусов вписанных гиперсфер определяется радиусами гиперсфер, вписанных в многогранники с бесконечно удаленными вершинами. Ребра их лежат на параллельных прямых гиперболического пространства.

Аналогично предыдущим теоремам получим асимптотическую оценку для угла между гипергранями ортоплекса в гиперболических пространствах.

Теорема 9. *Величина угла между гипергранями ортоплекса в n -мерном пространстве Лобачевского при $n \rightarrow \infty$ асимптотически эквивалентна π .*

Это утверждение также принадлежит абсолютной геометрии.

7. Открытые проблемы.

1. Если радиус сферы S^{n-1} в n -мерном гиперболическом пространстве меньше, чем $\operatorname{arth}(1/n)/\sqrt{-K}$, то вокруг нее можно описать n -симплекс.

Описанный симплекс минимального объема, очевидно, будет правильным, как и в евклидовом пространстве. Но в гиперболическом пространстве объемы собственных многогранников ограничены сверху. Какова верхняя грань объемов описанных около этой сферы симплексов, и объемы каких симплексов определяют эту верхнюю грань? Заметим, что в двумерном случае эта задача может быть решена средствами элементарной гиперболической геометрии.

2. Если радиус сферы S^{n-1} в n -мерном гиперболическом пространстве больше, чем $\operatorname{arth}(1/n)/\sqrt{-K}$, то $(n + 1)$ -гранник около нее описать нельзя. Каким будет минимальное число гиперграней описанного многогранника в зависимости от радиуса сферы? Даже в трехмерном

пространстве Лобачевского простые оценки можно получить только для радиусов сфер, описанные многогранники которых имеют малое число граней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибииков П. И. Описанные циклические линии треугольника в геометрии Лобачевского// Мат. просв. Сер. 3. — 2009. — 13. — С. 142–148.
2. Костин А. В., Костина Н. Н. Интерпретации теоремы Кези и ее гиперболического аналога// Сиб. электр. мат. изв. — 2016. — 13. — С. 242–251.
3. Костина Е. А., Костина Н. Н. Асимптотические оценки метрических характеристик многогранников в n -мерном гиперболическом пространстве// Дни геометрии в Новосибирске–2018 (Новосибирск, 19–22 сентября 2018 г.). — Новосибирск: Ин-т мат. им. С. Л. Соболева СО РАН, 2018. — С. 54.
4. Костина Н. Н., Костина Е. А. Общие свойства многоугольников в пространствах постоянной кривизны// Дни геометрии в Новосибирске–2014. Междунар. конф., посв. 85-летию академика Ю. Г. Решетняка (Новосибирск, 24–27 сентября 2014 г.). — Новосибирск: Ин-т мат. им. С. Л. Соболева СО РАН, 2014. — С. 42.
5. Медных А. Д., Пашкевич М. Г. Элементарные формулы для гиперболического тетраэдра// Сиб. мат. ж. — 2006. — 47, № 4. — С. 831–841.
6. Несторович Н. М. Геометрические построения в плоскости Лобачевского. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
7. Петров Ф. В. Вписанные четырехугольники и трапеции в абсолютной геометрии// Мат. просв. Сер. 3. — 2009. — 13. — С. 149–154.
8. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. — М.: Наука, 1966.
9. Широков П. А. Этюды по геометрии Лобачевского// Изв. физ.-мат. о-ва КГУ. Сер. 2. — 1924. — 24, № 1. — С. 26–32.
10. Abrosimov N. V., Mikaiylova L. A. Casey's theorem in hyperbolic geometry// Сиб. электр. мат. изв. — 2015. — 12. — С. 354–360.
11. Casey J. A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid Containing an Easy Introduction to Modern Geometry, with Numerous Examples. — Dublin: Hodges, Figgis and Co., 1888.
12. DeBlois J. The geometry of cyclic hyperbolic polygons// Rocky Mount. J. Math. — 2016. — 46, № 3. — P. 801–862.
13. Kostin A. V., Sabitov I. Kh. Smarandache theorem in hyperbolic geometry// J. Math. Phys. Anal. Geom. — 2014. — 10, № 2. — P. 221–232.
14. Kubota T. On the extended Ptolemy's theorem in hyperbolic geometry// Sci. Repts. Tohoku Univ. Ser. 1. Phys. Chem. Astr. — 1912. — 2. — P. 131–156.
15. Mednykh A. D. Brahmagupta formula for cyclic quadrilaterals in the hyperbolic plane// Сиб. электр. мат. изв. — 2012. — 9. — С. 247–255.
16. Parks H. R., Wills D. C. An elementary calculation of the dihedral angle of the regular n -simplex// Am. Math. Month. — 2002. — 109 (8). — P. 756–758.
17. Wimmer L. Cyclic polygons in non-Euclidean geometry// Element. Math. — 2011. — 66. — P. 74–82.

Костина Евгения Андреевна

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: kostina.evgeniia@gmail.com

Костина Наталья Николаевна

Елабужский институт (филиал)

Казанского (Приволжского) федерального университета

E-mail: natnikost@mail.ru