Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Степанов, И. И. Цыганок, О лапласиане Лихнеровича, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 169, 67–74

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-169-67-74>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:16:20

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 169 (2019). С. 67–74
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-169-67-74

УДК 514.764.2

О ЛАПЛАСИАНЕ ЛИХНЕРОВИЧА

© 2019 г. С. Е. СТЕПАНОВ, И. И. ЦЫГАНОК

Аннотация. В настоящей статье мы изучаем геометрию ядра лапласиана Лихнеровича в случае полного и, в частности, компактного римановых многообразий, а также даем оценку снизу его собственных значений на компактном римановом многообразии с ограниченным снизу оператором кривизны и оценку сверху его собственных значений на компактном римановом многообразии с ограниченной снизу кривизной Риччи. При этом лапласиан Лихнеровича мы задаем на пространстве гладких сечений расслоения ковариантных тензоров, как того требует его оригинальное определение; это отличает наши результаты от полученных ранее.

Ключевые слова: риманово многообразие, ковариантный тензор, лапласиан Лихнеровича, ядро лапласиана, собственное значение лапласиана.

ON THE LICHNEROVICZ LAPLACIAN

© 2019 S. E. STEPANOV, I. I. TSYGANOK

ABSTRACT. In this paper, we study the geometry of the kernel of the Lichnerovicz Laplacian in the case of complete and, in particular, compact Riemannian manifolds, and also propose a lower estimate of its eigenvalues on a compact Riemannian manifold with the curvature operator bounded from below and an upper estimate of its eigenvalues on a compact Riemannian manifold with the Ricci curvature bounded from below. We define the Lichnerovicz Laplacian on the space of smooth sections of the bundle of covariant tensors as is required by its original definition; this distinguishes our results from results obtained earlier.

Keywords and phrases: Riemannian manifold, covariant tensor, Lichnerovicz Laplacian, kernel of the Laplacian, eigenvalue of the Laplacian.

AMS Subject Classification: 53C20; 35J91

1. Введение. На n -мерном ($n \geq 2$) римановом многообразии (M, g) можно определить ряд дифференциальных операторов, связанных с тензорным полем g , которые дают информацию о геометрии многообразия (M, g) . Особую роль играют лапласианы, допускающие *разложение Вейценбека* (см. [1, пп. 1.136, 1.137, 1.140]). К их числу относится и известный *лапласиан Лихнеровича* Δ_L , который согласно определению (см. [22], [1, п. 1.143]) задается на пространстве гладких сечений расслоения ковариантных p -тензоров ($p \geq 1$) на многообразии (M, g) . Тематика исследований, связанная с лапласианом Лихнеровича, актуальна и в настоящее время, в подтверждение чего приведем защищенные в последнее время за рубежом диссертации [12, 20, 26], а также статьи и монографии с результатами, связанными с приложениями лапласиана Лихнеровича к общей теории относительности (см., например, [14, 17]), теории *устойчивости эйнштейновых структур* (см., например, [1, гл. 12; § Н] и [21]) и *потокам Риччи* (см., например, [11, с. 112]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00756-а).

Во всех статьях областью определения лапласиана Лихнеровича служат пространства гладких сечений симметрических и, в частности, симметрических бесследовых 2-тензоров. В частности, спектральная теория для лапласиана Лихнеровича нашла отражение только для случая симметрических p -тензоров и, в частности, симметрических бесследовых 2-тензоров (см. [6, 7]). Теорем о свойствах лапласиана Лихнеровича, заданного на пространстве гладких сечений расслоения ковариантных p -тензоров ($p \geq 1$) на многообразии (M, g) , как того требует определение, немного. К этим теоремам можно отнести, два утверждения из [23, с. 104-105] о произвольных лапласианах, допускающих разложение Вейценбека. Согласно первому на римановом многообразии не существует отличного от нуля тензорного поля, которое, в частности, принадлежит ядру $\text{Ker } \Delta_L$ лапласиана Лихнеровича Δ_L и имеет в некоторой точке нуль бесконечного порядка. Второе утверждает, что $\dim L^{2q} \text{Ker } \Delta_L < +\infty$ при наличии на многообразии удовлетворяющего специальному условию оператора Шредингера. К этому утверждению примыкает и доказанная в [24, с. 346] теорема об оценке сверху размерности ядра лапласиана Лихнеровича Δ_L , заданного на пространстве гладких сечений расслоения ковариантных p -тензоров ($p \geq 1$) на компактном римановом многообразии с ограниченным снизу оператором кривизны.

В настоящей статье мы изучим геометрию ядра лапласиана Лихнеровича в случае полного и, в частности, компактного римановых многообразий, а также получим оценку снизу его собственных значений на компактном римановом многообразии с ограниченным снизу оператором кривизны и оценку сверху его собственных значений на компактном римановом многообразии с ограниченной снизу кривизной Риччи. При этом лапласиан Лихнеровича будем рассматривать заданным на пространстве гладких сечений расслоения ковариантных p -тензоров ($p \geq 1$) на многообразии (M, g) , как того требует определение, что будет отличать наши результаты от ранее полученных. Если же область определения лапласиана Лихнеровича Δ_L ограничить расслоением внешних дифференциальных форм, то Δ_L станет хорошо известным лапласианом Ходжа—де Рама Δ_H (см. [24, с. 347]), а потому доказываемые в данной статье теоремы можно рассматривать как обобщение классических результатов о гармонических формах и оценке его собственных значений.

2. Определения и обозначения. Пусть (M, g) — n -мерное ($n \geq 2$) риманово многообразие со связностью Леви-Чивита ∇ . Для любой точки $x \in M$ невырожденная квадратичная форма g_x определяет канонический изоморфизм $T_x M \rightarrow T_x^* M$, позволяющий нам сосредоточиться на расслоении

$$T^{(p,0)} M := \bigotimes^p T^* M$$

ковариантных p -тензоров ($p \geq 0$) на M . Обозначим через $\Lambda^p M$ и $S^p M$ два его подрасслоения: подрасслоения кососимметрических и симметрических p -тензоров. Метрика в расслоении $T^{(p,0)} M$ задается послойно, при этом в каждом $T_x^{(p,0)} M$ мы будем обозначать ее также через g_x . Произведение $g(T, T')$ гладких сечений T и T' расслоения $T^{(p,0)} M$ будет гладкой функцией на M . Ассоциируем с пространством гладких сечений $C^\infty(\bigotimes^p T^* M)$ расслоения $T^{(p,0)} M$ гильбертово пространство с L^2 -произведением

$$\langle \phi, \phi' \rangle = \int_M g(T, T')_x d \text{vol}_g. \quad (1)$$

Лапласианом Лихнеровича Δ_L называется эллиптический дифференциальный оператор на пространстве гладких сечений $C^\infty T^{(p,0)} M$ расслоения $T^{(p,0)} M$, задаваемый с помощью следующего разложения Вейценбека (см. [1, п. 1.143], [22, с. 27]):

$$\Delta_L = \bar{\Delta} + \mathfrak{R}_p, \quad (2)$$

где $\bar{\Delta} = -\text{trace } \nabla^2$ — грубый лапласиан (Бохнера) и $\mathfrak{R}_p$ — оператор кривизны Вейценбека (см. [1, шп. 1.136, 1.142, 1.143], [17, с. 344], [23, с. 104]), который в локальных координатах $x^1, \dots, x^n$

задается равенствами

$$(\mathfrak{R}_p(T))_{i_1 \dots i_p} = \sum_a R_{i_a j} T_{i_1 \dots \overset{j}{\dots} i_p} - 2 \sum_{a < b} R_{j i_a k i_b} T_{i_1 \dots \overset{j}{\dots} \overset{k}{\dots} i_p} \quad (3)$$

для локальных компонент $T_{i_1 \dots i_p}$, R_{ij} и R_{ijkl} произвольного тензора $T \in C^\infty T^{(p,0)}M$, тензора Риччи Ric и тензора кривизны R многообразия (M, g) . При этом справедливо равенство

$$g(\mathfrak{R}_p(T), T') = g(\mathfrak{R}_p(T'), T)$$

для произвольных $T, T' \in T^{(p,0)}M$ (см. [22, с. 27]). В частном случае, когда $p = 1$, имеем $\mathfrak{R}_1 = \text{Ric}$, и лапласиан Лихнеровича будет *лапласианом Ходжа—де Рама* $\Delta_H = \bar{\Delta} + \text{Ric}$, заданным на 1-формах (см. [23, с. 344]). Для $p = 0$ лапласиан Δ_L становится обычным лапласианом

$$\Delta = -\text{div} \circ \text{grad}$$

на C^2 -функциях.

Замечание 1. В монографии [24, с. 344] оператор Лихнеровича определяется равенством $\Delta_L = \bar{\Delta} + c\mathfrak{R}_p$ для некоторой постоянной $c > 0$.

В соответствии с общей теорией (см., например, [23, с. 104]) сечение $T \in C^\infty T^{(p,0)}M$ назовем Δ_L -гармоническим для Δ_L , если $\Delta_L T = 0$. Определим векторные пространства

$$\begin{aligned} \text{Ker } \Delta_L &= \left\{ T \in C^\infty T^{(p,0)}M : \Delta_L T = 0 \right\}, \\ L^{2q} \text{Ker } \Delta_L &= \left\{ T \in \text{Ker } \Delta_L : \|T\|^2 \in L^q(M) \right\}. \end{aligned}$$

В локальных координатах $x^1, \dots, x^n$ условие $\Delta_L T = \bar{\Delta} T + \mathfrak{R}_p(T) = 0$ представляет собою систему из p эллиптических дифференциальных уравнений на $T \in C^\infty T^{(p,0)}M$. При этом на компактном многообразии (M, g) размерность ядра $\text{Ker } \Delta_L$ конечна, и справедливо ортогональное относительно произведения (1) разложение (см. [1, приложение, § I]; [24, с. 359; 360])

$$C^\infty T^{(p,0)}M = \text{Ker } \Delta_L \oplus \text{Im } \Delta_L. \quad (4)$$

В частном случае, когда ядро $\text{Ker } \Delta_L$ будет тривиальным на компактном многообразии (M, g) , согласно (4) векторное пространство $C^\infty T^{(p,0)}M$ будет состоять из таких сечений $T \in C^\infty T^{(p,0)}M$, что $T = \Delta_L T'$ для некоторого $T' \in C^\infty T^{(p,0)}M$.

3. Ядро лапласиана Лихнеровича. На основании (2) непосредственными вычислениями получаем *формулу Бохнера—Вейценбека*

$$\frac{1}{2} \Delta_B \|T\|^2 = -g(\bar{\Delta} T, T) + \|\nabla T\|^2 = -g(\Delta_L T, T) + g(\mathfrak{R}_p(T), T) + \|\nabla T\|^2, \quad (5)$$

где $\Delta_B = \text{div} \circ \text{grad}$ — *лапласиан Бельтрами*. Здесь согласно [24, с. 346] имеем

$$g(\mathfrak{R}_p(T_x), T_x) = \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha} \|\Xi_{\alpha} T_x\|^2 \quad (6)$$

для ортонормированного базиса Ξ_{α} из собственных векторов *оператора кривизны* $\bar{R}$, т.е. $\bar{R}(\Xi_{\alpha}) = \Lambda_{\alpha} \Xi_{\alpha}$ в произвольной точке $x \in M$.

Замечание 2. Стандартный оператор кривизны (см. [24, с. 83]) риманова многообразия (M, g) является алгебраическим симметрическим оператором $\bar{R} : \Lambda_x^2 M \rightarrow \Lambda_x^2 M$, который задается в произвольной точке $x \in M$ равенством

$$g(\bar{R}(X \wedge Y), Z \wedge W) = g(R(X, Y)W, Z)$$

для произвольных $X, Y, Z, W \in T_x M$ и тензора кривизны R многообразия (M, g) . О приложениях оператора кривизны см., например, [24, с. 351, 353, 390], а также [5, 16, 25].

Лемма 1. Пусть $\Delta_L : C^\infty T^{(p,0)}M \rightarrow C^\infty T^{(p,0)}M$ — лапласиан Лихнеровича ($p \geq 2$), заданный в связной открытой области U риманова многообразия (M, g) , где в каждой точке оператор кривизны $\bar{R} : \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$ является неотрицательно определенным. Если в каждой точке области U тензорное поле T принадлежит ядру лапласиана Лихнеровича, т.е. $T \in \text{Ker } \Delta_L$, и при этом скалярная функция $\|T\|^2$ достигает локального максимума в некоторой точке этой области, то $\|T\|^2$ является постоянной функцией и $\nabla T = 0$. Кроме того, если $\bar{R} \geq k > 0$ в некоторой точке $x \in U$, то T будет тождественным нулем в этой области.

Доказательство. Пусть T — гладкое тензорное поле в каждой точке связной открытой области U риманова многообразия (M, g) и $T \in \text{Ker } \Delta_L$; тогда из (5) следует

$$\frac{1}{2} \Delta_B \|T\|^2 = g(\mathfrak{R}_p(T), T) + \|\nabla T\|^2. \quad (7)$$

Предположим, что $\bar{R} \geq 0$ в области U ; тогда на основании (6) заключаем, что

$$g(\mathfrak{R}_p(T), T) \geq 0 \quad T \in \text{Ker } \Delta_L.$$

В результате $\|T\|^2$ становится неотрицательной субгармонической функцией, заданной в области U (см. [4]). Если при этом функция $\|T\|^2$ имеет локальный максимум в некоторой точке $x \in U$, то в соответствии с принципом максимума Хопфа (см. [9, теорема 1], [3, теорема 2.2]) заключаем, что функция $\|T\|^2$ является постоянной в области $U \subset M$. Это означает, в частности, ковариантное постоянство тензорного поля T в области U , т.е. $(\nabla T)_x = 0$ во всех точках $x \in U$. Предположим, что $\|T\|^2 = C$, где C — некоторая постоянная; это означает, что T не обращается в нуль в области U . Но в тоже самое время $\Delta \|T\|^2 = 0$. Если предположить, что существует точка $x \in U$, в которой $\bar{R} \geq k > 0$, то в этой точке квадратичная форма $g(\mathfrak{R}_p(T_x), T_x)$ является положительно определенной, поскольку

$$g(\mathfrak{R}_p(T_x), T_x) = \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha} \|\Xi_{\alpha} T_x\|^2 \geq k \sum_{\alpha} \|\Xi_{\alpha} T_x\|^2 > 0$$

для ненулевого тензора $T_x \in T_x^{(p,0)}M$. В этом случае левая часть равенства (5) обращается в нуль, а правая — больше нуля. Это противоречие означает, что $T \equiv 0$ в области U . $\square$

На компактном многообразии (M, g) всегда найдется точка $x \in M$, в которой $\|T\|^2$ достигает максимума для произвольного $T \in C^\infty T^{(p,0)}M$. Предположим дополнительно, что (M, g) — многообразие с неотрицательно определенным оператором кривизны, для которого существует точка, в которой $\bar{R} \geq k > 0$. В этом случае справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть (M, g) — компактное риманово многообразие с неотрицательно определенным оператором кривизны $\bar{R} : \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$. Тогда ядро $\text{Ker } \Delta_L$ лапласиана Лихнеровича $\Delta_L : C^\infty T^{(p,0)}M \rightarrow C^\infty T^{(p,0)}M$ состоит из параллельных тензорных полей. Если, кроме того, $\bar{R} \geq k > 0$ в некоторой точке $x \in M$, то его ядро $\text{Ker } \Delta_L$ тривиально.

Замечание 3. Если область определения лапласиана Лихнеровича Δ_L ограничить расслоением $\Lambda^p M$, то Δ_L станет хорошо известным лапласианом Ходжа—де Рама $\Delta_H : C^\infty \Lambda^p M \rightarrow C^\infty \Lambda^p M$ (см. [24, с. 347]). Если принять во внимание, что в случае компактного многообразия (M, g) его p -число Бетти $\beta_p(M) = \dim \text{Ker } \Delta_H$ для любого $1 \leq p \leq n-1$, то на основании следствия 1 можно доказать классическую теорему Мейера: Если $\bar{R} \geq 0$, то

$$\beta_p(M) \leq \binom{n}{p} = \beta_p(T^n)$$

для n -мерного плоского тора T^n . Если же $\bar{R} > 0$, то $\beta_p(M) = 0$ (см., например, [24, с. 351]). При этом лемму 1 можно рассматривать как обобщение теоремы Мейера.

Известно, что риманово симметрическое пространство компактного типа имеет неотрицательную секционную кривизну (см. [2, гл. 5, § 3, теорема 3.1]). Для такого симметрического пространства оператор кривизны является неотрицательно определенным (см. [15, с. 113–114]). Поэтому мы можем сформулировать еще одно следствие.

Следствие 2. Для $p \geq 2$ ядро лапласиана Лихнеровича $\Delta_L : C^\infty T^{(p,0)}M \rightarrow C^\infty T^{(p,0)}M$ на римановом симметрическом пространстве (M, g) компактного типа состоит из параллельных тензорных полей.

Замечание 4. Если область определения лапласиана Лихнеровича Δ_L ограничить расслоением $\Lambda^p M$ на односвязном римановом симметрическом пространстве (M, g) компактного типа, то на основании следствия 2 можем доказать (см. [4]), что

$$\beta_1(M) = \beta_{n-1}(M) = 0, \quad \beta_p(M) \leq \beta_p(T^n) \quad \text{для } 2 \leq p \leq n-1.$$

Рассмотрим полное некомпактное риманово многообразие (M, g) с неотрицательным оператором кривизны $\bar{R} : \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$. Заметим, что тогда секционная кривизна многообразия (M, g) будет также неотрицательной (см. [24, с. 115]). Из (7) в этом случае заключаем, что $\|T\|^2$ является неотрицательной субгармонической функцией на полном некомпактном римановом многообразии с неотрицательной секционной кривизной, что полностью укладывается в условие теоремы Грина—Ву (см. [18]), на основании которой заключаем, что

$$\int_M \|T\|^2 dv_g = +\infty$$

либо $\|T\|^2 \equiv 0$. Тогда нетрудно усмотреть, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\Delta_L : C^\infty T^{(p,0)}M \rightarrow C^\infty T^{(p,0)}M$ — лапласиан Лихнеровича на полном некомпактном римановом многообразии (M, g) с неотрицательно определенным оператором кривизны $\bar{R} : \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$. Тогда векторное пространство $L^2 \text{Ker } \Delta_L$ является тривиальным.

Замечание 5. Если область определения лапласиана Лихнеровича Δ_L ограничить расслоением $\Lambda^p M$ на полном римановом многообразии (M, g) , то из теоремы 1 вытекает теорема о тривильности подпространства $L^2 \text{Ker } \Delta_H$ гармонических L^2 -форм на (M, g) с квадратичной формой $g(\mathfrak{R}_p(T), T) \geq 0$, причем $g(\mathfrak{R}_p(T_x), T_x) > 0$ для некоторой точки $x \in M$ (см. [13]).

В заключение рассмотрим произвольное тензорное поле $T \in C^\infty T^{(2,0)}M$; тогда согласно [22, с. 27] справедливо равенство

$$\text{trace}_g(\Delta_L T) = \Delta_L(\text{trace}_g T);$$

поэтому $\text{trace}_g T$ — гармоническая функция для произвольного $T \in \text{Ker } \Delta_L$. Поскольку каждая гармоническая функция на компактном многообразии является постоянной в силу принципа максимума Бохнера (см. [3, теорема 2.3]), доказано следующее утверждение.

Теорема 2. На компактном римановом многообразии (M, g) ядро $\text{Ker } \Delta_L$ лапласиана Лихнеровича $\Delta_L : C^\infty T^{(2,0)}M \rightarrow C^\infty T^{(2,0)}M$ состоит из тензорных полей с постоянным следом.

4. Оценка собственного значения лапласиана Лихнеровича. Собственным тензором лапласиана Лихнеровича

$$\Delta_L : C^\infty T^{(p,0)}M \rightarrow C^\infty T^{(p,0)}M$$

называется тензорное поле $T \in C^\infty(\otimes^p T^*M)$, удовлетворяющее в каждой точке $x \in M$ условию $\Delta_L T_x = \lambda T_x$, где λ — некоторая постоянная, которую назовем собственным значением лапласиана, отвечающим тензору T .

Поскольку Δ_L — эллиптический оператор, то на компактном многообразии (M, g) подпространство собственных p -тензоров лапласиана Лихнеровича Δ_L , отвечающих собственному значению λ , имеет конечную размерность, причем множество всех собственных значений лапласиана Лихнеровича Δ_L дискретно. При этом для $\bar{R} \geq k$ имеем

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \lambda_a = \infty,$$

а подпространства собственных p -тензоров, отвечающие разным собственным значениям λ_a и λ_b лапласиана Лихнеровича Δ_L , ортогональны (см. [24, с. 360]).

Предположим, что риманово многообразие (M, g) компактно. Из (5) следует

$$\frac{1}{2}\Delta_B\|T\|^2 = -\lambda\|T\|^2 + g(\mathfrak{R}_p(T), T) + \|\nabla T\|^2 \geq -\lambda\|T\|^2 + g(\mathfrak{R}_p(T), T). \quad (8)$$

Полагаем, что $\bar{R} \geq k$ в произвольной точке $x \in M$; тогда из предположения, что $\bar{R}(\Xi_\alpha) = \Lambda_\alpha \Xi_\alpha$, заключаем

$$g(\mathfrak{R}_p(T_x), T_x) = \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha} \|\Xi_{\alpha} T_x\|^2 \geq k \sum_{\alpha} \|\Xi_{\alpha} T_x\|^2.$$

Согласно [23, с. 346] на многообразии (M, g) существует постоянная $C(n, p) > 0$, зависящая только от валентности p тензора T и размерности n многообразия M , для которой

$$C(n, p)\|T\|^2 \geq \sum_{\alpha} \|\Xi_{\alpha} T_x\|^2.$$

Пусть теперь оператор кривизны ограничен снизу постоянной $k = -K \leq 0$. Тогда получаем неравенство $g(\mathfrak{R}_p(T), T) \geq -K \cdot C(n, p)\|T\|^2$. В результате из (7) находим

$$\frac{1}{2}\Delta_B\|T\|^2 \geq (-\lambda - K \cdot C(n, p))\|T\|^2. \quad (9)$$

Если риманово многообразие (M, g) компактно, то на основании принципа максимума Бохнера (см. [3, теорема 2.2]) из (7) заключаем, что

$$\lambda \geq -K \cdot C(n, p) \geq 0.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\Delta_L : C^\infty T^{(p,0)}M \rightarrow C^\infty T^{(p,0)}M$ — лапласиан Лихнеровича на компактном римановом многообразии (M, g) с ограниченным снизу оператором кривизны $\bar{R} : \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$, т.е. $\bar{R} \geq -K$ для некоторого $K \geq 0$. Тогда существует такая постоянная $C(n, p) > 0$, что $\lambda \geq -K C(n, p) \geq 0$ для произвольного собственного значения λ лапласиана Лихнеровича Δ_L .

Замечание 6. Если область определения лапласиана Лихнеровича Δ_L ограничить расслоением $\Lambda^p M$, то будет справедливой ставшей уже классической теорема Галлота—Мейера (см. [16]), согласно которой $\lambda \geq p(n - p + 1)K$ при условии, что $\bar{R} \geq K > 0$. Как нетрудно видеть, здесь $C(n, p) = p(n - p + 1)$.

В частном случае, когда $p = 2$, можно получить ограничение сверху на собственные значения лапласиана Лихнеровича.

Теорема 4. Пусть $\Delta_L : C^\infty T^{(2,0)}M \rightarrow C^\infty T^{(2,0)}M$ — лапласиан Лихнеровича на n -мерном компактном многообразии (M, g) с ограниченной снизу кривизной Риччи, т.е. $\text{Ric} \geq -(n - 1)K$ для некоторого $K \geq 0$, и пусть λ — собственное значение лапласиана Лихнеровича Δ_L , соответствующее собственному тензору $T \in C^\infty T^{(2,0)}$. Если след тензора T не является постоянной функцией, то существуют такие натуральное число a и постоянная $C(n)$, что

$$0 < \lambda \leq \frac{1}{4}(n - 1)^2 K + \left(\frac{a}{d}\right)^2 C(n)$$

для диаметра $d = d(M)$ многообразия (M, g) . Если же $\text{Ric} \geq 0$, то

$$0 < \lambda < \frac{2a^2 n(n + 4)}{d^2}.$$

Доказательство. Пусть (M, g) — n -мерное компактное многообразие. Рассмотрим тензорное поле $T \in C^\infty T^{(2,0)}M$ с отличным от нуля следом, которое является собственным тензором лапласиана Лихнеровича $\Delta_L : C^\infty T^{(2,0)}M \rightarrow C^\infty T^{(2,0)}M$ с собственным значением λ . В этом случае λ не может быть нулем в силу теоремы 2. Тогда из равенства $\Delta \text{tr}_{g,T} T = \lambda \text{tr}_{g,T} T$ следует, что $\lambda > 0$. Известно, что на компактном многообразии (M, g) лапласиан Δ , определенный на C^2 -функциях, имеет дискретный спектр $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \rightarrow \infty$. Пусть кривизна Риччи многообразия (M, g) ограничена снизу, т.е. $\text{Ric} \geq -(n - 1)K$ для некоторого числа $K \geq 0$. Тогда существует

такая зависящая от размерности n постоянная $C(n)$, что для любых $a = 1, 2, \dots$ и диаметра $d = d(M)$ многообразия (M, g) выполняется следующее неравенство (см. [8, 10, 19]):

$$\lambda_a \leq \frac{1}{4}(n-1)^2 K + \left(\frac{a}{d}\right)^2 C(n).$$

Если же $\text{Ric} \geq 0$, то

$$\lambda_a < \frac{2k^2 n(n+4)}{d^2}.$$

В результате при соответствующих требованиях на кривизну Риччи многообразия (M, g) для выбранного $\lambda > 0$ всегда найдется такой номер $a \geq 1$, что $\lambda = \lambda_a$ может занять место в каждом из двух неравенств. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. — М.: Мир, 1990.
2. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.
3. Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. — М.: ИЛ, 1957.
4. Alexandrova I. A., Stepanov S. E., Tsyganok I. I. Exterior differential forms on symmetric spaces// Sci. Evolutions. — 2017. — 2, № 2. — P. 49–53.
5. Bohm C., Wilking B. Manifolds with positive curvature operator are space forms// Ann. Math. — 2008. — 167. — P. 1079–1097.
6. Boucetta M. Spectra and symmetric eigentensors of the Lichnerowicz Laplacian on $P^n(\mathbb{C})$ // J. Geom. Phys. — 2010. — 60, № 10. — P. 1352–1369.
7. Boucetta B. Spectre du Laplacien de Lichnerowicz sur les projectifs complexes// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. — 2001. — 333, № 6. — P. 571–576.
8. Buser P. Beispiele für λ_1 auf kompakten Mannigfaltigkeiten// Math. Z. — 1979. — 165. — P. 107–133.
9. Calabi E. An extension of E. Hopf's maximum principle with an application to Riemannian geometry// Duke Math. J. — 1957. — 25. — P. 45–56.
10. Cheng S. Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications// Math. Z. — 1975. — 143. — P. 289–297.
11. Chow B., Lu P., Ni L. Hamilton's Ricci Flow. — Science Press, 2006.
12. Dieterich P. S. On the Lichnerowicz Laplacian operator and its application to stability of space-times/ Diplomarbeit. — Univ. Stuttgart, 2013.
13. Dodziuk J. Vanishing theorem for square-integrable harmonic forms// Proc. Indian Acad. Sci. — 1981. — 99, № 1. — P. 21–27.
14. Dotti G., Gleiser R. J. Linear stability of Einstein–Gauss–Bonnet static spacetimes// Phys. Rev. D. — 2005. — 72, № 4. — 044018.
15. Duchesne B. Infinite-dimensional Riemannian symmetric spaces with fixed-sing curvature operator// Ann. Inst. Fourier. — 2015. — 65, № 1. — P. 211–244.
16. Gallot S., Meyer D. Sur la première valeur propre du p -spectre pour les variétés à opérateur de courbure positif// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A-B. — 1973. — 276. — P. A1619–A1621.
17. Gibbons G. W., Hartnoll S. A. A gravitational instability in higher dimensions// Phys. Rev. D. — 2002. — 66. — 064024.
18. Greene R. E., Wu H. Integrals of subharmonic functions on manifolds of nonnegative curvatures// Invent. Math. — 1974. — 27. — P. 265–298.
19. Hassannezhad A., Kokarev G., Politerovich I. Eigenvalue inequalities on Riemannian manifolds with a lower Ricci curvature bound// J. Spectr. Theory. — 2016. — 6, № 4. — P. 807–835.
20. Kröncke K. Stability of Einstein manifolds/ Ph.D. thesis. — Univ. Potsdam, 2013.
21. Kröncke K. Stability of Einstein manifolds// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2015. — 47, № 1. — P. 81–98.
22. Lichnerowicz A. Propagateurs et commutateurs en relativité générale// Publ. Math. IHES. — 1961. — 10, № 1. — P. 5–56.

23. *Pigola S., Rigoli M., Setti A. G.* Vanishing and f-positivity Results in geometric analysis. A generalization of the Bochner technique. — Berlin: Birkhäuser-Verlag, 2008.
24. *Petersen P.* Riemannian Geometry. — Springer-Verlag, 2016.
25. *Stepanov S. E., Tsyganok I. I.* Conformal Killing L^2 -forms on complete Riemannian manifolds with non-positive curvature operator// J. Math. Anal. Appl. — 2018. — 458, № 1. — P. 1–8.
26. *Wang C.* Linear stability of Einstein metrics and Perelman's lambda-functional for manifolds with conical singularities/ Ph.D. thesis. — Univ. of California, 2016.

Степанов Сергей Евгеньевич

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва;

Всероссийский институт научной и технической информации

Российской академии наук (ВИНИТИ РАН), Москва

E-mail: s.e.stepanov@mail.ru

Цыганок Ирина Ивановна

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва

E-mail: i.i.tsyganok@mail.ru