Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Половинкина, И. П. Половинкин, О свойствах римановых метрик, связанных с B -эллиптическими операторами, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 170, 31–37

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-170-31-37>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 03:10:04

О СВОЙСТВАХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК, СВЯЗАННЫХ С B -ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ

© 2019 г. М. В. ПОЛОВИНКИНА, И. П. ПОЛОВИНКИН

Аннотация. Рассмотрена риманова метрика, в которой оператор Лапласа–Бельтрами с точностью до множителя совпадает с B -эллиптическим оператором.

Ключевые слова: B -эллиптический оператор, риманова метрика, оператор Лапласа–Бельтрами, группа изометрий, условия Киллинга, геометрия Лобачевского.

ON PROPERTIES OF RIEMANNIAN METRICS ASSOCIATED WITH B -ELLIPTIC OPERATORS

© 2019 M. V. POLOVINKINA, I. P. POLOVINKIN

ABSTRACT. In this paper, we consider a Riemannian metric in which the Laplace–Beltrami operator coincides with a B -elliptic operator up to a factor.

Keywords and phrases: B -elliptic operator, Riemannian metric, Laplace–Beltrami operator, isometry group, Killing conditions, Lobachevsky geometry.

AMS Subject Classification: 35J15

1. K -Однородная метрика. Пусть

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n),$$

где γ_i , $i = 1 \dots, n$, — фиксированные числа, одновременно не равные нулю, т.е. такие, что

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 > 0.$$

Обозначим символом $\mathbb{R}_+^n$ множество таких $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, что $x_i \in \mathbb{R}$, если $\gamma_i = 0$, $x_i \in (0, +\infty)$, если $\gamma_i \neq 0$. Переменную x_i с номером i , для которого $\gamma_i \neq 0$, принято называть *особой*. Как обычно, будем пользоваться обозначением

$$(x)^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n.$$

Пусть функция $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в $\mathbb{R}_+^n$.

Определим оператор Δ_{B_γ} формулой

$$\Delta_{B_\gamma} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}. \quad (1)$$

Операторы вида (1) изучались И. А. Кирияновым и его учениками (см. [4–6]).

Поставим задачу найти такую положительно определенную на $\mathbb{R}_+^n$ симметричную квадратичную форму (метрику)

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j,$$

чтобы соответствующий этой метрике оператор Лапласа—Бельтрами (см. [8])

$$\Delta_\omega = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n g^{ij} \sqrt{|g|} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2)$$

с точностью до множителя совпадал с оператором Δ_{B_γ} . Здесь функции g^{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, — элементы матрицы $\|g^{ij}\|$, обратной к матрице $\|g_{ij}\|$ (ковариантный метрический тензор),

$$g = \det \|g_{ij}\|.$$

Изучение свойств эллиптических дифференциальных операторов с помощью римановой метрики имеет давние корни (см., например, [2, 7]).

Теорема 1. При $n \geq 3$ элементы искомой матрицы $\|g_{ij}\|$ задаются с помощью формул

$$g_{ij} = \delta_{ij} \prod_{i=1}^n x_i^{K_i} = \delta_{ij} x^K, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad K = (K_1, \dots, K_n), \quad (3)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера,

$$K_i = \frac{2}{n-2} \gamma_i. \quad (4)$$

Доказательство. Действительно, поскольку $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$, подставляя (3) в (2), получим:

$$\Delta_\omega u = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(g^{kk} \sqrt{|g|} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right), \quad (5)$$

где

$$|g| = g = x^{nK} = \prod_{i=1}^n \prod_{i=1}^N n x_i^{K_i} = \prod_{i=1}^n x_i^{2n\gamma_i/(n-2)}, \quad (6)$$

$$g^{kk} = x^{-K} = \prod_{i=1}^n x_i^{-2\gamma_i/(n-2)}. \quad (7)$$

Учитывая (6) и (7), можно переписать (5) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta_\omega u &= \frac{1}{x^{nK/2}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(x^{-K} x^{Kn/2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \\ &= x^{-K} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + x^{-Kn/2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \left(\prod_{l=1}^n x_l^{K_l(n-2)/2} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} = \\ &= x^{-K} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + x^{-Kn/2} \sum_{j=1}^n \prod_{l=1}^n x_l^{K_l(n-2)/2} \frac{K_j(n-2)}{2} x_j^{-1} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \\ &= x^{-K} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + x^{-K} \sum_{j=1}^n \frac{K_j(n-2)}{2x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} = x^{-K} \Delta_{B_\gamma} u, \end{aligned}$$

то есть

$$\Delta_\omega u = x^{-K} \Delta_{B_\gamma} u, \quad (8)$$

что и требовалось доказать. $\square$

Множество $\mathbb{R}_+^n$, снабженное римановой метрикой

$$ds^2 = x^K \sum_{i=1}^n dx_i^2, \quad K \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

будем рассматривать как риманово пространство; обозначим его через KI_n , а метрику (9) будем называть K -однородной метрикой.

Теорема 2. *При $n = 2$ задача о нахождении метрики, удовлетворяющей равенству (8), не имеет решения.*

Доказательство. Введем обозначения $E = g_{11}$, $F = g_{12} = g_{21}$, $G = g_{22}$. Тогда

$$g = \det \|g_{ij}\| = EG - F^2, \quad g^{ij} = (-1)^{i+j} \frac{g_{ij}}{EG - F^2}.$$

Отсюда

$$\Delta_\omega u = \frac{G}{|g|} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{E}{|g|} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - 2 \frac{F}{|g|} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \quad (10)$$

где через Φ обозначено слагаемое, зависящее только от производных первого порядка функции u . Для того, чтобы выражение (10) совпадало с точностью до множителя с (1), необходимо выполнение условия $F \equiv 0$, что повлечет за собой равенства

$$g = EG, \quad g^{11} = \frac{1}{E}, \quad g^{22} = \frac{1}{G}, \quad g_{12} = g_{21} = g^{12} = g^{21} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta_\omega u &= \frac{1}{\sqrt{|EG|}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sqrt{\left| \frac{G}{E} \right|} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sqrt{\left| \frac{E}{G} \right|} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \sqrt{\left| \frac{G}{E} \right|} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \sqrt{\left| \frac{E}{G} \right|} \frac{\partial u}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Первые два слагаемых должны иметь одинаковые коэффициенты, откуда $E = G$. Но тогда два последних слагаемых равны нулю, что и означает невозможность подобрать искомую метрику при $n = 2$. $\square$

2. Исследование изометрических преобразований для K -однородной метрики. Необходимым и достаточным условием того, чтобы однопараметрическая группа G с инфинитезимальным оператором

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

была группой изометрий, является выполнение условий Киллинга

$$\sum_{s=1}^n \left(\xi_s \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_s} + g_{is} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} + g_{js} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_i} \right) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_s} = \delta_{ij} \frac{K_s x^K}{x_s}.$$

Поэтому уравнения Киллинга примут вид

$$\sum_{s=1}^n \left(\delta_{ij} \xi_s K_s x^{K-1} + x^K \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right) \right) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Произведя суммирование и сократив на x^K , мы получим

$$\delta_{ij} \sum_{s=1}^N \frac{\xi_s K_s}{x_s} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (11)$$

При $i \neq j$ уравнение (11) можно записать в виде

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j. \quad (12)$$

При $i = j$ уравнение (11) можно записать в виде

$$2 \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j} + \sum_{s=1}^n \frac{K_s \xi_s}{x_s} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Вектор

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \xi_j = C x^p x_j, \quad (14)$$

где

$$p = (p_1, \dots, p_n), \quad p_1 = p_2 = \dots = p_n = \beta = - \sum_{l=1}^n \frac{K_l}{2} - 1, \quad (15)$$

является решением системы (13), в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Подставив представление (14) с учетом (15) в уравнения (12), мы получим

$$0 \equiv \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = \beta x^p \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \right), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

Отсюда получаем

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = \beta = - \sum_{l=1}^n \frac{K_l}{2} - 1 = 0, \quad (16)$$

или, что то же самое,

$$\sum_{l=1}^n K_l = -2, \quad (17)$$

а учитывая (4),

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i = 2 - N. \quad (18)$$

3. Характеристики K -однородной метрики в случае одной особой переменной. Один из случаев выполнения условия (16), или, что то же, (18), хорошо известен. Пространство KI_n представляет собой модель Пуанкаре n -мерной геометрии Лобачевского. Далее мы рассмотрим случай $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{n-1} = 0$, $\gamma_n \neq 0$. Метрика (3) теперь будет иметь вид

$$g_{ij} = \delta_{ij} x_n^K, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (19)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера и

$$K = \frac{2}{n-2} \gamma. \quad (20)$$

Непосредственным вычислением устанавливаются следующие факты.

Теорема 3. Символы Кристоффеля первого рода, соответствующие метрике (9), имеют вид

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} K x_n^{K-1} (\delta_{ik} \delta_{jn} + \delta_{jk} \delta_{in} - \delta_{ij} \delta_{kn}).$$

Доказательство. Из определения символов Кристоффеля первого рода, учитывая (19)–(20), получим:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jn} K x_n^{K-1} + \delta_{jk} \delta_{in} K x_n^{K-1} - \delta_{ij} \delta_{kn} K x_n^{K-1}). \quad \square$$

Теорема 4. Символы Кристоффеля второго рода, соответствующие метрике (9), имеют вид

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{K}{2x_n} (\delta_{ik} \delta_{jn} + \delta_{jk} \delta_{in} - \delta_{ij} \delta_{kn}).$$

Доказательство. Из определения символов Кристоффеля второго рода и предыдущей теоремы получаем:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^k &= \sum_{h=1}^n g^{kh} \Gamma_{ij,h} = \frac{K}{2} \sum_{h=1}^n \delta_{kh} x_n^{-K} x_n^{K-1} (\delta_{ih} \delta_{jn} + \delta_{jh} \delta_{in} - \delta_{ij} \delta_{hn}) = \\ &= \frac{K}{2x_n} \sum_{h=1}^n (\delta_{ki} \delta_{jn} + \delta_{kj} \delta_{in} - \delta_{ij} \delta_{kn}). \quad \square\end{aligned}$$

Теорема 5. Компоненты тензора Римана, соответствующего метрике (9), имеют вид

$$R_{ijk}^l = \left(\frac{K^2}{4x_n^2} - \frac{K}{2x_n^2} \right) (\delta_{li} \delta_{jn} \delta_{kn} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ln} - \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ln} - \delta_{lk} \delta_{in} \delta_{jn}) + \frac{K^2}{4x_n^2} (\delta_{ij} \delta_{lk} - \delta_{ik} \delta_{lj}). \quad \square$$

Доказательство. По определению компоненты тензора Римана вычисляются по формулам

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x_k} + \sum_{m=1}^n (\Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^l - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l).$$

Вычислим входящие в эти формулы частные производные. Имеем

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x_s} = -\frac{K}{2x_n^2} \delta_{sn} (\delta_{ki} \delta_{jn} + \delta_{kj} \delta_{in} - \delta_{ij} \delta_{kn}),$$

откуда

$$\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} = -\frac{K}{2x_n^2} \delta_{jn} (\delta_{li} \delta_{kn} + \delta_{lk} \delta_{in} - \delta_{ik} \delta_{ln}), \quad \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x_k} = -\frac{K}{2x_n^2} \delta_{kn} (\delta_{li} \delta_{jn} + \delta_{lj} \delta_{in} - \delta_{ij} \delta_{ln}).$$

Поэтому

$$\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x_k} = -\frac{K}{2x_n^2} (\delta_{jn} \delta_{lk} \delta_{in} - \delta_{jn} \delta_{ik} \delta_{ln} - \delta_{kn} \delta_{lj} \delta_{in} + \delta_{kn} \delta_{ij} \delta_{ln}).$$

Вычислим теперь последнее слагаемое в определении. Учитывая теорему 4, находим

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^n (\Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^l - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l) &= \\ &= \frac{K^2}{4x_n^2} \sum_{m=1}^n (\delta_{mi} \delta_{kn} \delta_{lm} \delta_{jn} + \delta_{mi} \delta_{kn} \delta_{lj} \delta_{mn} - \delta_{mi} \delta_{kn} \delta_{mj} \delta_{ln} + \delta_{mk} \delta_{in} \delta_{lm} \delta_{jn} + \\ &+ \delta_{mk} \delta_{in} \delta_{lj} \delta_{mn} - \delta_{mk} \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{ln} - \delta_{ik} \delta_{mn} \delta_{lm} \delta_{jn} - \delta_{ik} \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{mn} + \delta_{ik} \delta_{mn} \delta_{mj} \delta_{ln} - \\ &- \delta_{mi} \delta_{jn} \delta_{lm} \delta_{kn} - \delta_{mi} \delta_{jn} \delta_{lk} \delta_{mn} + \delta_{mi} \delta_{jn} \delta_{mk} \delta_{ln} - \delta_{mj} \delta_{in} \delta_{lm} \delta_{kn} - \delta_{mj} \delta_{in} \delta_{lk} \delta_{mn} + \\ &+ \delta_{mj} \delta_{in} \delta_{mk} \delta_{ln} + \delta_{ij} \delta_{mn} \delta_{lm} \delta_{kn} + \delta_{ij} \delta_{mn} \delta_{lk} \delta_{mn} - \delta_{ij} \delta_{mn} \delta_{mk} \delta_{ln}).\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая свойства символа Кронекера, в частности, формулы $\delta_{il} = \delta_{li}$, $\sum_{m=1}^n \delta_{mi} \delta_{lm} = \delta_{il}$, после тождественных преобразований получаем утверждение теоремы. $\square$

Теорема 6. Компоненты тензора Риччи, соответствующего метрике (9), имеют вид

$$R_{ij} = \frac{K}{4x_n^2} ((K-2)(2-n)\delta_{in}\delta_{jn} + (K(n-2)+2)\delta_{ij}).$$

Доказательство. Непосредственно из определения компонентов тензора Риччи

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^n R_{ijk}^k$$

после тождественных преобразований приходим к справедливости теоремы. $\square$

Теорема 7. Кривизна пространства KI_n вычисляется по формуле

$$R = \frac{Kn(n-2)}{x_n^{K+2}} = \frac{2\gamma n}{x_n^{(2\gamma+2n-4)/(n-2)}}.$$

Доказательство. Из определения кривизны

$$R = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g^{ij} R_{ij},$$

приходим к утверждению теоремы, производя суммирование и тождественные преобразования. $\square$

Замечание 1. Никакая дважды непрерывно дифференцируемая замена переменных не приведет уравнение вида

$$\Delta_{B\gamma} u \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\gamma}{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n} = f, \quad \gamma \neq 0,$$

к уравнению вида

$$\Delta u \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f.$$

Действительно, если бы такая замена существовала, то это означало бы, что существует координатное преобразование, переводящее метрику с ненулевой кривизной в метрику с нулевой кривизной, что невозможно.

4. Исследование геодезических линий для K -однородной метрики.

Теорема 8. Система уравнений геодезических пространства KI_n сводится к системе первого порядка

$$\frac{dx_k}{ds} = \frac{C_k}{x_n^K}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad \left(\frac{dx_n}{ds} \right)^2 = \frac{C_n}{x_n^K} - \frac{B^2}{x_n^{2K}}, \quad (21)$$

$$\text{где } B = \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} C_k^2}.$$

Доказательство. Система уравнений, которым удовлетворяют геодезические линии в заданной метрике $\|g_{ij}\|$, имеют вид

$$\frac{d^2 x_k}{ds^2} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где s — натуральный параметр (длина дуги). В нашем случае, пользуясь вычисленными символами Кристоффеля, мы можем записать эту систему в виде

$$\frac{d^2 x_k}{ds^2} + \frac{K}{x_n} \frac{dx_n}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (22)$$

$$\frac{d^2 x_n}{ds^2} - \frac{K}{2x_n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{dx_i}{ds} \right)^2 + \frac{K}{2x_n} \left(\frac{dx_n}{ds} \right)^2 = 0. \quad (23)$$

Уравнения (22) могут быть записаны в виде

$$x_n^{-K} \frac{d}{ds} \left(x_n^K \frac{dx_k}{ds} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (24)$$

Умножая (24) на x_n^K , интегрируя и деля на x_n^K , получим

$$\frac{dx_k}{ds} = \frac{C_k}{x_n^K}, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (23), имеем

$$\frac{d^2 x_n}{ds^2} - \frac{KB^2}{2x_n^{2K+1}} + \frac{K}{2x_n} \left(\frac{dx_n}{ds} \right)^2 = 0, \quad (26)$$

где B определено выше. Уравнение (26) стандартным образом допускает понижение порядка. Положим $p = p(x_n) = dx_n/ds$, $v = p^2$; тогда $d^2 x_n/ds^2 = p'p = v'/2$. После этого уравнение (26) сведется к виду

$$v' + \frac{K}{x_n} v = \frac{B^2 K}{x_n^{2K+1}} \iff \frac{d}{dx_n} (x_n^K v) = \frac{B^2 K}{x_n^{K+1}}.$$

Интегрируя и деля на x_n^K , получим

$$v = p^2 = \left(\frac{dx_n}{ds} \right)^2 = \frac{C_n}{x_n^K} - \frac{B^2}{x_n^{2K}}. \quad \square$$

Известно (см. [10]), что геодезические линии обладают свойством

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} = \text{const}.$$

В рассматриваемом случае это приведет к равенству

$$\sum_{i=1}^n x_n^K \left(\frac{dx_i}{ds} \right)^2 = \text{const}. \quad (27)$$

Из (21) легко выводится, что постоянная в равенстве (27) совпадает с C_n .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983.
2. *Ильин В. А.* О рядах Фурье по фундаментальным системам функций оператора Бельтрами // Дифф. уравн. — 1969. — 5, № 11. — С. 1940–1978.
3. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Метод преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Совр. мат. Фундам. напр. — 2018. — 64, № 2. — С. 211–426.
4. *Киприянов И. А.* Преобразование Фурье-Бесселя и теоремы вложения для весовых классов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1967. — 89. — С. 130–213.
5. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.
6. *Ляхов Л. Н.* Весовые сферические функции и потенциалы Рисса, порожденные обобщенным сдвигом. — Воронеж: ВГТА, 1997.
7. *Феллер В.* О решениях линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа // Усп. мат. наук. — 1941. — № 8. — С. 232–248.
8. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.
9. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. — М.: Мир, 1987.
10. *Эйзенхарт Л. Т.* Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.

Половинкина Марина Васильевна

Воронежский государственный университет инженерных технологий

E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

Половинкин Игорь Петрович

Воронежский государственный университет

E-mail: polovinkin@yandex.ru