Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Струков, О распределениях, почти периодических на бесконечности, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 170, 51–61

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-170-51-61>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:32:12

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 170 (2019). С. 51–61
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-170-51-61

УДК 517.9

О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ, ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

© 2019 г. В. Е. СТРУКОВ

Аннотация. Статья посвящена изучению медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности распределений из гармоничных пространств. Рассмотрен целый ряд однородных пространств функций. Введено понятие гармоничного пространства распределений, которое строится по одному из однородных пространств функций. Изучены свойства гармоничных пространств распределений, наделенных структурой банаховых модулей. Доказано, что каждое такое пространство изометрически изоморфно соответствующему однородному пространству функций. На основе определений медленно меняющейся и почти периодической на бесконечности функций из однородного пространства введены понятия медленно меняющегося и почти периодического на бесконечности распределений из гармоничного пространства. С помощью методов абстрактного гармонического анализа построены ряды Фурье почти периодических на бесконечности распределений и получены некоторые их свойства. В работе существенно использованы результаты теории изометрических представлений и теории банаховых модулей.

Ключевые слова: распределение медленного роста, почти периодическое на бесконечности распределение, медленно меняющееся на бесконечности распределение, однородное пространство, банахов модуль, почти периодический вектор, ряд Фурье.

ON DISTRIBUTIONS ALMOST PERIODIC AT INFINITY

© 2019 V. E. STRUKOV

ABSTRACT. This paper is devoted to the study of slowly varying and almost periodic at infinity distributions from harmonic spaces; a number of spaces of homogeneous function are considered. The notion of a harmonic space of distributions is introduced; this space is constructed by a homogeneous functional spaces. Properties of harmonic spaces of distributions endowed with the structure of Banach modules are studied. Each such a space is proved to be isometrically isomorphic to the corresponding homogeneous functional space. Based on the definitions of slowly varying and almost periodic at infinity functions from a homogeneous space, we introduce the notions of slowly varying and almost periodic at infinity distributions from a harmonic space. Using methods of abstract harmonic analysis, we construct Fourier series of almost periodic distributions at infinity and obtain their properties. In this paper, we essentially used results of the theory of isometric representations and the theory of Banach modules.

Keywords and phrases: distribution of slow growth, distribution almost periodic at infinity, distribution slowly varying at infinity, homogeneous space, Banach module, almost periodic vector, Fourier series.

AMS Subject Classification: 33E30, 43A60

1. Однородные пространства функций. Пусть X — комплексное банахово пространство, $\text{End } X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X . Символом $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать линейное пространство локально суммируемых (измеримых по Бохнеру) на $\mathbb{R}$ (классов эквивалентности) функций со значениями в X , а символом $S^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, — пространства Степанова, состоящие из функций $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, X)$, для которых конечна величина

$$\|x\|_{S^p} = \sup_{s \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 \|x(s+t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty),$$

принимаемая за норму (см. [3, 7]).

Определение 1. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ определенных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в X называется *однородным*, если выполнены следующие условия:

- (а) пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ содержится в пространстве Степанова $S^1(\mathbb{R}, X)$, причем вложение $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \subset S^1(\mathbb{R}, X)$ инъективно и непрерывно (инъективность означает инъективность оператора вложения);
- (б) в $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ определена и ограничена группа $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, операторов сдвигов функций

$$(S(t)x)(s) = x(s+t), \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X); \quad (1)$$

- (с) для любых функций $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ их свертка

$$(f * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)(S(-\tau)x)(t)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, причем выполнено неравенство

$$\|f * x\| \leq C \|f\|_1 \|x\|,$$

где $C \geq 1$ — некоторая постоянная (как правило, $C = 1$);

- (д) $\varphi x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ для любой $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ и любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ с компактным носителем $\text{supp } \varphi$, причем

$$\|\varphi x\| \leq \|\varphi\| \|x\|$$

и отображение $t \mapsto \varphi S(t)x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ непрерывно.

Это определение однородного пространства функций было введено в [13, 14].

Примерами однородных пространств являются пространства $L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, измеримых по Лебегу и суммируемых со степенью $p \in [1, \infty)$ (классов) функций, пространство $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ существенно ограниченных (классов) функций, пространства Степанова $S^p = S^p(\mathbb{R}, X)$ для всех $p \in [1, \infty)$, пространство $C_b(\mathbb{R}, X)$ ограниченных непрерывных функций и многие другие (более подробно см. [13, 14]).

В дальнейшем символом $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать однородное пространство. Символом $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ обозначим замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ вида

$$\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X) = \left\{ x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) : \text{функция } t \mapsto S(t)x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \text{ непрерывна} \right\}.$$

Через $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать наименьшее замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, содержащее все функции φx , $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, X)$, где функция φ бесконечно дифференцируема и $\text{supp } \varphi$ — компакт.

Непосредственно из определения 1 следует, что все перечисленные однородные пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ являются банаховыми $L^1(\mathbb{R})$ -модулями, в которых действует группа S сдвигов вида (1) и модульная структура задается сверткой функций (2). Таким образом, появляется возможность использования основных понятий и результатов из спектральной теории банаховых

модулей над алгеброй $L^1(\mathbb{R})$ (см. [1, 4, 5, 7, 8, 11]). В частности, пространства $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ совпадают с пространствами S -непрерывных векторов (см. [13]). Следует отметить, что

$$(L^p(\mathbb{R}, X))_c = L^p(\mathbb{R}, X), \quad (L^\infty(\mathbb{R}, X))_c = C_{b,u}(\mathbb{R}, X), \\ (C_b(\mathbb{R}, X))_c = C_{b,u}(\mathbb{R}, X), \quad (C_b(\mathbb{R}, X))_0 = C_0(\mathbb{R}, X).$$

2. Почти периодические векторы из банаховых $L^1(\mathbb{R})$ -модулей. Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство, а $L^1(\mathbb{R})$ — банахова алгебра определенных на $\mathbb{R}$ измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных (классов) функций со сверткой функций в качестве умножения:

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Будем считать, что $\mathcal{X}$ является невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$ -модулем (см. [7, 11]), структура которого ассоциирована с некоторым ограниченным изометрическим представлением $T: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$. Если $T: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ — сильно непрерывное ограниченное представление, то формула

$$T(f)x = fx = \int_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)xdt, \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \quad x \in \mathcal{X},$$

определяет на $\mathcal{X}$ структуру невырожденного банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля, ассоциированную с представлением T . С каждым невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$ -модулем $\mathcal{X}$ ассоциировано единственное представление $T: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ (см. [7]). Чтобы это подчеркнуть, иногда используется обозначение $(\mathcal{X}, T)$.

Теория банаховых $L^1(\mathbb{R})$ -модулей была построена в [6] и изложена в [1, 4, 5, 7, 11, 17, 18].

Определение 2. *Спектром Бёрлинга* вектора $x \in \mathcal{X}$ называется множество чисел $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$ вида

$$\Lambda(x) = \left\{ \lambda_0 \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \text{ для любой функции } f \in L^1(\mathbb{R}), \text{ где } \widehat{f}(\lambda_0) \neq 0 \right\}.$$

Определение 3. Число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ отнесем к *существенному спектру* $\Lambda_{\text{ess}}(x)$ вектора x из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $(\mathcal{X}, T)$, если существует λ_0 -направленность (f_α) из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, для которой выполнено условие

$$\overline{\lim}_{\alpha} \|f_\alpha x\| > 0.$$

Отметим, что $\Lambda_{\text{ess}}(x) \subseteq \Lambda(x)$, $x \in (\mathcal{X}, T)$.

Определение 4. Пусть x — ненулевой вектор из $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $(\mathcal{X}, T)$. Число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ из $\Lambda(x)$ назовем *эргодической точкой* вектора x , если для некоторой λ_0 -направленности из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ существует

$$\lim_{\alpha} f_\alpha x = x_0 \in \mathcal{X}.$$

Множество эргодических точек вектора будем обозначать символом $\Lambda_{\text{erg}}(x)$. Если $x_0 = 0$, то число λ_0 отнесем к *непрерывному спектру* $\Lambda_c(x)$ вектора x . Множество

$$\Lambda_B(x) = \left\{ \lambda_0 \in \Lambda_{\text{erg}}(x) : \lim_{\alpha} f_\alpha x \neq 0 \right\}$$

называется *спектром Бора* (*дискретным спектром*) вектора $x \in \mathcal{X}$.

Определение 5. Вектор x_0 из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $(\mathcal{X}, T)$ называется *почти периодическим* (относительно представления T), если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(1) для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\Omega_{\varepsilon, x_0} = \left\{ \omega \in \mathbb{R} : \|T(\omega)x_0 - x_0\| < \varepsilon \right\}$$

ε -периодов вектора x_0 относительно плотно¹ на $\mathbb{R}$;

¹Множество $\Omega \subset \mathbb{R}$ называется *относительно плотным* на $\mathbb{R}$, если существует такое число $l > 0$, что любой промежуток $[t, t+l]$, $t \in \mathbb{R}$, содержит хотя бы одну точку множества Ω .

- (2) орбита $\{T(t)x_0, t \in \mathbb{R}\}$ вектора x_0 предкомпактна в $\mathcal{X}$;
 (3) для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и собственные векторы $x_1, \dots, x_N$ представления T , соответствующие этим числам (т.е. $T(t)x_k = e^{i\lambda_k t}x_k, t \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq N$), что

$$\left\| x_0 - \sum_{k=1}^N x_k \right\| < \varepsilon;$$

- (4) функция $t \mapsto \varphi(t) = T(t)x_0, t \in \mathbb{R}$, — непрерывная почти периодическая функция, т.е. $\varphi \in AP(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ (см. [4, 10]).

Множество $AP(\mathcal{X}) = AP(\mathcal{X}, T)$ почти периодических векторов из $\mathcal{X}$ образует замкнутое подпространство в $\mathcal{X}$ и является замкнутым подмодулем из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $\mathcal{X}$. Кроме того, имеет место включение $AP(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}_c$.

Определение 6. Преобразование Бора почти периодического вектора $x \in AP(\mathcal{X})$ назовем функцию $\hat{x}_B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$, определенную равенствами

$$\hat{x}_B(\lambda) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha T(\tau) x e^{-i\lambda\tau} d\tau = \lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_0^{\varepsilon^{-1}} T(\tau) x e^{-(\varepsilon+i\lambda)\tau} d\tau = \lim_j f_j x, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

где (f_j) — любая λ -направленность из алгебры $L^1(\mathbb{R})$.

Отметим, что имеет место свойство единственности: если преобразование Бора $\hat{x}_B$ вектора $x \in AP(\mathcal{X})$ равно нулю, то $x = 0$.

Преобразование Бора вектора является основой для определения коэффициентов Фурье почти периодических на бесконечности функций (см. [3]). Носитель $\text{supp } \hat{x}_B$ функции $\hat{x}_B$ совпадает со спектром Бора $\Lambda_B(x)$ вектора x , и это множество не более чем счетно. Тогда справедливо представление

$$\text{supp } \hat{x}_B = \Lambda_B(x) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{J}_d\}, \quad (3)$$

где $\mathbb{J}_d \subset \mathbb{Z}$, причем имеют место равенства

$$T(t)x_n = e^{i\lambda_n t} x_n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{J}_d,$$

где векторы $x_n, n \in \mathbb{J}_d$, являются собственными векторами представления T (а также генератора iA группы операторов T , т.е. $Ax_n = i\lambda_n x_n, n \in \mathbb{J}_d$), причем $\Lambda(x_n) = \{\lambda_n\}, n \in \mathbb{J}_d$. Ряд

$$x \sim \sum_{n \in \mathbb{J}_d} x_n, \quad (4)$$

где $x_n = \hat{x}_B(\lambda_n), n \in \mathbb{J}_d$, назовем *рядом Фурье* вектора $x \in AP(\mathcal{X})$ (относительно представления (3)). Отметим, что если этот ряд абсолютно сходится, т.е. выполнено условие $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty$, то $x = \sum_{n \in \mathbb{J}_d} x_n$.

Лемма 1. Преобразование Бора $\hat{x}_B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ любого вектора x из $AP(\mathcal{X})$ допускает оценку

$$\|\hat{x}_B(\lambda)\| \leq \|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. При определении вектора $\hat{x}_B(\lambda) = \lim f_\alpha x, x \in AP(\mathcal{X})$, будем использовать λ -направленность (f_α) из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, которая является инвариантным интегралом. Тогда $\|f_\alpha\| = \widehat{f_\alpha}(0) = 1$ для любого α и поэтому

$$\|\hat{x}_B(\lambda)\| \leq \sup_\alpha \|f_\alpha\| \|x\| = \|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Теорема 1. Для любого вектора x из $AP(\mathcal{X})$ с рядом Фурье (4) справедливо условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0.$$

Доказательство. С учетом представления (3) и равенства $x_n = \widehat{x}_B(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{J}_d$, достаточно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{x}_B(\lambda_n)\| = 0.$$

Из условия (3) определения 5 следует, что существует последовательность $(a_n, n \in \mathbb{N})$ векторов из $AP(\mathcal{X})$, носители $\text{supp } \widehat{(a_n)}_B$, $n \geq 1$, преобразований Бора которых конечны. Из леммы 1 следует, что

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\widehat{x}_B(\lambda) - \widehat{(a_n)}_B(\lambda)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

и поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{x}_B(\lambda_n)\| = 0. \quad \square$$

3. Медленно меняющиеся на бесконечности функции. Введем понятие медленно меняющейся на бесконечности функции из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Определение 7. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если

$$(S(t)x - x) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X) \quad \text{для любого } t \in \mathbb{R}.$$

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим символом $\mathcal{F}_{\text{sl}, \infty} = \mathcal{F}_{\text{sl}, \infty}(\mathbb{R}, X)$.

Непосредственно из определения следует, что $\mathcal{F}_{\text{sl}, \infty}(\mathbb{R}, X)$ образует линейное замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, инвариантное относительно (полу)группы сдвигов S .

Для случая $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = C_b(\mathbb{R}, X)$ медленно меняющиеся на бесконечности функции рассматривались в [15, 16, 19].

Например, медленно меняющейся на бесконечности является функция $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ вида $x(t) = c + x_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где c — вектор из банахова пространства X и x_0 — любая функция из $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$. При $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = C_b(\mathbb{R}, X)$ примерами медленно меняющихся на бесконечности функций являются:

- (1) $x_1(t) = \sin \ln(1 + t^2)$, $t \in \mathbb{R}$;
- (2) $x_3(t) = \sin \sqrt{1 + |t|}$, $t \in \mathbb{R}$;
- (3) любая непрерывно дифференцируемая функция $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ со свойством $x' \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

В [14] были получены следующие свойства медленно меняющихся на бесконечности функций.

Теорема 2. Пространство $\mathcal{F}_{\text{sl}, \infty}(\mathbb{R}, X)$ обладает следующими свойствами:

- (1) для того чтобы функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ принадлежала пространству $\mathcal{F}_{\text{sl}, \infty}(\mathbb{R}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 0$;
- (2) для того чтобы функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ принадлежала пространству $\mathcal{F}_{\text{sl}, \infty}(\mathbb{R}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * x - x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 1$;
- (3) если $x \in \mathcal{F}_{\text{sl}, \infty}(\mathbb{R}, X)$, то $\Lambda(x) \setminus \{0\} \subset \Lambda_c(x)$ и $\Lambda_{\text{ess}}(x) \subset \{0\}$.

Здесь символом $\Lambda_{\text{ess}}(x)$ обозначен существенный спектр функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ (см. [14]).

4. Почти периодические на бесконечности функции.

4.1. Определения почти периодической на бесконечности функции. Далее символом $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначается однородное пространство функций, удовлетворяющее всем условиям (a)–(d) определения 1. В [13] были введены четыре определения почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ и доказана их эквивалентность. Мы приведем только два из них.

Первое определение (аппроксимационное) почти периодической на бесконечности функции строится на основе медленно меняющихся на бесконечности функций.

Определение 8. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и медленно меняющиеся на бесконечности функции $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\| < \varepsilon,$$

где функции e_k , $1 \leq k \leq n$, имеют вид $e_k(t) = e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$. Множество почти периодических на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать символом $AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Второе определение основано на понятии ε -периода на бесконечности и соответствует классическому определению Бора почти периодической функции (см. [10]).

Примером функции из $AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ является любая функция вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t) e^{i\lambda_k t}, \quad x_1, \dots, x_N \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$$

(обобщенные тригонометрические полиномы; см. [13]).

Определение 9. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{R}$ называется ε -периодом на бесконечности функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, если существует такая функция $x_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$, что

$$\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon.$$

Множество ε -периодов на бесконечности функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим символом $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$.

Определение 10. Множество Ω из $\mathbb{R}$ называется *относительно плотным* на $\mathbb{R}$, если существует такое $l > 0$, что $[t, t+l] \cap \Omega \neq \emptyset$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Определение 11. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$ ее ε -периодов на бесконечности относительно плотно на $\mathbb{R}$.

4.2. Ряд Фурье почти периодической на бесконечности функции. На основе построенных ранее рядов Фурье почти периодических векторов перейдем к построению рядов Фурье почти периодических на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Пусть $x \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ и ряд

$$\tilde{x} \sim \sum_{n \in \mathbb{J}_d} \tilde{y}_n, \quad \Lambda_B(\tilde{x}) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{J}_d\}, \quad \Lambda(y_n) = \lambda_n,$$

где $\mathbb{J}_d \subset \mathbb{Z}$ (см. формулу (3)), является рядом Фурье класса эквивалентности $\tilde{x} \in AP(\mathcal{X})$, построенного по функции x , где $\mathcal{X} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)/\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$.

Определение 12. Ряд

$$x(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{J}_d} x_n(t) e^{i\lambda_n t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где функции z_n , $n \in \mathbb{J}_d$, вида $z_n(t) = x_n(t) e^{i\lambda_n t}$, $t \in \mathbb{R}$, $x_n \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$, являются представителями соответствующих классов эквивалентности $\tilde{y}_n$, $n \in \mathbb{J}_d$, называется *рядом Фурье* функции x . Функции x_n , $n \in \mathbb{J}_d$, будем называть *коэффициентами Фурье* функции $x \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Следует отметить неединственность ряда Фурье функции $x \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

В [2, 3] было введено аналогичное понятие ряда Фурье для непрерывных почти периодических на бесконечности функций.

Теорема 3. Коэффициенты любого ряда Фурье функции $x \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ принадлежат пространству $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{\mathcal{F}} = 0. \quad (5)$$

Условие $x_n \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{J}_d$, следует из определения 8, а равенство (5) вытекает из теоремы 1.

5. Почти периодические на бесконечности распределения.

5.1. Гармоничные пространства распределений. Пусть X — комплексное банахово пространство. Символом $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$ обозначим пространство Шварца, т.е. линейное полинормированное пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow X$, удовлетворяющих следующему условию: для всех $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существует такое $C > 0$, что для всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|t^m \varphi^{(n)}(t)\|_X < C.$$

Такие функции называют *пробными*.

Будем говорить, что последовательность $(\varphi_k, k \in \mathbb{N})$, $\varphi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$, *сходится* к функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$, если при всех $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ последовательность $t \mapsto t^m \varphi_k^{(n)}(t)$, $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, равномерно сходится к функции $t \mapsto t^m \varphi^{(n)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Пусть $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}, X) \rightarrow X$ — линейный оператор. Будем обозначать значение оператора Φ на $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$ символом $\Phi(\varphi)$. Линейный оператор $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}, X) \rightarrow X$ называют *непрерывным*, если $\Phi(\varphi_k)$ сходится к $\Phi(\varphi)$, как только $\{\varphi_k\}$ сходится к φ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$. Всякий непрерывный линейный оператор $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}, X) \rightarrow X$ называют *распределением* (или *обобщенной функцией*) *медленного роста* на $\mathbb{R}$ со значениями в X . Обозначим символом $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ линейное пространство всех распределений медленного роста с естественными операциями сложения и умножения на число (более подробно для скалярных распределений из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ см. [9]).

Производной распределения $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ будем называть распределение $D\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$, определенное формулой

$$(D\Phi)(\varphi) = -\Phi(\dot{\varphi}), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X).$$

Отметим, что оператор дифференцирования $D : \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ является линейным и непрерывным. Из определения пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$ следует, что любое распределение $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ дифференцируемо бесконечное число раз.

Пусть $x \in S^1(\mathbb{R}, X)$ (в частности, x может быть непрерывной функцией). Ясно, что оператор Φ_x , действующий по правилу

$$\Phi_x(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} x(t) \varphi(t) dt, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X),$$

принадлежит пространству $\mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$. Распределение Φ_x , порожденное функцией $x \in S^1(\mathbb{R}, X)$, называют *регулярным*.

В пространстве распределений $\mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ действует группа $S : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ операторов сдвига

$$(S(t)F)(\varphi) = F(S(-t)\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Свертка распределения $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ с функцией $f \in L^1(\mathbb{R})$ определяется формулой

$$(f * F)(\varphi) = F(\tilde{f} * \varphi), \quad F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X), \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \quad (7)$$

где функция $\tilde{f}$ имеет вид $\tilde{f}(\tau) = f(-\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Далее будут введены гармоничные пространства распределений и изучены их свойства.

Рассмотрим последовательность $(f_n, n \in \mathbb{N})$ функций из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ вида

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{t^n}{n!} e^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Отметим, что преобразование Фурье $\hat{f}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ функции f_n , $n \in \mathbb{N}$, имеет вид

$$\hat{f}_n(\lambda) = \frac{1}{(i\lambda + 1)^n}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Каждому однородному пространству функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ можно поставить в соответствие счетное множество пространств $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{N}$, которые определяются как линейные пространства функций вида

$$\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) = \{f_n * x \mid x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

с нормой

$$\|f_n * x\|_{\mathcal{F}^{(n)}} = \|f_n * x\|_{\mathcal{F}} + \|x\|_{\mathcal{F}},$$

где функции f_n , $n \in \mathbb{N}$, задаются формулой (8). Отметим, что все пространства $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{N}$, также являются однородными.

Определение 13. Линейное подпространство $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ называется *гармоничным пространством распределений*, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что для любого распределения Φ из $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ найдется такая функция φ из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, что $\Phi = (D + I)^n \varphi$ и $\|\Phi\| = \|\varphi\|$. При этом для пространства $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ будем использовать обозначение $\mathcal{F}^{(-n)}(\mathbb{R}, X)$ и говорить, что пространство распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ *соответствует однородному пространству функций* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Такое определение гармоничного пространства распределений было введено в работе [12], посвященной медленно меняющимся и периодическим на бесконечности распределениям.

Заметим, что в определении 13 функция φ представима в виде $\varphi = f_n * \Phi$, где функция f_n из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ определяется формулой (8).

Под пространством $\mathcal{F}^{(0)}(\mathbb{R}, X)$ будем понимать само однородное пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$. Тогда каждому однородному пространству $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ можно поставить в соответствие счетное множество пространств $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Из определения 13 вытекает, что любое из этих пространств можно рассматривать как гармоничное пространство распределений.

В каждом из пространств $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, рассмотрим операторы

$$\mathbb{D}_n^m : D(\mathbb{D}_n^m) \subset \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}^{(n-m)}(\mathbb{R}, X), \quad \mathbb{D}_n^m = (D + I)^m, \quad (9)$$

$$\mathbb{D}_n^{-m} : D(\mathbb{D}_n^{-m}) \subset \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}^{(n+m)}(\mathbb{R}, X), \quad \mathbb{D}_n^{-m} \Phi = f_m * \Phi, \quad \Phi \in \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X), \quad (10)$$

где $m \in \mathbb{N}$ и функция f_m из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ определяется формулой (8).

Когда ясно, о каком именно пространстве идет речь, вместо обозначения $\mathbb{D}_n^m$ будем использовать более короткое обозначение $\mathbb{D}^m$, $m \in \mathbb{Z}$. При этом под оператором $\mathbb{D}_n^0$ будем понимать тождественный оператор I , действующий в соответствующем пространстве $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Следует отметить, что операторы $\mathbb{D}^m$, $m \in \mathbb{Z}$, обладают свойством $\mathbb{D}^m \mathbb{D}^{-m} = I$.

Кроме того, в каждом из пространств $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, рассмотрим оператор

$$\mathbb{S}_n(f) : \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$$

свертки распределения Φ из $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$ с функцией f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, задаваемый формулой

$$\mathbb{S}_n(f) \Phi = f * \Phi.$$

При $n = 0$ вместо $\mathbb{S}_0(f)$ будем писать просто $\mathbb{S}(f)$.

Далее символом $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать одно из пространств функций или распределений $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, рассматриваемое как гармоничное пространство распределений.

Теорема 4. Любое гармоничное пространство распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ изометрически изоморфно соответствующему однородному пространству функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Утверждение теоремы 4 следует непосредственно из определения 13. При этом изометрию осуществляет оператор $\mathbb{D}^n$ для соответствующего $n \in \mathbb{Z}$, определяемый одной из формул (9) или (10).

Из теоремы 4 следует, что каждое гармоничное пространство распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ образует банахов $L^1(\mathbb{R})$ -модуль, в котором действует группа S сдвигов вида (6) и модульная структура задается формулой (7), в которой распределение F принадлежит соответствующему гармоничному пространству распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$.

Гармоничным пространством распределений является, например, банахово пространство $M(\mathbb{R}, X)$ векторных (со значениями в X) борелевских мер ограниченной вариации на $\mathbb{R}$ со сверткой мер в качестве умножения.

5.2. Определения медленно меняющегося и почти периодического на бесконечности распределений. Теперь введем понятия медленно меняющегося и почти периодического на бесконечности распределений из гармоничного пространства распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$. В соответствии с определением 13 можно положить $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X) = \mathcal{F}^{(-n)}(\mathbb{R}, X)$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.

Для пространства $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ подпространства $\mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ и $\mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X)$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X) &= \{\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) : \Phi = \mathbb{D}^n y, y \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)\}, \\ \mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X) &= \{\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) : \Phi = \mathbb{D}^n y, y \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)\}.\end{aligned}$$

Определение 14. Распределение $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющимся на бесконечности*, если

$$S(\alpha)\Phi - \Phi \in \mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X) \quad \text{для всех } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Множество медленно меняющихся на бесконечности распределений обозначим $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

На основании определения 8 с использованием теоремы 4 дадим определение почти периодического на бесконечности гармоничного распределения.

Определение 15. Распределение $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодическим на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ и медленно меняющиеся на бесконечности распределения $\Phi_1, \dots, \Phi_m \in \mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, что

$$\left\| \Phi - \sum_{k=1}^m \Phi_k e_k \right\| < \varepsilon,$$

где функции e_k , $1 \leq k \leq m$, имеют вид $e_k(t) = e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$. Множество почти периодических на бесконечности распределений обозначим символом $AP_\infty \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$.

Непосредственно из определений 14 и 15 следует, что $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и $AP_\infty \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ образуют линейные замкнутые подпространства из $\mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$, инвариантные относительно группы сдвигов S .

Из теоремы 4 вытекают следующие две леммы.

Лемма 2. Пространства $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ изоморфны, то есть распределение $\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ является медленно меняющимся на бесконечности тогда и только тогда, когда функция $y = \mathbb{D}^{-n}\Phi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ является медленно меняющейся на бесконечности.

Лемма 3. Пространства $AP_\infty \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ и $AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ изоморфны, то есть распределение $\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ является почти периодическим на бесконечности тогда и только тогда, когда функция $y = \mathbb{D}^{-n}\Phi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ является почти периодической на бесконечности.

Тогда пространствам $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и $AP_\infty \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ можно дать следующие эквивалентные определения:

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) &= \{\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) : \Phi = \mathbb{D}^n y, y \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)\}, \\ AP_\infty \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) &= \{\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) : \Phi = \mathbb{D}^n y, y \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)\}.\end{aligned}$$

Таким образом, все результаты, справедливые для медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций из однородных пространств, справедливы также и для медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности гармоничных распределений соответственно.

В [12] изучались свойства медленно меняющихся и периодических на бесконечности распределений. В ней получена следующая теорема.

Теорема 5 (см. [12]). Пространство $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обладает следующими свойствами:

- (3) для того, чтобы распределение $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ принадлежало пространству $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * \Phi \in \mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\hat{f}(0) = 0$;
- (3) для того, чтобы распределение $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ принадлежало пространству $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * \Phi - \Phi \in \mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\hat{f}(0) = 1$;
- (3) если распределение Φ принадлежит пространству $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, то $\Lambda(\Phi) \setminus \{0\} \subset \Lambda_c(\Phi)$ и $\Lambda_{ess}(\Phi) \subset \{0\}$.

Вернемся теперь к рассмотрению почти периодических на бесконечности распределений. Другие определения таких распределений строятся аналогично соответствующим определениям для функций из однородных пространств. В частности, приведем определение, основанное на понятии ε -периода на бесконечности. Это определение соответствует второму определению почти периодической на бесконечности функции, приведенному в данной статье (см. определение 11).

Определение 16. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{R}$ называется ε -периодом на бесконечности распределения $\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$, если существует такое распределение $\Phi_0 \in \mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X)$, что

$$\|S(\omega)\Phi - \Phi - \Phi_0\| < \varepsilon.$$

Множество ε -периодов на бесконечности распределения $\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим $\Omega_\infty(\varepsilon, \Phi)$.

Определение 17. Распределение $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодическим на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(\varepsilon, \Phi)$ ее ε -периодов на бесконечности относительно плотно на $\mathbb{R}$.

Из леммы 3 следует, что так же, как и для функций из однородных пространств, приведенные определения почти периодических на бесконечности гармоничных распределений эквивалентны.

Таким образом, для медленно меняющихся и периодических на бесконечности распределений из гармоничных пространств справедливы результаты, аналогичные полученным для медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций из однородных пространств. В частности, это позволяет строить ряды Фурье почти периодических на бесконечности распределений из гармоничных пространств и изучать их свойства.

5.3. Ряд Фурье почти периодического на бесконечности распределения. Рассмотрим функции e_k , $k \in \mathbb{J}_d$, где $\mathbb{J}_d \subset \mathbb{Z}$ (см. формулу (3)), вида $e_k(t) = e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Определение 18. Рядом Фурье распределения $\Phi \in AP_\infty \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ будем называть ряд вида

$$\sum_{k \in \mathbb{J}_d} \Phi_k e_k,$$

где Φ_k , $k \in \mathbb{J}_d$, — такие распределения из $\mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$, что функции $y_k = \mathbb{D}^{-n} \Phi_k \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ являются коэффициентами Фурье функции $y = \mathbb{D}^{-n} \Phi \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ (см. определение 12). Такие распределения Φ_k , $k \in \mathbb{Z}$, будем называть *коэффициентами Фурье* распределения Φ .

Так же, как и для функций из $AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, отметим неединственность ряда Фурье распределения $\Phi \in AP_\infty \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$.

Из теорем 3 и 4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6. Коэффициенты любого ряда Фурье распределения $\Phi \in AP_\infty \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ принадлежат пространству $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и удовлетворяют условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Phi_k\|_{\mathbb{F}} = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков А. Г. Гармонический анализ в банаховых модулях и спектральная теория линейных операторов. — Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2016.
2. Баскаков А. Г. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве// Мат. заметки. — 2015. — 97, № 2. — С. 174–190.
3. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 1. — С. 77–128.
4. Баскаков А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов// Совр. мат. Фундам. направл. — 2004. — 9. — С. 3–151.
5. Баскаков А. Г. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений// Мат. заметки. — 1978. — 24, № 2. — С. 195–206.
6. Баскаков А. Г. Некоторые вопросы теории векторных почти периодических функций/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Воронеж: ВГУ, 1973.
7. Баскаков А. Г., Криштал И. А. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства// Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — 69, № 3. — С. 3–54.
8. Баскаков А. Г., Струкова И. И., Тришина И. А. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами// Сиб. мат. ж. — 2018. — 59, № 2. — С. 293–308.
9. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.
10. Левитан Б. М. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: МГУ, 1978.
11. Росс К., Хьюитт Э. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. — М.: Мир, 1975.
12. Струков В. Е., Струкова И. И. О медленно меняющихся и периодических на бесконечности функциях из однородных пространств и гармоничных распределениях// Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2018. — № 4. — С. 195–205.
13. Струков В. Е., Струкова И. И. О четырех определениях почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства// Науч. вед. БелГУ. Сер. Мат. Физ. — 2018. — 50, № 3. — С. 254–264.
14. Струкова И. И. Гармонический анализ периодических на бесконечности функций в однородных пространствах// Вестн. ВолГУ. Сер. 1. Мат. Физ. — 2017. — № 2 (39). — С. 29–38.
15. Струкова И. И. О теореме Винера для периодических на бесконечности функций// Сиб. мат. ж. — 2016. — 57, № 1. — С. 186–198.
16. Струкова И. И. Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы// Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2015. — № 3. — С. 161–165.
17. Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M., Neubrander F. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. — Basel: Birkhäuser, 2011.
18. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Spectral analysis of abstract parabolic operators in homogeneous function spaces// Mediter. J. Math. — 2016. — 13, № 5. — P. 2443–2462.
19. Baskakov A., Strukova I. Harmonic analysis of functions periodic at infinity// Eurasian Math. J. — 2016. — 7, № 4. — P. 9–29.

Струков Виктор Евгеньевич
Воронежский государственный университет
E-mail: sv.post.of.chaos@gmail.com