Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Струкова, О некоторых свойствах почти периодических на бесконечности функций из однородных пространств, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 171, 47–56

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-171-47-56>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:56:33

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ ИЗ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

© 2019 г. И. И. СТРУКОВА

Аннотация. В статье рассмотрены однородные пространства функций, заданных на всей вещественной оси, со значениями в комплексном банаховом пространстве. Введен в рассмотрение и изучен новый класс почти периодических на бесконечности функций из однородного пространства. Приведены четыре определения таких функций и доказана их эквивалентность. Построены ряды Фурье почти периодических на бесконечности функций и получены некоторые их свойства. В работе существенно использованы результаты теории изометрических представлений и теории банаховых модулей.

Ключевые слова: почти периодическая на бесконечности функция, медленно меняющаяся на бесконечности функция, однородное пространство, банахов модуль, почти периодический вектор, ряд Фурье.

ON SOME PROPERTIES OF ALMOST PERIODIC AT INFINITY OF FUNCTIONS FROM HOMOGENEOUS SPACES

© 2019 I. I. STRUKOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider homogeneous spaces of functions defined on the whole real axis with values in a complex Banach space. A new class of functions almost uniformly periodic at infinity from a homogeneous space is introduced and examined. Four definitions of such functions are proposed and their equivalence is proved. Fourier series of functions almost periodic at infinity are constructed and their properties are analyzed. In this paper, we essentially used results of the theory of isometric representations and the theory of Banach modules.

Keywords and phrases: function almost periodic at infinity, function slowly varying at infinity, homogeneous space, Banach module, almost periodic vector, Fourier series.

AMS Subject Classification: 33E30, 43A60

1. Однородные пространства функций. Пусть X — комплексное банахово пространство, $\text{End } X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X . Символом $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}, X)$ обозначим пространство локально суммируемых (измеримых по Бохнеру) на $\mathbb{R}$ (классов) функций со значениями в банаховом пространстве X . Через $S^p(\mathbb{R}, X)$, где $p \in [1, \infty)$, будем обозначать пространство Степанова (см. [13]), состоящее из функций $x \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}, X)$, для которых конечна величина

$$\|x\|_{S^p} = \sup_{s \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 \|x(s+t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty),$$

принимаемая за норму. Пространства Степанова играют важную роль при изучении дифференциальных уравнений в банаховом пространстве (см. [3, 4, 8–10]).

Определение 1. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ определенных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в X называется *однородным*, если выполнены следующие условия:

- (a) пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ содержится в пространстве $S^1(\mathbb{R}, X)$, причем вложение $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \subset S^1(\mathbb{R}, X)$ инъективно и непрерывно (инъективность означает инъективность оператора вложения);
- (b) в $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ определена и ограничена группа $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, операторов сдвигов функций

$$(S(t)x)(s) = x(s+t), \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X); \quad (1)$$

- (c) для любых функций $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ их свертка

$$(f * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)(S(-\tau)x)(t)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, причем выполнено неравенство

$$\|f * x\| \leq C\|f\|_1\|x\|,$$

где $C \geq 1$ — некоторая постоянная (как правило, $C = 1$);

- (d) $\varphi x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ и любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ с компактным носителем $\text{supp } \varphi$, причем

$$\|\varphi x\| \leq \|\varphi\|\|x\|$$

и отображение $t \mapsto \varphi S(t)x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ непрерывно.

Далее символом $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать однородное пространство; в случае $X = \mathbb{C}$ будем использовать более короткое обозначение $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Через $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ обозначим замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ вида

$$\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X) = \left\{ x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) : \text{функция } t \mapsto S(t)x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \text{ непрерывна} \right\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X).$$

Через $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим наименьшее замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, содержащее все функции φx , $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, где $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, X)$ бесконечно дифференцируема и $\text{supp } \varphi$ — компакт.

Приведем примеры однородных пространств:

- (1) пространства $L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$ измеримых по Лебегу и суммируемых со степенью $p \in [1, \infty)$ (классов) функций и пространство $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ существенно ограниченных (классов) функций;
- (2) пространства амальгам Винера $(L^p(\mathbb{R}, X), l^q(\mathbb{R}, X))$, $p \in [1, \infty)$, $q \in [1, \infty]$;
- (3) пространства Степанова $S^p = S^p(\mathbb{R}, X)$ для всех $p \in [1, \infty)$;
- (4) пространство $C_b(\mathbb{R}, X)$ ограниченных непрерывных функций и его подпространства:
 - (a) подпространство $C_{b,u}(\mathbb{R}, X) \subset C_b(\mathbb{R}, X)$ равномерно непрерывных функций,
 - (b) подпространство $C_0(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ непрерывных исчезающих на бесконечности функций,
 - (c) подпространство $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ медленно меняющихся на бесконечности функций (см. [16, 18, 19, 22]),
 - (d) подпространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$, состоящее из ω -периодических на бесконечности функций, $\omega \in \mathbb{R}_+$ (см. [16, 18, 19, 22]),
 - (e) подпространство $AP_\infty = AP_\infty(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ непрерывных почти периодических на бесконечности функций (см. [2, 3, 12]);
- (5) пространство $\mathbb{V}(\mathbb{R}, X) \subset L^\infty(\mathbb{R}, X)$ функций ограниченной вариации (см. [17]).

Непосредственно из определения 1 следует, что все перечисленные однородные пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ являются банаховыми $L^1(\mathbb{R})$ -модулями, в которых действует группа S сдвигов вида (1)

и модульная структура определяется сверткой функций (2). Таким образом, появляется возможность использования приведенных далее понятий и результатов из спектральной теории банаховых модулей над алгеброй $L^1(\mathbb{R})$. В частности, пространства $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ совпадают с пространствами S -непрерывных векторов (см. определение 2). В частности,

$$(L^p(\mathbb{R}, X))_c = L^p(\mathbb{R}, X), \quad (L^p(\mathbb{R}, X))_0 = L^p(\mathbb{R}, X), \quad (L^\infty(\mathbb{R}, X))_c = C_{b,u}(\mathbb{R}, X), \\ (C_b(\mathbb{R}, X))_c = C_{b,u}(\mathbb{R}, X), \quad (C_b(\mathbb{R}, X))_0 = C_0(\mathbb{R}, X).$$

2. Банаховы $L^1(\mathbb{R})$ -модули и спектр Берлинга. Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство, а $L^1(\mathbb{R})$ — банахова алгебра определенных на $\mathbb{R}$ измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных (классов) функций со сверткой функций в качестве умножения:

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Будем считать, что $\mathcal{X}$ является невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$ -модулем (см. [11, 14]), структура которого ассоциирована с некоторым ограниченным изометрическим представлением $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$, т.е. выполнены следующие условия:

- (2) из равенства $fx = 0$, справедливого для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, следует, что вектор $x \in \mathcal{X}$ — нулевой (свойство невырожденности банахова модуля $\mathcal{X}$);
- (2) для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{X}$, $t \in \mathbb{R}$, имеет место равенство

$$T(t)(fx) = (T(t)f)x = f(T(t)x)$$

(свойство ассоциированности модульной структуры на $\mathcal{X}$ с представлением $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$)

Если $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ — сильно непрерывное ограниченное представление, то формула

$$T(f)x = fx = \int_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)xdt, \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \quad x \in \mathcal{X}, \quad (3)$$

определяет на $\mathcal{X}$ структуру невырожденного банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля, ассоциированную с представлением T .

С каждым невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$ -модулем $\mathcal{X}$ ассоциировано единственное представление $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ (см. [11]). Чтобы это подчеркнуть, иногда используется обозначение $(\mathcal{X}, T)$.

Теория банаховых $L^1(\mathbb{R})$ -модулей была построена в [7] и изложена в [1, 5, 6, 11, 14, 20, 21].

Определение 2. Вектор из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $\mathcal{X}$ назовем *непрерывным* (относительно представления T) или *T -непрерывным*, если функция

$$\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}, \quad \varphi_x(t) = T(t)x, \quad t \in \mathbb{R},$$

непрерывна в нуле (и, значит, непрерывна на $\mathbb{R}$).

Совокупность всех T -непрерывных векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $\mathcal{X}$ обозначим через $\mathcal{X}_c$ или $(\mathcal{X}, T)_c$. Оно образует замкнутый *подмодуль* из $\mathcal{X}$, т.е. $\mathcal{X}_c$ — замкнутое линейное подпространство из $\mathcal{X}$, инвариантное относительно всех операторов $T(f)$, $T(t)$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$.

Любое однородное пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$ -модулем с модульной структурой, определяемой равенствами (2), и эта структура ассоциирована с представлением (группой сдвигов функций) $S : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Рассмотрим фактор-пространство $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X) = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) / \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$, которое является банаховым пространством с нормой

$$\|\tilde{x}\| = \inf_{y \in x + \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)} \|y\|,$$

где $\tilde{x} = x + \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ — класс эквивалентности, содержащий функцию $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом:

$$\tilde{x}\tilde{y} = \widetilde{xy}, \quad \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X).$$

В фактор-пространстве $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ структура банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля задается формулой (3), где в качестве представления T берется сильно непрерывная группа изометрических операторов $\tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$, задаваемая равенством $\tilde{S}(t)\tilde{x} = \widetilde{S(t)x}$ для любой функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Далее через $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Определение 3. Спектром Берлинга вектора $x \in \mathcal{X}$ называется множество чисел $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$ вида

$$\Lambda(x) = \left\{ \lambda_0 \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \text{ для любой функции } f \in L^1(\mathbb{R}), \text{ где } \hat{f}(\lambda_0) \neq 0 \right\}.$$

Из определения следует, что

$$\Lambda(x) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \mu_0 \in \mathbb{R} : \text{существует такая функция } f \in L^1(\mathbb{R}), \text{ что } \hat{f}(\mu_0) \neq 0 \text{ и } fx = 0 \right\}.$$

Справедливы следующие свойства спектра Берлинга векторов из комплексного банахова пространства X (см. [5, 11]).

Лемма 1. Для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathcal{X}$ справедливы следующие утверждения:

- (1) из условия $fx = 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ следует, что $x = 0$ (т.е. $L^1(\mathbb{R})$ -модуль $\mathcal{X}$ невырожден);
- (2) $\Lambda(x)$ — замкнутое подмножество из $\mathbb{R}$, причем $\Lambda(x) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
- (3) $\Lambda(fx) \subset (\text{supp } \hat{f}) \cap \Lambda(x)$;
- (4) $fx = 0$, если $(\text{supp } \hat{f}) \cap \Lambda(x) = \emptyset$, и $fx = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\hat{f} = 1$ в некоторой его окрестности;
- (5) $\Lambda(x) = \{\lambda_0\}$ — одноточечное множество тогда и только тогда, когда вектор $x \neq 0$ удовлетворяет равенствам $T(t)x = e^{i\lambda_0 t}x$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. x — собственный вектор банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $(\mathcal{X}, T)$.

Определение 4. Число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ отнесем к существенному спектру $\Lambda_{\text{ess}}(x)$ вектора x из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $(\mathcal{X}, T)$, если существует λ_0 -направленность (f_α) из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, для которой выполнено условие

$$\overline{\lim}_{\alpha} \|f_\alpha x\| > 0.$$

Отметим, что $\Lambda_{\text{ess}}(x) \subseteq \Lambda(x)$, $x \in (\mathcal{X}, T)$.

Определение 5. Пусть x — ненулевой вектор из $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $(\mathcal{X}, T)$. Число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ из $\Lambda(x)$ назовем эргодической точкой вектора x , если для некоторой λ_0 -направленности из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ существует

$$\lim_{\alpha} f_\alpha x = x_0 \in \mathcal{X}.$$

Множество эргодических точек вектора будем обозначать символом $\Lambda_{\text{erg}}(x)$. Если $x_0 = 0$, то число λ_0 отнесем к непрерывному спектру $\Lambda_c(x)$ вектора x . Множество

$$\Lambda_B(x) = \left\{ \lambda_0 \in \Lambda_{\text{erg}}(x) : \lim_{\alpha} f_\alpha x \neq 0 \right\}$$

называется спектром Бора (дискретным спектром) вектора $x \in \mathcal{X}$.

Определение 6. Вектор x_0 из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $(\mathcal{X}, T)$ называется почти периодическим (относительно представления T), если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- (1) для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\Omega_{\varepsilon, x_0} = \left\{ \omega \in \mathbb{R} : \|T(\omega)x_0 - x_0\| < \varepsilon \right\}$$

- ε -периодов вектора x_0 относительно плотно¹ на $\mathbb{R}$;
- (2) орбита $\{T(t)x_0, t \in \mathbb{R}\}$ вектора x_0 предкомпактна в $\mathcal{X}$;
- (3) для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и собственные векторы $x_1, \dots, x_N$ представления T , соответствующие этим числам (т.е. $T(t)x_k = e^{i\lambda_k t}x_k, t \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq N$), что

$$\left\| x_0 - \sum_{k=1}^N x_k \right\| < \varepsilon;$$

- (4) функция $t \mapsto \varphi(t) = T(t)x_0, t \in \mathbb{R}$, — непрерывная почти периодическая функция, т.е. $\varphi \in AP(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ (см. [5, 13]).

Множество $AP(\mathcal{X}) = AP(\mathcal{X}, T)$ почти периодических векторов из $\mathcal{X}$ образует замкнутое подпространство в $\mathcal{X}$ и является замкнутым подмодулем из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $\mathcal{X}$. Кроме того, имеет место включение $AP(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}_c$.

Определение 7. Преобразованием Бора почти периодического вектора $x \in AP(\mathcal{X})$ назовем функцию $\hat{x}_B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$, определенную равенствами

$$\hat{x}_B(\lambda) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha T(\tau) x e^{-i\lambda\tau} d\tau = \lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{\varepsilon^{-1}} T(\tau) x e^{-(\varepsilon+i\lambda)\tau} d\tau = \lim_j f_j x, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

где (f_j) — любая λ -направленность из алгебры $L^1(\mathbb{R})$.

Отметим, что имеет место свойство единственности: если преобразование Бора $\hat{x}_B$ вектора $x \in AP(\mathcal{X})$ равно нулю, то $x = 0$.

Преобразование Бора вектора является основой для определения коэффициентов Фурье почти периодических на бесконечности функций (см. [3]). Носитель $\text{supp } \hat{x}_B$, функции $\hat{x}_B$ совпадает со спектром Бора $\Lambda_B(x)$ вектора x и это множество не более чем счетно. Тогда справедливо представление

$$\text{supp } \hat{x}_B = \Lambda_B(x) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{J}_d\}, \quad (4)$$

где $\mathbb{J}_d \subset \mathbb{Z}$, причем имеют место равенства

$$T(t)x_n = e^{i\lambda_n t}x_n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{J}_d,$$

где векторы $x_n, n \in \mathbb{J}_d$, являются собственными векторами представления T (а также генератора iA группы операторов T , т.е. $Ax_n = i\lambda_n x_n, n \in \mathbb{J}_d$), причем $\Lambda(x_n) = \{\lambda_n\}, n \in \mathbb{J}_d$. Ряд

$$x \sim \sum_{n \in \mathbb{J}_d} x_n, \quad (5)$$

где $x_n = \hat{x}_B(\lambda_n), n \in \mathbb{J}_d$, назовем *рядом Фурье* вектора $x \in AP(\mathcal{X})$ (относительно представления (4)). Отметим, что если этот ряд абсолютно сходится, т.е. выполнено условие $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty$, то $x = \sum_{n \in \mathbb{J}_d} x_n$.

Лемма 2. Пусть вектор x из $AP(\mathcal{X})$ имеет ряд Фурье вида (5) (согласно представлению (4)). Тогда для любой функции f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ вектор fx принадлежит $AP(\mathcal{X})$ и имеет ряд Фурье вида

$$fx \sim \sum_{n \in \mathbb{J}_d} \hat{f}(\lambda_n) x_n$$

(относительно разложения (4)).

¹Множество $\Omega \subset \mathbb{R}$ называется *относительно плотным* на $\mathbb{R}$, если существует такое число $l > 0$, что любой промежуток $[t, t+l], t \in \mathbb{R}$, содержит хотя бы одну точку множества Ω .

Доказательство. Свойство $fx \in AP(\mathcal{X})$ легко следует из любого из условий (1)–(4) определения 6. Непосредственно из определения преобразования Бора векторов из $AP(\mathcal{X})$ следует, что

$$(\widehat{fx})_B(\lambda_n) = \lim_{\alpha} f_{\alpha}(fx) = \lim_{\alpha} f(f_{\alpha}x) = f\widehat{x}_B(\lambda_n) = \widehat{f}(\lambda_n)\widehat{x}_B(\lambda_n) = \widehat{f}(\lambda_n)x_n, \quad n \in \mathbb{J}_d,$$

где (f_{α}) — некоторая λ_n -направленность из алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Тогда утверждение леммы 2 вытекает непосредственно из определения ряда Фурье почти периодического вектора. $\square$

Из леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть вектор x из $AP(\mathcal{X})$ имеет ряд Фурье вида (5) (согласно представлению (4)), причем последовательность $(\lambda_n, n \in \mathbb{J}_d)$ обладает свойством

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - f_n x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{|\lambda_k| < n} \widehat{f}_0\left(\frac{\lambda_k}{n}\right) x_k \right\|,$$

где векторы $x_k, k \in \mathbb{J}_d$, взяты из разложения вектора x в ряд Фурье (5).

Следствие 1. Для любого почти периодического вектора $x \in AP(\mathcal{X})$ имеют место равенства

$$\Lambda(x) = \overline{\Lambda_B(x)}, \quad \Lambda_{\text{erg}}(x) = \mathbb{R}.$$

Лемма 4. Преобразование Бора $\widehat{x}_B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ любого вектора x из $AP(\mathcal{X})$ допускает оценку

$$\|\widehat{x}_B(\lambda)\| \leq \|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. При определении вектора $\widehat{x}_B(\lambda) = \lim f_{\alpha}x, x \in AP(\mathcal{X})$, будем использовать λ -направленность (f_{α}) из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, которая является инвариантным интегралом. Тогда $\|f_{\alpha}\| = \widehat{f_{\alpha}}(0) = 1$ для любого α и поэтому

$$\|\widehat{x}_B(\lambda)\| \leq \sup_{\alpha} \|f_{\alpha}\| \|x\| = \|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Лемма 5. Для любого вектора x из $AP(\mathcal{X})$ с рядом Фурье (5) справедливо условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0.$$

Доказательство. С учетом представления (4) и равенства $x_n = \widehat{x}_B(\lambda_n), n \in \mathbb{J}_d$, достаточно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{x}_B(\lambda_n)\| = 0.$$

Из условия (3) определения 6 следует, что существует последовательность $(a_n, n \in \mathbb{N})$ векторов из $AP(\mathcal{X})$, носители $\widehat{(a_n)_B}, n \geq 1$, преобразований Бора которых конечны. Из леммы 4 следует, что

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\widehat{x}_B(\lambda) - \widehat{(a_n)_B}(\lambda)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

и поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{x}_B(\lambda_n)\| = 0. \quad \square$$

3. Почти периодические на бесконечности функции.

3.1. *Четыре определения почти периодической на бесконечности функции.* Далее символом $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначается однородное пространство функций, удовлетворяющее всем условиям (a)–(d) определения 1. Сформулируем четыре определения почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Первое определение основано на понятии ε -периода на бесконечности.

Сначала введем определения ε -периода на бесконечности и почти периодической на бесконечности функции для непрерывных функций. Такие функции были введены в [2, 3].

Определение 8. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{R}$ называется ε -периодом на бесконечности функции $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$, если существует такое число $a(\varepsilon) > 0$, что

$$\sup_{|t| \geq a(\varepsilon)} \|x(t + \omega) - x(t)\| < \varepsilon.$$

Множество ε -периодов на бесконечности функции $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ обозначим $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$.

Определение 9. Множество Ω из $\mathbb{R}$ называется *относительно плотным* на $\mathbb{R}$, если существует такое $l > 0$, что $[t, t + l] \cap \Omega \neq \emptyset$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Определение 10. Функция $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$ ее ε -периодов на бесконечности относительно плотно на $\mathbb{R}$.

Определение 10 (данное в [2]) соответствует определению Бора (см. [13, 23]) почти периодической функции, заданной на $\mathbb{R}$. Из него следует, что каждая непрерывная почти периодическая (по Бору) функция $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ является почти периодической на бесконечности (в смысле определения 10).

Определение 11. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{R}$ называется ε -периодом на бесконечности функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, если существует такая функция $x_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$, что

$$\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon.$$

Множество ε -периодов на бесконечности функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$.

Определение 12. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$ ее ε -периодов на бесконечности относительно плотно на $\mathbb{R}$. Множество почти периодических на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим $AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Определение 13. Множество функций $M \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ назовем *предкомпактным на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число функций $x_1, \dots, x_n$ из M , удовлетворяющих следующему условию: для любой функции $x \in M$ найдутся такие функция $x_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ и функция x_k ($1 \leq k \leq n$), что

$$\|x - x_k - x_0\| < \varepsilon.$$

Определение 14. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если множество $M = \{S(k)x, k \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно на бесконечности.

Отметим, что функции вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t) e^{i\lambda_k t}, \quad x_1, \dots, x_N \in \mathcal{F}_{sl, \infty}(\mathbb{R}, X), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$$

(обобщенные тригонометрические полиномы) являются почти периодическими на бесконечности в смысле определения 14.

Для $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ определение 14 соответствует критерию С. Бохнера (см. [13]) почти периодичности функций. Если $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$, то пространство $AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначается символом $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$.

Для формулировки третьего определения почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства нам потребуется ввести понятие медленно меняющейся на бесконечности функции из однородного пространства.

Определение 15. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если

$$(S(t)x - x) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X) \quad \text{для любого } t \in \mathbb{R}.$$

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим символом $\mathcal{F}_{sl,\infty} = \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Непосредственно из определения следует, что $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ образует линейное замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, инвариантное относительно (полу)группы сдвигов S .

Например, медленно меняющейся на бесконечности является функция $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ вида $x(t) = c + x_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где c — вектор из банахова пространства X и x_0 — любая функция из $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$.

Определение 16. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и медленно меняющиеся на бесконечности функции $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\| < \varepsilon,$$

где функции e_k , $1 \leq k \leq n$, имеют вид $e_k(t) = e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Определение 17. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если класс эквивалентности $\tilde{x} = x + \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ является почти периодическим вектором из пространства $\mathcal{X} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)/\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$, в котором действует изометрическое представление $\tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ (т.е. $\{S(t)x, t \in \mathbb{R}\}$ — предкомпактное множество в фактор-пространстве $\mathcal{X}$ или, что эквивалентно, функция $t \mapsto \tilde{S}(t)x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ является непрерывной и почти периодической).

Для $\mathcal{F}_c(\mathbb{J}, X) = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ определение 14 соответствует критерию С. Бохнера (см. [13]) почти периодичности функций, определения 16 и 17 почти периодических на бесконечности функций даны в [2, 3, 12]. При $\mathcal{F}_c(\mathbb{J}, X) = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ пространство $AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$ обозначается символом $AP_\infty(\mathbb{J}, X)$.

Теорема 1. Все четыре определения почти периодической на бесконечности функции (определения 12, 14, 16, 17) эквивалентны. Множество $AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ почти периодических на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ образует банахово пространство.

Доказательство. Рассмотрим фактор-пространство $\mathcal{X} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)/\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ и определенную выше группу изометрий $T = \tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$. Для этого представления определение 16 соответствует свойству (3) из определения 6. Поскольку все свойства из определения 6 эквивалентны, достаточно показать, что первые три его свойства эквивалентны определениям 12, 14 и 16 соответственно.

Пусть $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ и $\tilde{x}$ — класс эквивалентности в $\mathcal{X}$, построенный по функции x . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x; \mathcal{F}_0; \varepsilon) \cup (-\Omega_\infty(x; \mathcal{F}_0; \varepsilon))$ совпадает с множеством $\Omega(\tilde{x}, \varepsilon)$, состоящим из ε -периодов класса $\tilde{x}$. Следовательно, соответствующие определения эквивалентны.

Эквивалентность определения 14 и свойства (2) определения 6 непосредственно следует из определения фактор-модуля $\mathcal{X} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Докажем эквивалентность аппроксимационного определения 16 и свойства (4) из определения 6. Для доказательства достаточно установить, что спектр Берлинга $\Lambda(\tilde{y})$ класса эквивалентности $\tilde{y} \in \mathcal{X}$, $\tilde{y} = y + \mathcal{F}_0$, является одноточечным множеством ($\Lambda(\tilde{y}) = \{\lambda_0\}$) тогда и только тогда, когда функция $y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ представима в виде $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{R}$, где $y_0 \in (\mathcal{F}_0)_{sl,\infty}$.

Если $\Lambda(\tilde{y}) = \{\lambda_0\}$, то $\tilde{S}(t)\tilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\tilde{y}$ для любого $t \in \mathbb{R}$ (см. свойство (5) из леммы 1). Следовательно, $\Lambda(\tilde{y}_0) = \{0\}$, где $y_0(s) = y(s)e^{-i\lambda_0 s}$, $s \in \mathbb{R}$, и поэтому $\tilde{S}(t)\tilde{y}_0 = \tilde{y}_0$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, $S(t)y_0 - y_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. $y_0 \in (\mathcal{F}_0)_{sl,\infty}$.

Обратно, если $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{R}$, где $y_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$, то $\tilde{S}(t)\tilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\tilde{y}$, $t \in \mathbb{R}$, и поэтому в силу свойства (5) из леммы 1 получим, что $\Lambda(\tilde{y}) = \{\lambda_0\}$. $\square$

3.2. Ряды Фурье почти периодических на бесконечности функций. На основе построенных ранее рядов Фурье почти периодических векторов перейдем к построению рядов Фурье почти периодических на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Пусть $x \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ и ряд

$$\tilde{x} \sim \sum_{n \in \mathbb{J}_d} \tilde{y}_n, \quad \Lambda_B(\tilde{x}) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{J}_d\}, \quad \Lambda(y_n) = \lambda_n,$$

где $\mathbb{J}_d \subset \mathbb{Z}$ (см. формулу (4)), является рядом Фурье класса эквивалентности $\tilde{x} \in AP(\mathcal{X})$, построенного по функции x .

Определение 18. Ряд

$$x(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{J}_d} x_n(t)e^{i\lambda_n t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

где функции z_n , $n \in \mathbb{J}_d$, вида $z_n(t) = x_n(t)e^{i\lambda_n t}$, $t \in \mathbb{R}$, $x_n \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$, являются представителями соответствующих классов эквивалентности $\tilde{y}_n$, $n \in \mathbb{J}_d$, называется *рядом Фурье* функции x . Функции x_n , $n \in \mathbb{J}_d$, будем называть *коэффициентами Фурье* функции $x \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Следует отметить неединственность ряда Фурье функции $x \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

В [2, 3] было введено аналогичное понятие ряда Фурье для непрерывных почти периодических на бесконечности функций.

Теорема 2. Коэффициенты любого ряда Фурье функции $x \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ принадлежат пространству $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{\mathcal{F}} = 0. \quad (7)$$

Условие $x_n \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{J}_d$, следует из определения 16, а равенство (7) вытекает из леммы 5.

В следующей теореме, полученной в [15], содержатся свойства медленно меняющихся на бесконечности функций, используемые в дальнейшем.

Теорема 3. Если $x \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, то существует такая функция $x_0 \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, что $x - x_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$. Кроме того, найдется ограниченная целая функция $y_0 : \mathbb{R} \rightarrow X$, допускающая расширение на $\mathbb{C}$ до ограниченной целой функции сколь угодно малого экспоненциального типа и удовлетворяющая условию $x - y_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$.

Из теорем 2 и 3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. По любой функции $x \in AP_\infty \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ можно построить такой ряд Фурье (6), что $x_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{J}_d$. Более того, функции x_n могут быть выбраны так, что они допускают расширение на $\mathbb{C}$ до ограниченных целых функций сколь угодно малого экспоненциального типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков А. Г. Гармонический анализ в банаховых модулях и спектральная теория линейных операторов. — Воронеж: ВГУ, 2016.
2. Баскаков А. Г. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве // Мат. заметки. — 2015. — 97, № 2. — С. 174–190.
3. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 1. — С. 77–128.
4. Баскаков А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — 73, № 2. — С. 3–68.

5. Баскаков А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов// Совр. мат. Фундам. направл. — 2004. — 9. — С. 3–151.
6. Баскаков А. Г. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений// Мат. заметки. — 1978. — 24, № 2. — С. 195–206.
7. Баскаков А. Г. Некоторые вопросы теории векторных почти периодических функций/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Воронеж: ВГУ, 1973.
8. Баскаков А. Г., Диденко В. Б. О состояниях обратимости разностных и дифференциальных операторов// Изв. РАН. Сер. мат. — 2018. — 82, № 1. — С. 3–16.
9. Баскаков А. Г., Дуплищева А. Ю. Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка// Изв. РАН. Сер. мат. — 2015. — 79, № 2. — С. 3–20.
10. Баскаков А. Г., Калужина Н. С., Поляков Д. М. Медленно меняющиеся на бесконечности полугруппы операторов// Изв. вузов. Мат. — 2014. — № 7. — С. 3–14.
11. Баскаков А. Г., Криштал И. А. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства// Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — 69, № 3. — С. 3–54.
12. Баскаков А. Г., Струкова И. И., Тришина И. А. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами// Сиб. мат. ж. — 2018. — 59, № 2. — С. 293–308.
13. Левитан Б. М. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: МГУ, 1978.
14. Росс К., Хьюитт Э. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. — М.: Мир, 1975.
15. Струков В. Е., Струкова И. И. О медленно меняющихся и периодических на бесконечности функциях из однородных пространств и гармоничных распределениях// Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2018. — № 4. — С. 195–205.
16. Струкова И. И. О теореме Винера для периодических на бесконечности функций// Сиб. мат. ж. — 2016. — 57, № 1. — С. 186–198.
17. Струкова И. И. Периодические на бесконечности функции ограниченной вариации// Науч. вед. БелГУ. Сер. Мат. Физ. — 2016. — 44, № 20 (241). — С. 50–59.
18. Струкова И. И. Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы// Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2015. — № 3. — С. 161–165.
19. Струкова И. И. О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2014. — 14, № 1. — С. 28–38.
20. Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M., Neubrander F. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. — Basel: Birkhäuser, 2011.
21. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Spectral analysis of abstract parabolic operators in homogeneous function spaces// Mediter. J. Math. — 2016. — 13, № 5. — P. 2443–2462.
22. Baskakov A., Strukova I. Harmonic analysis of functions periodic at infinity// Eurasian Math. J. — 2016. — 7, № 4. — P. 9–29.
23. Bohr H. Almost periodic functions// Acta Math. — 1925. — 45. — P. 29–127.

Струкова Ирина Игоревна
Воронежский государственный университет
E-mail: irina.k.post@yandex.ru