Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Фарков, Конечные фреймы Парсеваля в анализе Уолша, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 170, 118–128

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-170-118-128>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:17:50

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 170 (2019). С. 118–128
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-170-118-128

УДК 517.518, 519.614

КОНЕЧНЫЕ ФРЕЙМЫ ПАРСЕВАЛЯ В АНАЛИЗЕ УОЛША

© 2019 г. Ю. А. ФАРКОВ

Аннотация. Изложены методы построения конечных фреймов Парсеваля с помощью матриц Уолша и дискретного преобразования Виленкина—Крестенсона.

Ключевые слова: функция Уолша, фрейм, ортогональный всплеск, дискретное преобразование, проблема Кадисона—Зингера.

FINITE PARSEVAL FRAMES IN WALSH ANALYSIS

© 2019 YU. A. FARKOV

ABSTRACT. Methods for constructing finite Parseval frames by using Walsh matrices and the discrete Vilenkin—Chrestenson transform are described.

Keywords and phrases: Walsh function, frame, orthogonal wavelet, discrete transformation, Kadison—Singer problem.

AMS Subject Classification: 42C15, 42C40

1. Введение. Теория конечных фреймов активно развивалась последние пятнадцать лет (см. библиографию в [34]) прежде всего в связи с приложениями в таких областях, как обработка сигналов, квантовая теория информации, многомерные ортогональные полиномы и сплайны, а также в теории сжатых измерений (compressed sensing). Основопологающие факты теории фреймов и её приложений содержатся в монографиях [5, 7, 9, 20], а некоторые недавние результаты о многомерных всплесковых фреймах изложены в [28]. Фреймы активно применяются для анализа полноты, устойчивости и избыточности дискретных представлений сигналов. Понятие фрейма Парсеваля обобщает понятие ортонормированного базиса на системы, не обладающие свойством минимальности (см., например, [9, § 1.8]). В настоящей статье излагаются методы построения конечных фреймов Парсеваля с помощью функций Уолша и дискретного преобразования Виленкина—Крестенсона.

Хорошо известно, что функции Уолша можно интерпретировать как характеры двоичной группы Кантора, а обобщениями функций Уолша являются характеры групп Виленкина (см., например, [1, 4, 30, 32, 32]). Локально компактная канторова группа C может быть определена как аддитивная группа диадического поля $\mathbb{F}$. Первые примеры ортогональных всплесков на группе C были найдены в [29], а полученные к настоящему времени результаты о всплесках на группах Кантора и Виленкина изложены в книге [25] и обзорных статьях [14, 22]. В [21] фреймы на группе C были определены с помощью допустимого условия Добеши и обобщенных ядер Дирихле. Кратномасштабный анализ для построения фреймов Парсеваля на группах Виленкина применялся в [15, 22–24]. В разделе 2 настоящей статьи приведены используемые в дальнейшем обозначения и краткие сведения о дискретных функциях Уолша. В разделе 3 показано, как для построения фреймов Парсеваля применяются матрицы Уолша. В связи с проблемой Кадисона—Зингера приведен недавний результат [16] о расщеплении конечных фреймов Парсеваля. В заключительном

разделе 4 доказано обобщение теоремы о фреймах в пространствах периодических последовательностей, сформулированной в [10], и приведен алгоритм построения фреймов Парсеваля с помощью дискретного преобразования Виленкина—Крестенсона.

2. Дискретные функции Уолша. Как обычно, через $\mathbb{Z}_+$ и $\mathbb{N}$ обозначаются множества целых неотрицательных и натуральных чисел соответственно. Система Уолша $\{w_l : l \in \mathbb{Z}_+\}$ является ортонормированным базисом в $L^2[0, 1]$ и определяется следующим образом (см. [4, 30]). Пусть функция $r_0(x)$ имеет период 1 и задана на интервале $[0, 1)$ по формуле

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2), \\ -1, & x \in [1/2, 1). \end{cases}$$

Тогда

$$w_0(x) \equiv 1, \quad w_l(x) = \prod_{j=1}^k (r_0(2^{j-1}x))^{\nu_j}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad x \in [0, 1],$$

где ν_j — цифры двоичного разложения числа l :

$$l = \sum_{j=1}^k \nu_j 2^{j-1}, \quad \nu_j \in \{0, 1\}, \quad \nu_k = 1, \quad k = k(l).$$

При $0 \leq l \leq 2^n - 1$ функции Уолша $w_l(x)$ постоянны на двоичных интервалах $[k/2^n, (k+1)/2^n)$, а значения $w_{lk} = w_l(k/2^n)$ задают матрицу Уолша $W_n = [w_{lk}]_{l,k=0}^{2^n-1}$. В частности, имеем

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

При любом натуральном n матрица W_n симметрична и удовлетворяет соотношениям ортогональности

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} w_{lj} w_{kj} = \sum_{i=0}^{2^n-1} w_{il} w_{ik} = 2^n \delta_{lk}, \quad l, k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}, \quad (1)$$

где δ_{lk} — символ Кронекера. Строки матриц W_n называют *дискретными функциями Уолша*, упорядоченными по Пэли (см., например, [8, гл. 2]).

На практике часто используют функции Уолша, упорядоченные по Адамару (см., например, [6, 8]). По определению $H_1 := W_1$, а матрица $H_n = [h_{lk}]_{l,k=0}^{2^n-1}$ совпадает с n -й кронекеровой степенью матрицы H_1 . Например, для $n = 2$ имеем

$$H_2 = H_1 \otimes H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Используемый в MATLAB рекурсивный метод Сильвестра генерирования матриц H_n основан на тождестве $H_{n+1} = H_1 \otimes H_n$. Матрицы H_n симметричны, обладают свойством ортогональности вида (1) и служат основным примером матриц Адамара, имеющих многочисленные применения в обработке сигналов (см. [8, гл. 2], [2, 26, 31]). Более 100 лет остается не доказанной гипотеза о существовании для любого натурального m матрицы Адамара порядка $4m$ (см., например, недавнюю статью [17]). Отметим также, что если известны цифры двоичных разложений

$$l = \sum_{j=1}^n l_j 2^{j-1}, \quad k = \sum_{j=1}^n k_j 2^{j-1}, \quad l_j, k_j \in \{0, 1\},$$

то элементы матриц W_n и H_n вычисляются по формулам

$$w_{lk} = (-1)^{w(l,k)}, \quad h_{lk} = (-1)^{h(l,k)}, \quad (2)$$

где

$$w(l, k) = \sum_{j=1}^n l_j k_{n-j+1}, \quad h(l, k) = \sum_{j=1}^n l_j k_j, \quad l, k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}.$$

Используемые в разделе 4 обобщения функций Уолша называют *функциями Крестенсона* или *функциями Виленкина—Крестенсона* (см. исторические сведения и библиографию в [2, 4, 6]).

3. Фреймы Парсеваля, определяемые по матрицам Уолша. В [3] найдены ортонормированные базисы в собственных подпространствах дискретного преобразования Уолша и построены соответствующие этим базисам фреймы Парсеваля. В дополнение к этому результату обсудим взаимосвязи между конечными фреймами Парсеваля и матрицами Уолша. Хорошо известна следующая характеристика фреймов Парсеваля для пространства $\mathbb{C}^d$ произвольной размерности d .

Предложение 3.1. Пусть Λ — матрица размера $d \times s$, столбцами которой являются векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s$ пространства $\mathbb{C}^d$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $\Lambda \Lambda^* = I_d$, где I_d — единичная матрица порядка d ;
- (ii) строки матрицы Λ образуют ортонормированную систему в $\mathbb{C}^s$;
- (iii) векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s$ образуют фрейм Парсеваля для $\mathbb{C}^d$.

Пусть $N = 2^n$, где n — натуральное число. Напомним, что векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s$ образуют фрейм Парсеваля для $\mathbb{C}^N$, если для каждого $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^s |\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle|^2$$

или, эквивалентно,

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^s \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle \mathbf{v}_k.$$

Здесь $s \geq N$, причем в случае $s = N$ фрейм $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s\}$ является ортонормированным базисом в $\mathbb{C}^N$. Для произвольной ортогональной матрицы G размера $N \times N$ выберем $m < N$, запишем

$$G = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m \mid \mathbf{g}_{m+1}, \dots, \mathbf{g}_N]$$

и определим матрицу $G_1 \in \mathbb{R}^{N \times m}$ равенством $G_1 = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m]$. Обозначим через $V = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N]$ матрицу, сопряжённую к G_1 . Согласно предложению 3.1 векторы $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$ образуют фрейм Парсеваля для $\mathbb{C}^m$. В [16] эта конструкция применяется к нормализованной матрице Уолша $H_n/\sqrt{N}$, а фрейм Парсеваля, определённый столбцами полученной таким способом матрицы

$$V = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N] \in \mathbb{R}^{m \times N}, \quad (3)$$

называется *фреймом Уолша*. Легко видеть, что $\|\mathbf{v}_j\| = \sqrt{m/N}$ для всех $j \in \{1, \dots, N\}$.

Что произойдет, если попытаться расщепить фрейм Уолша на два равных фрейма? Этот вопрос имеет отношение к известной проблеме Кадисона—Зингера. В 1959 г. эта проблема была сформулирована следующим образом (см. [27]): «Does every pure state on the (abelian) von Neumann algebra D of bounded diagonal operators on the Hilbert space ℓ^2 have a unique extension to a state on $B(\ell^2)$, the von Neumann algebra of all bounded linear operators on ℓ^2 ?» Проблема Кадисона—Зингера решена в 2013 г. и эквивалентна ряду других известных задач: о базисах гильбертова пространства, о замощении бесконечных матриц, о разбиениях фреймов, об обратимости конечных матриц с доминирующей диагональю, о тригонометрических суммах на канторовых множествах, о комбинаторных свойствах систем векторов в $\mathbb{R}^d$ (см., например, [19, 33]). Основные результаты о конечномерных интерпретациях проблемы Кадисона—Зингера анализируются в [18] (см. также [12]). Следующее предложение было сформулировано в [35]; оно иногда называется «утверждением WDS» (weaver discrepancy statement).

Предложение 3.2. Пусть векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s$ образуют фрейм Парсеваля для $\mathbb{C}^d$. Предположим, что $\|\mathbf{v}_j\|^2 \leq \alpha$ для всех $j \in \{1, \dots, s\}$. Тогда существует такое разбиение множества

индексов $J = \{1, \dots, s\}$ на два непересекающихся подмножества J_1 и J_2 , что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^d$, $\|\mathbf{x}\| = 1$ выполняются неравенства

$$\left| \sum_{j \in J_k} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_j \rangle|^2 - \frac{1}{2} \right| \leq 5\sqrt{\alpha}, \quad k = 1, 2.$$

Из равенства

$$H_n = \begin{bmatrix} H_{n-1} & H_{n-1} \\ H_{n-1} & -H_{n-1} \end{bmatrix}$$

видно, что при $m \leq N/2$ фрейм Парсеваля $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$ для $\mathbb{C}^m$, заданный матрицей (3), разбивается на два одинаковых жёстких фрейма для $\mathbb{C}^m$, соответствующим матрицам

$$V_1 = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{N/2}], \quad V_2 = [\mathbf{v}_{N/2+1}, \dots, \mathbf{v}_N],$$

причем $V_1 V_1^* = V_2 V_2^* = I_{m/2}$.

Пример 3.1. Пусть $m = 3$ и $N = 8$. Тогда изложенная выше конструкция приводит к матрице

$$V = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] = [V_a \mid V_b],$$

для которой $VV^* = I_3$. Определяемый этой матрицей фрейм Парсеваля расщепляется на два одинаковых фрейма, причем $V_a V_a^* = V_b V_b^* = I_3/2$. На следующем шаге после изменения нормировки получается матрица

$$V = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] = [V_a \mid V_b],$$

для которой $VV^* = I_3$. Однако теперь $V_a \neq V_b$ и расщепление на одинаковые фреймы невозможно. При этом

$$\|V_a V_a^* - I_3/2\|_2 = \|V_b V_b^* - I_3/2\|_2 = 1/2,$$

где $\|\cdot\|_2$ — спектральная матричная норма.

Основной результат статьи [16] относится к случаю $m > N/2$ и формулируется следующим образом.

Теорема 3.1. Пусть $N/2 < m < N$, $s = m - N/2$, где $m \in \mathbb{N}$. Предположим, что матрица $Y \in \mathbb{R}^{N \times m}$ получена удалением из правой части матрицы H_n произвольно выбранных $N/2 - s$ столбцов, так что

$$Y = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{y}_1 & \dots & \mathbf{y}_{N/2} & \mathbf{y}_{k(1)} & \dots & \mathbf{y}_{k(s)} \\ \mathbf{y}_1 & \dots & \mathbf{y}_{N/2} & -\mathbf{y}_{k(1)} & \dots & -\mathbf{y}_{k(s)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} Y_a \\ Y_b \end{array} \right],$$

где $1 \leq k(1) < \dots < k(s) \leq N/2$. Положим

$$V = \frac{Y^*}{\sqrt{N}}, \quad V_a = \frac{Y_a^*}{\sqrt{N}}, \quad V_b = \frac{Y_b^*}{\sqrt{N}}.$$

Тогда $VV^* = I_N$, $V = [V_a \mid V_b]$ и верны равенства

$$V_a V_a^* - I_{N/2}/2 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \Delta/2 \\ \hline \Delta^*/2 & 0 \end{array} \right], \quad V_b V_b^* - I_{N/2}/2 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -\Delta/2 \\ \hline -\Delta^*/2 & 0 \end{array} \right],$$

где $\Delta^* \Delta = I_s$, $\Delta \in \mathbb{R}^{(N/2) \times s}$. Более того,

$$\|V_a V_a^*\|_2 = \|V_b V_b^*\|_2 = 1$$

и для погрешностей верны равенства

$$\begin{aligned} \|V_a V_a^* - I_{N/2}/2\|_2 &= \|V_b V_b^* - I_{N/2}/2\|_2 = 1/2, \\ \|V_a V_a^* - I_{N/2}/2\|_F &= \|V_b V_b^* - I_{N/2}/2\|_F = \sqrt{(m - N/2)/2}, \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_F$ — норма Фробениуса.

Пример 3.2. Пусть $N = 8$ и $m = 6$ (тогда, очевидно, $s = 2$). Если выбрать $k(1) = 1$ и $k(2) = 3$, то матрица Y примет вид

$$Y = \left[\begin{array}{cccc|cc} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \mathbf{y}_4 & \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_3 \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \mathbf{y}_4 & -\mathbf{y}_1 & -\mathbf{y}_3 \end{array} \right].$$

В этом случае

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta\Delta^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \|V_a V_a^* - I_4/2\|_F = \|V_b V_b^* - I_4/2\|_F = 1,$$

что согласуется с теоремой 3.1.

В [16] приведены примеры, проясняющие в терминах квадратичных форм связь теоремы 3.1 с проблемой Кадисона—Зингера.

Покажем, что любой конечный фрейм Парсеваля, составленный из векторов одинаковой длины, в некотором смысле эквивалентен фрейму Уолша. Хорошо известно, что если $F = [\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N] \in \mathbb{C}^{m \times N}$, $m \leq N$, определяет фрейм Парсеваля для $\mathbb{C}^m$, причем $FF^* = I_m$ и $\|\mathbf{f}_j\|^2 = \alpha$ для каждого $j \in \{1, \dots, m\}$, то $\alpha = m/N$. Предположим, что матрица $F = [\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N] \in \mathbb{C}^{m \times N}$ определяет такой фрейм Парсеваля для $\mathbb{C}^m$, что $\|\mathbf{f}_j\| = \sqrt{m/N}$, $j = 1, \dots, m$. Положим $G_1 = F^*$, $G_1 = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m] \in \mathbb{C}^{N \times m}$, и дополним матрицу G_1 до ортогональной матрицы

$$G = [G_1 \mid G_2] = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m \mid \mathbf{g}_{m+1}, \dots, \mathbf{g}_N] \in \mathbb{C}^{N \times N},$$

где $G_2 = [\mathbf{g}_{m+1}, \dots, \mathbf{g}_N] \in \mathbb{C}^{N \times (N-m)}$. Для матрицы $W = G^*$ имеем

$$W = \begin{bmatrix} F \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \dots & \mathbf{f}_N \\ \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \dots & \mathbf{r}_N \end{bmatrix},$$

где $R = [\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N] \in \mathbb{C}^{(N-m) \times N}$. Далее, полагая

$$\mathbf{w}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_j \\ \mathbf{r}_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

будем иметь $W = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N]$. Согласно предложению 3.1 система $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N\}$ является фреймом Парсеваля для m -мерного подпространства $S_m \subset \mathbb{C}^N$, состоящего из векторов вида

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^m.$$

Фрейм $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N\}$ можно рассматривать как вложение исходного фрейма $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N\}$ в пространство $\mathbb{C}^N$. Пусть теперь $V = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N]$ — матрица, совпадающая с нормализованной матрицей Уолша $H_N/\sqrt{N}$. Из определения видно, что матрица V симметрична и ортогональна. Положим $P = VG$. Тогда $PW = V$ и, следовательно, $P\mathbf{w}_j = \mathbf{v}_j$, $j = 1, \dots, N$. Таким образом, каждому фрейму Парсеваля $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N\}$ для $\mathbb{C}^m$, определенному по векторам равной длины, поставлен в соответствие путем вложения в $\mathbb{C}^N$ фрейм Парсеваля $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N\}$, который ортогональным преобразованием переводится во фрейм Уолша. Изложенная в следующем разделе конструкция в случае $p = 2$ представляет собой еще один метод построения фреймов Парсеваля с помощью матриц Уолша.

4. Фреймы Парсеваля и преобразование Виленкина—Крестенсона. Пусть $N = p^n$, где p и n — натуральные числа, $p \geq 2$. Множество $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ является абелевой группой с операцией

$$a \oplus b := a \oplus_p b, \quad a, b \in \mathbb{Z}_N,$$

где $\oplus_p$ — операция сложения по модулю p , определяемая по разложениям

$$a = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu p^\nu, \quad b = \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu p^\nu, \quad a_\nu, b_\nu \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

(см. [4, § 1.5]). Пространство $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ состоит из последовательностей вида

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots), \quad x(j) \in \mathbb{C}, \quad x(j+N) = x(j), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Последовательность x из $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ часто отождествляется с вектором $(x(0), x(1), \dots, x(N-1))$. Линейные операции в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ определяются покомпонентно. Скалярное произведение последовательностей $x, y \in \ell^2(\mathbb{Z}^N)$ определяется по формуле

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \overline{y(j)}.$$

Пусть $\varepsilon_p = \exp(2\pi i/p)$. Функции Крестенсона $w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \dots, w_{N-1}^{(N)}$ для пространства $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ могут быть заданы равенствами

$$w_k^{(N)}(l) = \varepsilon_p^{\sigma(k,l)}, \quad w_k^{(N)}(j) = w_k^{(N)}(j+N), \quad j \in \mathbb{Z},$$

где

$$\sigma(k, l) = \sum_{\nu=0}^{n-1} k_\nu l_{n-\nu-1}, \quad k = \sum_{\nu=0}^{n-1} k_\nu p^\nu, \quad l = \sum_{\nu=0}^{n-1} l_\nu p^\nu, \quad k_\nu, l_\nu \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

Из определений видно, что функции Крестенсона при $p = 2$ совпадают с функциями Уолша. О свойствах дискретных функций Крестенсона и их применениях для обработки сигналов см. [2, 4, 6].

Положим $N_1 = p^{n-1}$. При $p = 2$ для получения матрицы $(w_k^{(N)}(l))$ следует каждую строку матрицы $(w_k^{(N_1)}(l))$ написать дважды в виде двух новых строк и дополнить полученные строки, приписывая к первой строке справа еще один экземпляр этой же строки, а ко второй строке добавляя справа все элементы той же строки с противоположным знаком (см. раздел 2 и [4, § 1.3]). Аналогично, при $p > 2$ для получения матрицы $(w_k^{(N)}(l))$ каждая строка матрицы $(w_k^{(N_1)}(l))$ записывается p раз в один столбец и умножается последовательно на $1, \varepsilon_p, \varepsilon_p^2, \dots, \varepsilon_p^{p-1}$ (полученные после умножения строки приписываются справа к имеющимся строкам). При $p = 3$ из матрицы

$$(w_k^{(3)}(l)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad k, l \in \{0, 1, 2\},$$

этим методом получается следующая матрица (для краткости полагаем $\varepsilon = \varepsilon_3$):

$$(w_k^{(9)}(l)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 \\ 1 & 1 & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 & \varepsilon & 1 & \varepsilon^2 \end{bmatrix}, \quad k, l \in \{0, 1, \dots, 7\}.$$

Хорошо известно также, что

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_k^{(N)}(j) = \begin{cases} N, & \text{если } j \text{ делится на } N, \\ 0, & \text{если } j \text{ не делится на } N. \end{cases} \quad (4)$$

Матрица $W^{(N)} := (w_l^{(N)}(j))_{l,j=0}^{N-1}$ симметрична и удовлетворяет соотношениям ортогональности

$$\sum_{j=0}^{N-1} w_l^{(N)}(j) \overline{w_k^{(N)}(j)} = \sum_{i=0}^{N-1} w_i^{(N)}(l) \overline{w_i^{(N)}(k)} = N \delta_{l,k}, \quad l, k \in \mathbb{Z}_N,$$

где $\delta_{l,k}$ — символ Кронекера. Следовательно, система $\{w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \dots, w_{N-1}^{(N)}\}$ является ортогональным базисом пространства $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$.

Дискретное преобразование Виленкина—Кресенсона ставит в соответствие вектору x из $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ последовательность $\widehat{x}$ коэффициентов Фурье вектора x по системе $\{w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \dots, w_{N-1}^{(N)}\}$:

$$\widehat{x}(k) := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \overline{w_k^{(N)}(j)}, \quad k \in \mathbb{Z}_N.$$

Разложение вектора x по базису $\{w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \dots, w_{N-1}^{(N)}\}$ записывается в виде

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}(k) w_k^{(N)}(j), \quad j \in \mathbb{Z}_N.$$

Быстрые алгоритмы реализации прямого и обратного дискретного преобразования Виленкина—Кресенсона содержатся в [2, 4, 8].

Для каждого $k \in \mathbb{Z}_N$ оператор p -ичного сдвига $T_k : \ell^2(\mathbb{Z}^N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^N)$ определяется по формуле

$$(T_k x)(j) := x(j \ominus k), \quad x = x(j) \in \ell^2(\mathbb{Z}^N).$$

Для любых $x, y \in \ell^2(\mathbb{Z}^N)$, $k, l \in \mathbb{Z}_N$ имеем

$$\widehat{(T_k x)}(l) = \overline{w_k^{(N)}(l)} \widehat{x}(l), \quad \langle x, y \rangle = N \langle \widehat{x}, \widehat{y} \rangle. \quad (5)$$

С помощью предложения 3.1 для любого $m \in \{N+1, \dots, pN\}$ после выбора m столбцов матрицы $(pN)^{-1/2} W^{(pN)}$ получаются фреймы Парсеваля из m векторов для пространства $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$. Следующая теорема в случае $p=2$ без доказательства приводилась в [10], а в ортогональном случае для любого $p \geq 2$ доказана в [13].

Теорема 4.1. Пусть векторы $u_0, u_1, \dots, u_r \in \ell^2(\mathbb{Z}^N)$ таковы, что для матрицы

$$M(l) := \frac{N}{\sqrt{p}} \begin{bmatrix} \widehat{u}_0(l) & \dots & \widehat{u}_r(l) \\ \widehat{u}_0(l + N_1) & \dots & \widehat{u}_r(l + N_1) \\ \widehat{u}_0(l + 2N_1) & \dots & \widehat{u}_r(l + 2N_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \widehat{u}_0(l + (p-1)N_1) & \dots & \widehat{u}_r(l + (p-1)N_1) \end{bmatrix}$$

при каждом $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ выполнено равенство

$$M(l) M^*(l) = I_p,$$

где I_p — единичная матрица порядка p . Тогда система

$$B(u_0, u_1, \dots, u_r) := \{T_{pk} u_0\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \{T_{pk} u_1\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \dots \cup \{T_{pk} u_r\}_{k=0}^{N_1-1}$$

является фреймом Парсеваля для $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$.

Доказательство. По условию имеем

$$\sum_{s=0}^r \widehat{u}_s(l + \mu N_1) \overline{\widehat{u}_s(l + \nu N_1)} = 0, \quad \mu \neq \nu, \quad (6)$$

$$\sum_{s=0}^r |\widehat{u}_s(l + \mu N_1)|^2 = \frac{p}{N^2}, \quad \mu, \nu \in \{0, 1, \dots, p-1\}. \quad (7)$$

Ввиду (5) достаточно убедиться, что для любого $x \in \mathbb{C}_N$ справедлива формула

$$\|\widehat{x}\|^2 = N \sum_{s=0}^r \sum_{k=0}^{N_1-1} |\langle \widehat{x}, \widehat{T_{pk} u_s} \rangle|^2. \quad (8)$$

Для каждого $x \in \mathbb{C}_N$ согласно (5) в силу равенства $w_{pk}^{(N)} = w_k^{(N_1)}$ имеем

$$|\langle \widehat{x}, \widehat{T_{pk} u_s} \rangle|^2 = |\langle \widehat{x}, w_{pk}^{(N)} \widehat{u_s} \rangle|^2 = \left| \sum_{l=0}^{N-1} \widehat{x}(l) w_k^{(N_1)}(l) \overline{\widehat{u_s}(l)} \right|^2. \quad (9)$$

Полагая $a_k = \widehat{x}(l) w_k^{(N_1)}(l) \overline{\widehat{u_s}(l)}$ и применяя тождество

$$\left| \sum_{l=0}^{N-1} a_k \right|^2 = \sum_{l=0}^{N-1} |a_k|^2 + 2\Re \left(a_0 \sum_{l'=1}^{N-1} \overline{a_{l'}} + a_1 \sum_{l'=2}^{N-1} \overline{a_{l'}} + \dots + a_{N-2} \overline{a_{N-1}} \right),$$

из (9) получим

$$|\langle \widehat{x}, \widehat{T_{pk} u_s} \rangle|^2 = \sum_{l=0}^{N-1} |\widehat{x}(l)|^2 |\widehat{u_s}(l)|^2 + 2\Re(A_k^{(N)}(\widehat{x}, \widehat{u_s})), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} A_k^{(N)}(\widehat{x}, \widehat{u_s}) := & \widehat{x}(0) \overline{\widehat{u_s}(0)} \sum_{l'=1}^{N-1} \overline{w_k^{(N_1)}(l')} \widehat{x}(l') \widehat{u_s}(l') + \\ & + \widehat{x}(1) \overline{\widehat{u_s}(1)} \sum_{l'=2}^{N-1} \overline{w_k^{(N_1)}(l' \oplus 1)} \widehat{x}(l') \widehat{u_s}(l') + \\ & + \widehat{x}(2) \overline{\widehat{u_s}(2)} \sum_{l'=3}^{N-1} \overline{w_k^{(N_1)}(l' \oplus 2)} \widehat{x}(l') \widehat{u_s}(l') + \dots + \\ & + \widehat{x}(N-3) \overline{\widehat{u_s}(N-3)} \overline{w_k^{(N_1)}(1)} \widehat{x}(N-2) \widehat{u_s}(N-2) + \overline{w_k^{(N_1)}(2)} \widehat{x}(N-1) \widehat{u_s}(N-1) + \\ & + \widehat{x}(N-2) \overline{\widehat{u_s}(N-2)} \overline{w_k^{(N_1)}(1)} \widehat{x}(N-1) \widehat{u_s}(N-1). \end{aligned}$$

Применяя (7), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^r \sum_{l=0}^{N-1} |\widehat{x}(l)|^2 |\widehat{u_s}(l)|^2 &= \sum_{l=0}^{N-1} |\widehat{x}(l)|^2 \sum_{s=0}^r |\widehat{u_s}(l)|^2 = \\ &= \sum_{l=0}^{N_1-1} \left[\sum_{\mu=0}^{p-1} |\widehat{x}(l + \mu N_1)|^2 \sum_{s=0}^r |\widehat{u_s}(l + \mu N_1)|^2 \right] = \\ &= \frac{p}{N^2} \sum_{l=0}^{N_1-1} \sum_{\mu=0}^{p-1} |\widehat{x}(l + \mu N_1)|^2 = \frac{p}{N^2} \sum_{l=0}^{N-1} |\widehat{x}(l)|^2. \end{aligned}$$

Отсюда и из (10) получаем

$$\sum_{s=0}^r \sum_{k=0}^{N_1-1} |\langle \widehat{x}, \widehat{T_{pk} u_s} \rangle|^2 = \frac{p N_1}{N^2} \sum_{l=0}^{N-1} |\widehat{x}(l)|^2 + 2\Re \left(\sum_{s=0}^r \sum_{k=0}^{N_1-1} A_k^{(N)}(\widehat{x}, \widehat{u_s}) \right). \quad (11)$$

Используя формулу (4) (с заменой N_1 на N), видим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} A_k^{(N)}(\widehat{x}, \widehat{u_s}) &= \widehat{x}(0) \overline{\widehat{u_s}(0)} \widehat{x}(N_1) \widehat{u_s}(N_1) + \\ &+ \widehat{x}(1) \overline{\widehat{u_s}(1)} \widehat{x}(N_1+1) \widehat{u_s}(N_1+1) + \dots + \widehat{x}(N_1-1) \overline{\widehat{u_s}(N_1-1)} \widehat{x}(N-1) \widehat{u_s}(N-1) \end{aligned}$$

и, согласно (6),

$$\sum_{s=0}^r \sum_{k=0}^{N_1-1} A_k^{(N)}(\widehat{x}, \widehat{u_s}) = 0. \quad (12)$$

Замечая, что

$$pN_1 = N, \quad \sum_{l=0}^{N-1} |\hat{x}(l)|^2 = \|\hat{x}\|^2,$$

из (11) и (12) получаем (8). Теорема 4.1 доказана. $\square$

Матрицу $M(l)$ из теоремы 4.1 для каждого $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ можно дополнить до унитарной матрицы. Поэтому для элементов матрицы $M(l)$ верны неравенства

$$|\hat{u}_s(l)|^2 + |\hat{u}_s(l + N_1)|^2 + \dots + |\hat{u}_s(l + (p-1)N_1)|^2 \leq \frac{p}{N^2}, \quad (13)$$

где $s = 0, 1, \dots, r$, $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$. Для случая, когда все неравенства в (13) обращаются в равенства, теорема 4.1 при $r = p - 1$ соответствует ортонормированному базису $B(u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$ в $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$, построенному в [13].

В случае $r = N - 1$ матрицу $M(l)$, удовлетворяющую условию $M(l)M^*(l) = I_p$, можно построить с помощью определенной выше матрицы $W^{(N)}$. Отметим, что при $p = 2$ матрица $W^{(N)}$ совпадает с матрицей Уолша W_n (см. раздел 2). Для иллюстрации случая $p = 3$ приведем следующий пример.

Пример 4.1. Пусть $p = 3$, $n = 2$, $r = 8$. Тогда

$$M(l) = \frac{9}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \hat{u}_0(l) & \hat{u}_0(l) & \dots & \hat{u}_r(l) \\ \hat{u}_0(l+3) & \hat{u}_0(l+3) & \dots & \hat{u}_r(l+3) \\ \hat{u}_0(l+6) & \hat{u}_0(l+6) & \dots & \hat{u}_r(l+6) \end{bmatrix}, \quad l = 0, 1, 2,$$

и для выполнения условия $M(l)M^*(l) = I_3$ матрицы $M(0)$, $M(1)$, $M(2)$ можно выбрать так, чтобы составленная из них матрица $(\hat{u}_k(j))_{k,j=0}^j$ была пропорциональна матрице $(w_k^{(9)}(j))_{k,j=0}^8$. Таким образом, в рассматриваемом случае матрица $M(l)$ формируется по строкам матрицы $W^{(9)}$.

Предположим, что N -мерный комплексный ненулевой вектор $(b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$ удовлетворяет условию

$$|b_l|^2 + |b_{l+N_1}|^2 + \dots + |b_{l+(p-1)N_1}|^2 \leq \frac{p}{N^2}, \quad l = 0, 1, \dots, N_1 - 1. \quad (14)$$

Тогда по теореме 4.1 следующий алгоритм приводит к фрейму Парсеваля $B(u_0, u_1, \dots, u_r)$ для $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$.

Алгоритм А.

Шаг 1. Найти такой вектор $u_0 \in \ell^2(\mathbb{Z}^N)$, что

$$\hat{u}_0(l) = b_l, \quad \hat{u}_0(l + N_1) = b_{l+N_1}, \quad \dots, \quad \hat{u}_0(l + (p-1)N_1) = b_{l+(p-1)N_1}, \quad l = 0, 1, \dots, N_1 - 1,$$

где числа $b_0, b_1, \dots, b_{N-1}$ берутся из (14).

Шаг 2. Для полученного на шаге 1 вектора u_0 найти такие векторы $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{C}_N$, что для матрицы

$$M(l) = \frac{N}{\sqrt{p}} \begin{bmatrix} \hat{u}_0(l) & \dots & \hat{u}_r(l) \\ \hat{u}_0(l + N_1) & \dots & \hat{u}_r(l + N_1) \\ \hat{u}_0(l + 2N_1) & \dots & \hat{u}_r(l + 2N_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat{u}_0(l + (p-1)N_1) & \dots & \hat{u}_r(l + (p-1)N_1) \end{bmatrix}$$

при каждом $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ выполнено равенство $M(l)M^*(l) = I_p$.

Шаг 3. Определить систему $B(u_0, u_1, \dots, u_r)$ по формуле

$$B(u_0, u_1, \dots, u_r) = \{T_{pk}u_0\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \{T_{pk}u_1\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \dots \cup \{T_{pk}u_r\}_{k=0}^{N_1-1}.$$

Шаг 1 этого алгоритма реализуется с помощью обратного дискретного преобразования Виленкина—Крестенсона:

$$u_0(j) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k w_k^{(N)}(j), \quad j \in \mathbb{Z}_N,$$

а для реализации шага 2 можно использовать те же методы, что и при построении фреймов на группах Виленкина (см. алгоритмы в [22, 23]).

При обработке сигналов вектор $(b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$ в алгоритме А может быть выбран по энтропийному, среднеквадратическому или иному критерию (ср. [11, 15]).

В заключение отметим, что в дополнение к фрейму $B(u_0, u_1, \dots, u_r)$ из теоремы 4.1 для каждого натурального m , $m \leq n$, аналогично ортогональному случаю (см. [13]) можно определить последовательность диадических фреймов Парсеваля m -го этапа для $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. — Баку: Элм, 1981.
2. Беспалов М. С. Дискретное преобразование Крестенсона // Пробл. передачи информ. — 2010. — 46, № 4. — С. 91–115.
3. Беспалов М. С. Собственные подпространства дискретного преобразования Уолша // Пробл. передачи информ. — 2010. — 46, № 3. — С. 60–79.
4. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. — М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
5. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
6. Зальманзон Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. — М.: Наука, 1989.
7. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. — М.: Мир, 2005.
8. Малоземов В. Н. Машарский С. М. Основы дискретного гармонического анализа. — СПб.: Лань, 2012.
9. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. — М.: Физматлит, 2006.
10. Робакидзе М. Г., Фарков Ю. А. Применение функций Уолша к построению фреймов Парсеваля в пространствах периодических последовательностей // в кн.: Современные проблемы теории функций и их приложения / Мат. 19 Междунар. Саратов. зимней школы, посв. 90-летию акад. П. Л. Ульянова. — Саратов: Научная книга, 2018. — С. 265–267.
11. Родионов Е. А. О применении вейвлетов к цифровой обработке сигналов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2016. — 16, № 2. — С. 217–225.
12. Рябцов И. С. Необходимые и достаточные условия простоты фреймов Парсеваля // Вестн. СамГУ. Естественноточ. сер. — 2012. — № 6 (97). — С. 42–48.
13. Фарков Ю. А. Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина–Крестенсона // Мат. заметки. — 2011. — 89, № 6. — С. 914–928.
14. Фарков Ю. А. Ортогональные всплески в анализе Уолша // в кн.: Современные проблемы математики и механики (Лукашенко Т. П., Солодова А. П., ред.) / К 80-летию В. А. Скворцова. Обобщенные интегралы и гармонический анализ. — М.: Изд-во Московского университета, 2016. — Т. 11. — С. 62–75.
15. Фарков Ю. А. Параметрические множества для фреймов в анализе Уолша // Вестн. Евраз. нац. ун-та им. Л. Н. Гумилева. Сер. Мат. Информ. Мех. — 2018. — 124, № 3. — С. 89–94.
16. Albrecht A., Howlett P., Verma G. Optimal splitting of Parseval frames using Walsh matrices // Poincaré J. Anal. Appl. — 2018. — № 2. — P. 39–58.
17. Balonin N. A., Doković D. Ž., Karbovskiy D. A. Construction of symmetric Hadamard matrices of order 4ν for $\nu = 47, 73, 113$ // Spec. Matrices. — 2018. — 6. — P. 11–22.
18. Bownik M. The Kadison–Singer problem // in: Frames and Harmonic Analysis. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2018. — P. 63–92.
19. Casazza P. G., Tremain J. C. The Kadison–Singer problem in mathematics and engineering // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 2006. — 103, № 7. — P. 2032–2039.
20. Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. — Boston: Birkhäuser, 2016.
21. Farkov Yu. A. Examples of frames on the Cantor dyadic group // J. Math. Sci. — 2012. — 187, № 1. — P. 22–34.
22. Farkov Yu. A. Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis // Poincaré J. Anal. Appl. — 2015. — № 2. — P. 13–36.
23. Farkov Yu. A., Lebedeva E. A., Skopina M. A. Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // Int. J. Wavelets Multires. Inf. Process. — 2015. — 13, № 5. — 1550036.

24. *Farkov Yu. A.* Wavelet frames related to Walsh functions// Eur. J. Math. — 2019. — 5. — P. 250–267.
25. *Farkov Yu. A., Manchanda P., Siddiqi A. H.* Construction of Wavelets through Walsh Functions. — Singapore: Springer, 2019.
26. *Hedayat A., Wallis W. D.* Hadamard matrices and their applications// Ann. Stat. — 1978. — 6, № 6. — P. 1184–1238.
27. *Kadison R. V., Singer I. M.* Extensions of pure states// Am. J. Math. — 1959. — 81. — P. 383–400.
28. *Krivoshein A., Protasov V., Skopina M.* Multivariate Wavelet Frames. — Singapore: Springer, 2016.
29. *Lang W. C.* Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group// SIAM J. Math. Anal. — 1996. — 27, № 1. — P. 305–312.
30. *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. — New York: Adam Hilger, 1990.
31. *Seberry J., Wysocki B. J., Wysocki T. A.* On some applications of Hadamard matrices// Metrika. — 2005. — 62, № 2. — P. 221–239.
32. Dyadic Walsh analysis from 1924 onwards Walsh–Gibbs–Butzer dyadic differentiation in science. — Amsterdam: Atlantis Press, 2015.
33. *Stevens M.* The Kadison–Singer Property. — Berlin: Springer, 2016.
34. *Waldron S.* An Introduction to Finite Tight Frames. — New York: Birkhäuser, 2018.
35. *Weaver N.* The Kadison–Singer problem in discrepancy theory// Discrete Math. — 2004. — 278, № 1–3. — P. 227–239.

Фарков Юрий Анатольевич

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

E-mail: farkov@list.ru, farkov-ya@ranepa.ru