Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Хацкевич, К вопросу об оптимальном оценивании случайных величин, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 170, 129–137

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-170-129-137>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 18:34:03

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 170 (2019). С. 129–137
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-170-129-137

УДК 519.24

К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

© 2019 г. В. Л. ХАЦКЕВИЧ

Аннотация. Указан класс квазилинейных оптимальных в среднем квадратичном оценок случайных величин. Установлены оптимальные корреляционные свойства полученных оценок.

Ключевые слова: оптимальная оценка случайной величины, квазилинейный предиктор, корреляционный анализ.

ON OPTIMAL ESTIMATES OF RANDOM VARIABLES

© 2019 V. L. KHATSKEVICH

ABSTRACT. A class of quasilinear, mean-square optimal estimates of random variables is indicated. Optimal correlation properties of the obtained estimates are established.

Keywords and phrases: optimal estimate of a random variable, quasilinear predictor, correlation analysis.

AMS Subject Classification: 60K10

1. Введение. Известная задача теории оценивания состоит в том, чтобы по значениям наблюдаемой случайной величины ξ оценить ненаблюдаемую случайную величину η . Можно показать (см., например, [7, гл. II, § 8]), что лучшей оценкой η по ξ является функция регрессии $\phi^*(\xi) = E(\eta|\xi)$, равная условному математическому ожиданию η по ξ . Она минимизирует величину среднеквадратической ошибки $E(\eta - \phi(\xi))^2$. А именно,

$$E(\eta - \phi^*(\xi))^2 = \inf E(\eta - \phi(\xi))^2.$$

Здесь E — математическое ожидание, а $\inf$ берется по классу всех борелевских функций ϕ . При этом оценка ϕ^* обладает максимальной корреляцией с η по сравнению с другими борелевскими функциями $\phi(\xi)$.

Рассмотрим ситуацию, когда имеется n наблюдаемых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, характеризующих значения ненаблюдаемой величины η . Как известно (см., например, [7, гл. II, § 11]), наилучшая оценка в этом случае будет $E(\eta|\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Однако практически эта формула неудобна, поэтому используют другие. В частности, рассматривают линейные приближения вида $\sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$, где α_i — некоторые числа. При этом для оптимального подбора чисел α_i , как правило, используется метод наименьших квадратов (см., например, [5]). Различные классы нелинейных регрессий также активно исследуются и применяются на практике. Из последних работ в этом направлении укажем [2].

В настоящей работе в качестве аппроксимации для η рассматривается квазилинейное выражение вида $\gamma_0 + \sum_{i=1}^n \gamma_i E(\eta|\xi_i)$ и подбираются оптимальные коэффициенты γ_i . Подчеркнем, что предлагаемые оценки являются несмещенными.

Кроме того, обсуждаются оптимальные корреляционные свойства установленных оценок. По ходу работы приводится сравнение с известными результатами и указываются преимущества перед линейными аппроксимациями.

Ниже всюду предполагается, что случайные величины η и ξ_i , $i = 1, 2, \dots$, имеют конечные вторые моменты и случайные величины ξ_i попарно независимы.

2. Построение оптимальных квазилинейных предикторов. Как известно (см., например, [1, § 5.6]), *предиктором* называется функция от предсказующих величин $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, которую используют в качестве оценки для прогнозируемой величины (η).

Поставим задачу отыскания оптимальной (в смысле среднеквадратического отклонения от η) оценки в классе всех квазилинейных комбинаций $\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i E(\eta|\xi_i)$.

Введем необходимые обозначения. Положим $X_i = E(\eta|\xi_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $\bar{\eta} = E\eta$. Заметим, что по формуле полного математического ожидания $EX_i = E(E(\eta|\xi_i)) = E\eta = \bar{\eta}$. Обозначим через $\delta_i^2 = DX_i$ дисперсию случайной величины X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, а через $\sigma^2 = D\eta$ — дисперсию случайной величины η . Отметим что, в силу взаимной независимости случайных величин ξ_i , случайные величины X_i также взаимно независимы.

Остановимся вначале на следующем подходе. Пусть $\Delta_i = E(\eta|\xi_i) - \bar{\eta}$. Введем в рассмотрение случайную величину $\eta^* = \eta - \bar{\eta}$. По определению $E\eta^* = 0$. Аппроксимируем η^* линейными комбинациями вида $W_n = \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_i$, где β_i — некоторые вещественные коэффициенты.

Рассмотрим задачу о минимизации

$$\varepsilon(\beta) := E\left(\eta^* - \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_i\right)^2 \rightarrow \min, \quad \beta_i \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

По определению

$$\varepsilon(\beta) = D\eta - 2 \sum_{i=1}^n \beta_i E(\eta^* \Delta_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i \beta_j E(\Delta_i \Delta_j).$$

Заметим, что по известному свойству математических ожиданий (см., например, [1, § 5.6]) справедливо равенство

$$E(\eta^* \Delta_i) = E[(\eta - \bar{\eta})(X_i - \bar{\eta})] = \text{cov}[\eta, X_i] = \text{cov}[X_i, X_i] = DX_i = \delta_i^2.$$

Используя это, а также ортогональность системы $\{\Delta_i\}$, для $\varepsilon(\beta)$ получим равенство

$$\varepsilon(\beta) = D\eta - 2 \sum_{i=1}^n \beta_i \delta_i^2 + \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \delta_i^2. \quad (2)$$

Обозначим функцию, стоящую справа в (2), через $F(\beta) := F(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Применяя необходимое условие экстремума, найдем

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_j} = -2\delta_j^2 + 2\beta_j \delta_j^2 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда $\beta_j = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$. При этом соответствующий гессиан положительно определен. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Оценка $W_n^* = \sum_{i=1}^n \Delta_i$ обеспечивает решение задачи (1). Минимум формы (2) по всем действительным β равен $\sigma^2 - \sum_{i=1}^n \delta_i^2$.

Положим

$$\eta_{\text{опт}} = \bar{\eta} + \sum_{i=1}^n \Delta_i. \quad (3)$$

Отметим, что оценка (3) является несмещенной, так как $E\eta_{\text{опт}} = \bar{\eta}$. Поскольку

$$\eta - \eta_{\text{опт}} = \eta^* - \sum_{i=1}^n \Delta_i,$$

справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Оценка $\eta_{\text{опт}}$, определяемая формулой (3), обеспечивает минимум выражения $E \left(\eta - \left(\bar{\eta} + \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_i \right) \right)^2$ по всем действительным β . Этот минимум равен $\sigma^2 - \sum_{i=1}^n \delta_i^2$.

Замечание 1. В соответствии с теоремой 1 оценка (3) является оптимальным предиктором для η в классе всех действительных $\beta_1, \dots, \beta_n$. Ее можно представить в виде

$$\eta_{\text{опт}} = \sum_{i=1}^n X_i - (n-1)\bar{\eta}.$$

Продемонстрируем другой подход. Рассмотрим задачу о минимизации выражения

$$El \left(\eta - \sum_{i=1}^n \gamma_i X_i \right)^2 \rightarrow \min \quad (4)$$

по всем действительным γ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющим условию

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i = 1. \quad (5)$$

Отметим, что условие (5) обеспечивает несмещенность соответствующей оценки, так как $EX_i = \bar{\eta}$, $i = 1, \dots, n$.

Теорема 2. Решение задачи (4), (5) дают коэффициенты γ_j^* , определяемые формулами

$$\gamma_j^* = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\delta_k^2} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\delta_k^2} + \frac{1-n}{\delta_j^2} \right), \quad j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Оптимальный предиктор для η в классе действительных $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, удовлетворяющих условию (5), имеет вид $\sum_{i=1}^n \gamma_i^* X_i$.

Доказательство. Действительно, согласно (5)

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i X_i = \sum_{i=1}^n \gamma_i (\bar{\eta} + \Delta_i) = \bar{\eta} + \sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta_i.$$

Поэтому

$$\eta - \sum_{i=1}^n \gamma_i X_i = \eta^* - \sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta_i.$$

Тогда задача (4), (5) сводится к следующей:

$$E \left(\eta^* - \sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta_i \right)^2 \rightarrow \min, \quad \gamma_i \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

при условии (5). Соотношение (7) приводит к задаче

$$D\eta - 2 \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta_i^2 + \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \delta_i^2 \rightarrow \min, \quad \gamma_i \in \mathbb{R},$$

при условии (5).

Рассмотрим функцию Лагранжа

$$L(\gamma, \lambda) = D\eta - 2 \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta_i^2 + \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \delta_i^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i - 1 \right).$$

Согласно необходимому условию экстремума имеем систему

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_j} = -2\delta_j^2 + 2\gamma_j \delta_j^2 + \lambda = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \gamma_i - 1 = 0.$$

Из первого равенства этой системы следует, что

$$\gamma_j = 1 - \frac{\lambda}{2\delta_j^2}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Суммируя левую и правую части (8) по $j = 1, 2, \dots, n$, получим

$$1 = n - \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\delta_j^2}.$$

Отсюда

$$\frac{\lambda}{2} = (n-1) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\delta_k^2} \right)^{-1}.$$

Следовательно, (8) влечет

$$\gamma_j = 1 + \frac{1-n}{\delta_j^2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\delta_k^2} \right)^{-1}, \quad j = 1, \dots, n,$$

что приводит к формуле (6). □

Отметим, что в силу (6) условие неотрицательности γ_j^* эквивалентно следующему:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\delta_k^2} \geq \frac{n-1}{\delta_j^2}. \quad (9)$$

В частности, условие (9) выполняется для любого $j = 1, 2, \dots, n$, когда все δ_k равны между собой (либо достаточно близки). Если при этом $\delta_k = \delta$, $k = 1, 2, \dots, n$, то $\gamma_j^* = 1/n$, $j = 1, \dots, n$. Тогда оптимальная оценка есть среднее арифметическое

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

3. Сравнительный корреляционный анализ. Как известно, коэффициент корреляции между случайными величинами W с η определяется формулой

$$\rho(W, \eta) = \frac{\text{cov}[W, \eta]}{\sqrt{D\eta}\sqrt{DW}},$$

где в числителе стоит ковариация, а в знаменателе корни из соответствующих дисперсий.

Лемма 2. Коэффициент корреляции предиктора $W_n^* = \sum_{i=1}^n \Delta_i$, определяемого в лемме 1, с η имеет вид

$$\rho(W_n^*, \eta) = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}, \quad (10)$$

где σ^2 и δ_i^2 — дисперсии случайных величин η и Δ_i соответственно.

Доказательство. Действительно, используя известное равенство $\text{cov}[E(\eta|\xi_i), \eta] = \delta_i^2$ (см., например, [1, § 5.6]), получим

$$\text{cov}[W_n^*, \eta] = (W_n^*, \eta^*) = \sum_{i=1}^n (\Delta_i, \eta^*) = \sum_{i=1}^n \text{cov}[X_i, \eta] = \sum_{i=1}^n \delta_i^2.$$

Поэтому

$$\rho(W_n^*, \eta) = \frac{\text{cov}[W_n^*, \eta]}{\sigma \sqrt{DW_n^*}} = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{\sigma \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}.$$

Выше при подсчете DW_n^* мы использовали взаимную независимость случайных величин Δ_i . $\square$

Отметим, что в силу леммы 1 имеем $0 \leq \rho(W_n^*, \eta) \leq 1$.

Замечание 2. В соответствии с формулой (3) коэффициент корреляции $\rho(\eta_{\text{опт}}, \eta)$ предиктора $\eta_{\text{опт}}$ с η совпадает с (10).

Далее мы будем сравнивать коэффициенты корреляции различных оценок случайной величины с η . При этом (в соответствии с [1, § 5.6]) будем писать, что одна оценка обладает большей корреляцией по сравнению с другой, если коэффициент корреляции этой оценки не меньше, чем модуль коэффициента корреляции другой.

Лемма 3. Оценка $W_n^* = \sum_{i=1}^n \Delta_i$ обладает наибольшей корреляцией с η^* среди всех оценок вида $W_n = \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_i$ с произвольными вещественными β_i .

Доказательство. Действительно, по определению

$$\text{cov}[W_n, \eta^*] = \sum_{i=1}^n \beta_i E(\Delta_i \eta) = \sum_{i=1}^n \beta_i \text{cov}[X_i, \eta^*] = \sum_{i=1}^n \beta_i \delta_i^2.$$

Тогда для коэффициента корреляции $\rho(W_n, \eta^*)$ получим соотношение

$$\sigma^2 \rho^2(W_n, \eta^*) = \frac{\text{cov}^2(W_n, \eta^*)}{DW_n} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \delta_i^2\right)^2}{\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \delta_i^2}.$$

Заметим, что по неравенству Коши—Буняковского

$$\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \delta_i^2\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n (\beta_i \delta_i)(\delta_i)\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \delta_i^2 \sum_{i=1}^n \delta_i^2.$$

Отсюда

$$\sigma^2 \rho^2(W_n, \eta^*) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \delta_i^2 \sum_{i=1}^n \delta_i^2}{\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \delta_i^2} = \sum_{i=1}^n \delta_i^2.$$

При этом, согласно (10)

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sigma^2 \rho^2(W_n^*, \eta^*),$$

что и влечет неравенство $|\rho(W_n, \eta^*)| \leq \rho(W_n^*, \eta^*)$. $\square$

Согласно лемме 3 и определению оптимального предиктора (3) справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Оптимальный предиктор η_{opt} , определяемый формулой (3), обладает наибольшей корреляцией с η среди всех оценок вида*

$$V_n = \bar{\eta} + \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_i$$

с произвольными вещественными β_i , а именно,

$$|\rho(V_n, \eta)| \leq \rho(\eta_{opt}, \eta).$$

Обсудим вопрос о максимальной корреляции оптимальных предикторов с другой точки зрения. Оказывается, оценка W_n^* обладает наибольшей корреляцией с η по сравнению с другими оценками вида $\tilde{W}_n = \sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_i$. Уточним это утверждение.

Лемма 4. *Оценка $W_n^* = \sum_{i=1}^n \Delta_i$ обладает наибольшим коэффициентом корреляции с η среди всех оценок вида*

$$\tilde{W}_n = \sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_i, \quad \tilde{\Delta}_i = \phi_i(\xi_i) - E\phi_i(\xi_i), \quad (11)$$

где ϕ_i — произвольные борелевские функции. Этот наибольший коэффициент корреляции дается формулой (10).

Доказательство. Действительно, согласно определению (11) имеем

$$\text{cov}[\tilde{W}_n, \eta] = \sum_{i=1}^n (\tilde{\Delta}_i, \eta^*) = \sum_{i=1}^n \text{cov}[\phi_i(\xi_i), \eta].$$

Отсюда, полагая, $\tilde{\delta}_i^2 = E\tilde{\Delta}_i^2$ и вводя коэффициент корреляции

$$\tilde{\rho}_i = \tilde{\rho}_i[\phi_i(\xi_i), \eta] = \frac{\text{cov}[\phi_i(\xi_i), \eta]}{\tilde{\delta}_i \sigma},$$

получим

$$|\text{cov}[\tilde{W}_n, \eta]| = \sigma \left| \sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i \tilde{\rho}_i \right| \leq \sigma \sum_{i=1}^n |\tilde{\delta}_i| |\tilde{\rho}_i|. \quad (12)$$

Как известно (см., например, [1, § 5.6]), $|\tilde{\rho}_i| \leq |\rho_i|$, где ρ_i — коэффициент корреляции функции $X_i = E(\eta|\xi_i)$ с η , равный

$$\rho_i = \rho_i[X_i, \eta] = \frac{\text{cov}[X_i, \eta]}{\delta_i \sigma} = \frac{\delta_i}{\sigma}.$$

Тогда из (12) согласно неравенству Коши—Буняковского получим

$$|\text{cov}[\tilde{W}_n, \eta]| \leq \sum_{i=1}^n |\tilde{\delta}_i| |\delta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \delta_i^2 \right)^{1/2}.$$

С учетом леммы 2 отсюда следует, что

$$|\text{cov}[\tilde{W}_n, \eta]| \leq \sigma \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i^2 \right)^{1/2} \rho[W_n^*, \eta].$$

Поэтому

$$|\rho[\tilde{W}_n, \eta]| = \frac{|\text{cov}[\tilde{W}_n, \eta]|}{\sigma \sqrt{D\tilde{W}_n}} = \frac{|\text{cov}[\tilde{W}_n, \eta]|}{\sigma \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i^2 \right)^{1/2}} \leq \rho[W_n^*, \eta],$$

что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 3. В частности, W_n^* обладает большим коэффициентом корреляции с η , чем $\tilde{W}_n$, где в качестве $\tilde{\Delta}_i$ берется $\tilde{\Delta}_i = \xi_i - M\xi_i$.

Из рассуждений леммы 4 и определения $\eta_{\text{опт}}$ (см. (3)) вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Оптимальный предиктор $\eta_{\text{опт}}$, определяемый формулой (3), обладает наибольшим коэффициентом корреляции с η среди всех оценок вида $\bar{\eta} + \tilde{W}_n$, где $\tilde{W}_n$ задается формулой (11).*

Отметим корреляционные свойства оценок, связанных с задачей (4), (5).

Лемма 5. *Коэффициент корреляции $\rho(Z_n, \eta)$ среднего*

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

с η выражается формулой (10), где δ_i^2 — дисперсии случайных величин X_i .

Доказательство. Действительно, аналогично лемме 2

$$\text{cov}[Z_n, \eta] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{cov}[X_i, \eta] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^2.$$

При этом для дисперсии DZ_n имеем

$$DZ_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \delta_i^2.$$

Тогда по формуле коэффициента корреляции получим высказанный результат. $\square$

Аналогом леммы 3 является следующая теорема.

Теорема 5. *Среднее $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ обладает наибольшей корреляцией с η среди всех оценок вида $W_n = \sum_{i=1}^n \gamma_i X_i$ с произвольными вещественными γ_i .*

Доказательство. Действительно, по определению

$$\text{cov}[W_n, \eta] = \sum_{i=1}^n \gamma_i \text{cov}[X_i, \eta] = \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta_i^2.$$

Тогда для коэффициента корреляции $\rho(W_n, \eta)$ получим

$$\sigma^2 \rho^2(W_n, \eta) = \frac{\text{cov}^2[W_n, \eta]}{DW_n} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \delta_i^2 \right)^2}{\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \delta_i^2}.$$

При этом согласно неравенству Коши—Буняковского

$$\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \delta_i^2 \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n (\gamma_i \delta_i) (\delta_i) \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \delta_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta_i^2 \right).$$

Тогда с учетом леммы 5

$$\sigma^2 \rho^2(W_n, \eta) \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \delta_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta_i^2 \right)}{\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \delta_i^2} = \sigma^2 \rho^2(Z_n, \eta). \quad \square$$

Аналогом леммы 4 является следующая теорема.

Теорема 6. Среднее Z_n обладает наибольшим коэффициентом корреляции с η среди всех оценок вида $\widehat{W}_n = \sum_{i=1}^n \phi_i(\xi_i)$, где ϕ_i — произвольные борелевские функции от ξ_i .

Доказательство. Доказательство следует из рассуждений леммы 4. Действительно, по определению

$$\text{cov}[\widehat{W}, \eta] = \sum_{i=1}^n \text{cov}[\phi_i(\xi_i), \eta].$$

При этом в обозначениях леммы 4 $D\phi_i(\xi_i) = \tilde{\delta}_i^2$. Поэтому, как и в лемме 4, справедливо неравенство

$$|\text{cov}[\widehat{W}, \eta]| \leq \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \delta_i^2 \right)^{1/2},$$

где $\delta_i^2 = DX_i$. Отсюда согласно лемме 5

$$|\text{cov}[\widehat{W}, \eta]| \leq \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i^2 \right)^{1/2} \rho(Z_n, \eta).$$

С учетом определения $\rho(\widehat{W}_n, \eta)$ и равенства

$$D\widehat{W}_n = \sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i^2$$

отсюда следует утверждение теоремы 6. $\square$

Таким образом, среднее, не являясь, вообще говоря, оптимальным предиктором (при различных дисперсиях X_i), обладает максимальными корреляционными свойствами в соответствующих классах оценок.

Обратимся к рассмотрению корреляционных отношений, соответствующих квазилинейному случаю. Пусть $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$. Обозначим через

$$\sigma_{\eta^*, \Delta}^2 = E \left(\eta^* - \sum_{i=1}^n \Delta_i \right)^2$$

среднюю квадратическую ошибку предиктора $W_n^* = \sum_{i=1}^n \Delta_i$; пусть $\mu_{\eta^*, \Delta}^2$ — корреляционное отношение, определяемое как квадрат максимального значения коэффициента корреляции между η^* и $W_n = \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_i$. В соответствии с леммой 4 величина $\mu_{\eta^*, \Delta}^2$ равна квадрату правой части формулы (10). Имеет место следующее утверждение.

Лемма 6. Справедливо равенство

$$\mu_{\eta^*, \Delta}^2 = 1 - \frac{\sigma_{\eta^*, \Delta}^2}{\sigma^2}.$$

Доказательство. Действительно, в силу леммы 3

$$\sigma_{\eta^*, \Delta}^2 = \sigma^2 - \sum_{i=1}^n \delta_i^2.$$

Отсюда с учетом (10) следует высказанное утверждение. $\square$

Пусть $\eta_{\text{опт}}$ определяется формулой (3), $\sigma_{\eta, \eta_{\text{опт}}}^2 = E(\eta - \eta_{\text{опт}})^2$ — среднеквадратическая ошибка предиктора $\eta_{\text{опт}}$ и $\mu_{\eta, \eta_{\text{опт}}}^2$ — соответствующее корреляционное отношение. По определению предиктора $\eta_{\text{опт}}$ (см. (3)) имеем

$$\sigma(\eta, \eta_{\text{опт}}) = \sigma(\eta^*, \Delta),$$

а в соответствии с замечанием 2

$$\mu_{\eta, \eta_{\text{опт}}}^2 = \mu_{\eta^*, \Delta}^2.$$

Поэтому из леммы 6 вытекает следующая теорема.

Теорема 7. *Между среднеквадратической ошибкой и корреляционным отношением имеет место равенство*

$$\mu_{\eta, \eta_{\text{опт}}}^2 = 1 - \frac{\sigma_{\eta, \eta_{\text{опт}}}^2}{\sigma^2}.$$

Это равенство, в частности, показывает, что корреляционное отношение $\mu_{\eta, \eta_{\text{опт}}}^2$ стремится к 1, если оптимальная ошибка прогноза $\sigma_{\eta, \eta_{\text{опт}}}^2$ стремится к нулю.

Утверждение теоремы 7 означает, что в нашей ситуации выполняется стандартное соотношение теории статистической регрессии (см., например, [1, § 5.6] для линейных оптимальных предикторов).

Результаты раздела 2 показывают, что квазилинейные оценки, установленные в данной статье, в определенном смысле лучше соответствующих линейных оценок.

В теории обработки независимых измерений применяется подход, состоящий в оценивании измеряемой случайной величины η средними $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$ результатов измерений ξ_i . При этом предполагается, что $E\xi_i = E\eta$, $i = 1, \dots, n$ (см., например, [4, гл. 1, § 6]). Для случайных величин $X_i = E(\eta|\xi_i)$ как раз и выполняется условие $EX_i = E\eta$.

Отметим, что выражение вида $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (E\eta|\xi_i)$ применялось ранее для аппроксимации математического ожидания $E\eta$ (см. например, [3, гл. 7]). В работе автора [6] обсуждался вопрос об оптимальности такой оценки для приближения случайной величины η .

Подчеркнем, что несмотря на наличие подробных изложений теории нелинейной регрессии (см., например, [8, 9]) результаты, полученные в настоящей работе, по-видимому, ранее не освещались.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Математическая статистика. — М.: Либроком, 2018.
2. Линке Ю. Ю., Борисов И. С. О построении явных оценок в задачах нелинейной регрессии // Теор. вероятн. примен. — 2018. — 63, № 1. — С. 29–56.
3. Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г. Задачи по теории вероятностей. — М.: Изд. КДУ, 2009.
4. Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — М.: Наука, 1989.
5. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. — М.: Мир, 1980.
6. Хацкевич В. Л. О некоторых экстремальных свойствах средних значений и математических ожиданий случайных величин // Вестн. Воронеж. гос. техн. ун-та. — 2013. — 9, № 3.1. — С. 39–44.
7. Ширяев А. Н. Вероятность. — М.: МЦНМО, 2007.
8. Klemela J. Multivariate nonparametric regression and visualization: with R and applications to finance. — New Jersey: Wiley, 2014.
9. Seber G. A. F., Wild C. J. Nonlinear regression. — New York: Wiley, 2003.

Хацкевич Владимир Львович

Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воронеж
E-mail: vlkhats@mail.ru