Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова, Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств возмущенных дифференциальных операторов первого порядка, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 171, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-171-3-18>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 11:33:59

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 171 (2019). С. 3–18
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-171-3-18

УДК 517.9

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ИССЛЕДОВАНИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

© 2019 г. А. Г. БАСКАКОВ, И. А. КРИШТАЛ, Н. Б. УСКОВА

Аннотация. В работе рассмотрены дифференциальные операторы первого порядка с периодическими краевыми условиями, действующие в гильбертовом пространстве суммируемых с квадратом на отрезке $[0, \omega]$ функций, возмущенные интегральными операторами Гильберта—Шмидта. Произведено преобразование подобия исходного оператора к оператору блочно-диагональной структуры; это позволяет изучить спектральные свойства возмущенного оператора. Методом исследования служит метод подобных операторов, основные положения которого и его систематизация также приведены в работе.

Ключевые слова: метод подобных операторов, спектр, интегро-дифференциальный оператор.

METHOD OF SIMILAR OPERATORS IN THE STUDY OF SPECTRAL PROPERTIES OF PERTURBED FIRST-ORDER DIFFERENTIAL OPERATORS

© 2019 A. G. BASKAKOV, I. A. KRISHTAL, N. B. USKOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider first-order differential operators with periodic boundary conditions acting in a Hilbert space of square summable functions on the segment $[0, \omega]$ perturbed by Hilbert–Schmidt integral operators. A similarity transformation of the original operator to the operator of the block-diagonal structure is performed; this allows one to study spectral properties of the perturbed operator. The research method is the method of similar operators, which is also presented in this work.

Keywords and phrases: method of similar operators, spectrum, integro-differential operator.

AMS Subject Classification: 35L75, 35Q53, 37K10, 37K35

1. Введение. В настоящее время дифференциальные операторы первого порядка с инволюцией достаточно глубоко исследуются. Начало их систематическому изучению положили работы А. П. Хромова и М. Ш. Бурлуцкой (см. [14–20]), в которых *резольвентным методом* (с помощью контурного интегрирования) получены спектральные характеристики таких операторов с гладким потенциалом. В указанных работах рассматривались различные виды граничных условий и различные места нахождения инволюции: при производной или при потенциале. Полученные

Работа А. Г. Баскакова выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (госзадание, проект № 1.3464.2017/4.6). Работа И. А. Криштала выполнена при поддержке Национального научного фонда США (National Science Foundation, проект DMS-1322127). Работа Н. Б. Усковой выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00732).

результаты легли в основу обоснования метода Фурье. Альтернативным методом исследования спектральных свойств различных возмущенных линейных замкнутых операторов, в том числе и операторов с инволюцией, является *метод подобных операторов* (см. [2, 4–7, 9, 10]), позволяющий более гибко учитывать спектральные свойства оператора дифференцирования и специфику потенциала. При помощи указанного метода операторы с инволюцией и негладким потенциалом, в том числе матричным, исследовались в [11–13, 24, 25, 27]. При этом необходимо было производить предварительное преобразование подобия метода подобных операторов (см. [11, 24, 25, 27]) из-за негладкости потенциала. После предварительного преобразования подобия исследование спектральных свойств исходного оператора сводится к исследованию спектральных свойств интегро-дифференциального оператора первого порядка (см. [11, 24, 25, 27]). Данная статья посвящена изучению интегро-дифференциальных операторов первого порядка с помощью метода подобных операторов.

Также отличительной особенностью данной работы является систематизация основных теорем метода подобных операторов в изложении абстрактной схемы метода во разделе 2 и альтернативный способ доказательства одной из основных теорем метода подобных операторов (теоремы 2.2).

2. Метод подобных операторов. В этом разделе мы изложим основные положения метода подобных операторов. В отличие от обычно используемой схемы (см. [7, 9–11, 24, 25, 27]) ниже будет приведен более широкий обзор уравнений метода подобных операторов и условий их разрешимости.

Сначала введем необходимые далее операторные пространства. Пусть $\mathcal{H}$ — абстрактное комплексное гильбертово пространство. Введем в рассмотрение линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, имеющий область определения $D(A)$, спектр $\sigma(A)$ и непустое резольвентное множество $\rho(A)$.

Определение 2.1 (см. [6]). Линейный оператор $B : D(B) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ называется *подчиненным* оператору $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, если $D(A) \subset D(B)$ и $\|Bx\| \leq \text{const}(\|x\| + \|Ax\|)$, $x \in D(A)$.

Обозначим пространство операторов, подчиненных оператору A , через $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$. Введем в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ норму, положив

$$\|B\|_A = \inf \left\{ C \geq 0 : \|Bx\| \leq C(\|x\| + \|Ax\|) \text{ для любого } x \in D(A) \right\}.$$

Обычно без ограничения общности считается, что $D(B) = D(A)$.

Символом $\text{End } \mathcal{H}$ обозначим банахово пространство (C^* -алгебру) всех ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{H}$, со стандартной нормой

$$\|X\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Xx\|, \quad x \in \mathcal{H}, \quad X \in \text{End } \mathcal{H}.$$

Пространство $\text{End } \mathcal{H}$ вложено в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, если область определения $D(A)$ оператора A плотна в $\mathcal{H}$. Принадлежность оператора X пространству $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ означает, что $X(A - \lambda_0 I)^{-1} \in \text{End } \mathcal{H}$ для любого $\lambda_0 \in \rho(A)$. В пространстве $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ можно ввести эквивалентную норму, положив $\|X\|_A = \|X(A - \lambda_0 I)^{-1}\|$.

Начнем изложение метода подобных операторов с определения подобных операторов.

Определение 2.2 (см. [6]). Два линейных оператора $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, называются *подобными*, если существует такой непрерывно обратимый оператор $U \in \text{End } \mathcal{H}$, что $A_1 U x = U A_2 x$, $x \in D(A_2)$, $U D(A_2) = D(A_1)$. Оператор U называется *оператором преобразования* оператора A_1 в оператор A_2 .

Подобные операторы обладают рядом совпадающих спектральных свойств, которые удобно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма 2.1 (см. [10]). Пусть $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, — два подобных оператора и $U \in \text{End } \mathcal{H}$ — оператор преобразования оператора A_1 в оператор A_2 . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2)$, $\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2)$, $\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, где $\sigma(A_i)$ — спектры, $\sigma_d(A_i)$ — дискретные спектры, $\sigma_c(A_i)$ — непрерывные спектры, $\sigma_r(A_i)$ — остаточные спектры операторов A_i , $i = 1, 2$, соответственно;

- (2) если a — собственный вектор оператора A_2 , отвечающий собственному значению λ_0 , то $b = Ua$ — собственный вектор A_1 , отвечающий тому же собственному значению λ_0 ;
- (3) если P — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ оператора A_2 , то спектральный проектор $\tilde{P}$, построенный по этому же множеству σ для оператора A_1 , определяется формулой $\tilde{P} = UPU^{-1}$;
- (4) если оператор A_2 является генератором сильно непрерывной группы операторов $T_2 : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ (класса C_0), то оператор A_1 является генератором сильно непрерывной группы операторов

$$T_1(t) = UT_2(t)U^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad T_1 : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}.$$

Далее рассматривается оператор $A - B : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ и $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$. Оператор A будем называть *невозмущенным*, или *свободным* оператором. Спектральные свойства оператора A считаются хорошо изученными. Оператор $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ будем называть оператором-возмущением, а оператор $A - B$ — возмущенным оператором.

Основная идея метода подобных операторов состоит в следующем. Строится преобразование подобия возмущенного оператора $A - B$ в более просто устроенный оператор $A - \tilde{B}$. При этом спектральные свойства оператора $A - \tilde{B}$ должны быть близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора A . Например, подпространства, построенные по непересекающимся частям спектра невозмущенного оператора A , остаются инвариантными и для оператора $A - \tilde{B}$. Отметим, что преобразованием метода подобных операторов является метод К. О. Фридрихса (см. [28]) для исследования возмущенных самосопряженных операторов с непрерывным спектром. Метод Фридрихса развивал Р. Тернер для нормальных компактных операторов (см. [29]), возмущенных ограниченными операторами, которые построены специальным образом по невозмущенному оператору. Метод подобных операторов также опирается на работы А. Пуанкаре, Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова и окончательно оформляется в работах А. Г. Баскакова (см. [2, 4–7, 9, 10]). Связь метода подобных операторов с методом усреднения (заменой Крылова—Боголюбова) см. в [1, 3, 8]; связь с методом Р. Тернера — в [23]. Отметим, что в настоящее время метод подобных операторов постоянно развивается и адаптируется к различным классам операторов. Поэтому изложения метода, например, в [6] и в [10] отличаются. Мы при изложении общих положений метода будем придерживаться работ [9, 10].

Следуя М. Г. Крейну, будем называть операторы, действующие в пространстве операторов, *трансформаторами*. Одним из трансформаторов, широко используемым в методе подобных операторов, является коммутатор

$$\text{ad}_A : D(\text{ad}_A) \subset \text{End } \mathcal{H} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}, \quad \text{ad}_A X = AX - XA, \quad X \in D(\text{ad}_A).$$

Область определения $D(\text{ad}_A)$ состоит из всех таких $X \in \text{End } \mathcal{H}$, что выполняются следующие два свойства:

- (1) $XD(A) \subseteq D(A)$;
- (2) оператор $\text{ad}_A X : D(A) \subset \mathcal{H}$ допускает единственное расширение до ограниченного оператора $Y \in \text{End } \mathcal{H}$; при этом полагается $\text{ad}_A X = Y$.

Основным определением метода подобных операторов является определение допустимой тройки для невозмущенного оператора A .

Определение 2.3 (см. [9, 10]). Пусть $\mathcal{M}$ — линейное подпространство из $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ и $J : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, $\Gamma : \mathcal{M} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ — трансформаторы. Тройку $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ назовем *допустимой тройкой* для оператора A , а $\mathcal{M}$ — пространством допустимых возмущений, если выполнены следующие условия:

- (1) $\mathcal{M}$ — банахово пространство со своей нормой $\|\cdot\|_*$, непрерывно вложенное в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, т.е. существует такая постоянная $C > 0$, что $\|X\|_A \leq C\|X\|_*$ для любого $X \in \mathcal{M}$;
- (2) J и Γ — ограниченные линейные трансформаторы, причем J — идемпотент;
- (3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$ и имеют место равенства

$$(\text{ad}_A \Gamma X)x = A\Gamma Xx - \Gamma XAx = (X - JX)x, \quad x \in D(A), \quad X \in \mathcal{M},$$

где $\Gamma X \in \text{End } \mathcal{H}$ — единственное решение уравнения

$$\text{ad}_A Y = AY - YA = X - JX, \tag{2.1}$$

удовлетворяющее условию $JY = 0$;

(4) $XGY, (GX)Y \in \mathcal{M}$ для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что

$$\|\Gamma\| \leq \gamma, \quad \max\{\|XGY\|_*, \|(GX)Y\|_*\} \leq \gamma\|X\|_*\|Y\|_*; \quad (2.2)$$

(5) $J((GX)JY) = 0$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}$;

(6) для любых $X \in \mathcal{M}$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, что

$$\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon. \quad (2.3)$$

Теперь зафиксируем некоторую допустимую для невозмущенного оператора A тройку $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ и рассмотрим некоторое возмущение $B \in \mathcal{M}$.

Выпишем основные нелинейные уравнения, получаемые из условия подобия возмущенного оператора $A - B$ оператору $A - JX$, где X — некоторый оператор из $\mathcal{M}$, подлежащий определению (X — решение одного из приводимых далее нелинейных операторных уравнений). Отметим, что в общем случае условие $J^2 = J$ на выбор трансформатора J не обязательно, однако оно существенно облегчает изучение операторов $A - JX$ и в данной работе мы предполагаем его выполненным.

Тип уравнения для неизвестного оператора $X \in \mathcal{M}$ существенно зависит от способа построения оператора преобразования $U \in \text{End } \mathcal{H}$ оператора $A - B$ в оператор $A - JX$.

В методе подобных операторов обычно используют три варианта выбора оператора преобразования $U \in \text{End } \mathcal{H}$ (см. [6]).

Вариант 1. Пусть $U = I + GX$, $X \in \mathcal{M}$. Тогда подобие операторов $A - B$ и $A - JX$ запишется в виде

$$(A - B)(I + GX) = (I + GX)(A - JX), \quad (2.4)$$

откуда немедленно следует равенство

$$A - B + AGX - BGX = A + GX A - JX - (GX)(JX).$$

Учитывая свойство (3) определения 2.3, имеем

$$X - BGX - B = -(GX)JX,$$

откуда

$$X = BGX - (GX)JX + B. \quad (2.5)$$

Применим к обеим частям уравнения (2.5) оператор J ; учитывая свойство (5) определения 2.3, получим уравнение для нахождения неизвестного оператора $X \in \mathcal{M}$:

$$X = BGX - (GX)JX - (GX)J(BGX) + B. \quad (2.6)$$

Вариант 2. Пусть

$$U = \left(I + \frac{1}{2}GX\right) \left(I - \frac{1}{2}GX\right)^{-1}.$$

Для вывода соответствующего уравнения рассмотрим оператор

$$\left(I - \frac{1}{2}GX\right) (A - B) \left(I + \frac{1}{2}GX\right) - \left(I + \frac{1}{2}GX\right) (A - JX) \left(I - \frac{1}{2}GX\right)$$

и преобразуем его части:

$$\begin{aligned} \left(I + \frac{1}{2}GX\right) (A - JX) \left(I - \frac{1}{2}GX\right) &= A - JX - \frac{1}{2}(GX)A - \frac{1}{2}(GX)JX - \frac{1}{2}AGX + \\ &\quad + \frac{1}{2}(JX)GX + \frac{1}{4}(GX)JX(GX) - \frac{1}{4}(GX)A(GX), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{1}{2}GX\right) (A - B) \left(I + \frac{1}{2}GX\right) &= A - B - \frac{1}{2}GX - \frac{1}{2}JX + \frac{1}{2}(GX)B - \frac{1}{2}BGX - \\ &\quad - \frac{1}{4}(GX)A(GX) + \frac{1}{4}(GX)BGX. \end{aligned}$$

Опять же, используя свойство (3) определения 2.3, получаем, что имеет место равенство

$$\left(I - \frac{1}{2}\Gamma X\right)(A - B)\left(I + \frac{1}{2}\Gamma X\right) = \left(I + \frac{1}{2}\Gamma X\right)(A - JX)\left(I - \frac{1}{2}\Gamma X\right), \quad (2.7)$$

если оператор $X \in \mathcal{M}$ есть решение нелинейного операторного уравнения

$$X = \frac{1}{2} \left(\text{ad}_B \Gamma X - \text{ad}_{JX} \Gamma X - \frac{1}{2} \Gamma X (B - JX) \Gamma X \right) + B. \quad (2.8)$$

Определение 2.4. Линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ с $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$ называется *самосопряженным*, если оператор $iA : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ является генератором сильно непрерывной изометрической группы операторов $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\|T(t)\| = 1$.

Отметим, что несмотря на еще бóльшую громоздкость уравнения (2.8) по сравнению с уравнениями (2.5) и (2.6), оно обладает одним важным преимуществом. Если изначально A и B — самосопряженные операторы, то при рассмотрении уравнений (2.5) и (2.6) их решения не будут в общем случае самосопряженными; решение же уравнения (2.8) наследует важное свойство самосопряженности операторов A и B .

Вариант 3. Пусть $U = \exp(\Gamma X)$. В этом случае подобие операторов $A - B$ и $A - JX$ запишется в виде

$$(A - B) \exp(\Gamma X) = (\exp(\Gamma X))(A - JX). \quad (2.9)$$

Опустим в этом случае вывод нелинейного операторного уравнения для неизвестного оператора $X \in \mathcal{M}$ ввиду его громоздкости. Ограничимся самим уравнением (см. [6, 7]):

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(-1)^n \text{ad}_{\Gamma X/2}^n B - \text{ad}_{\Gamma X/2}^n JX \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left[\text{ad}_{\Gamma X/2}^{2n} (X - JX) \right] + B. \quad (2.10)$$

Преимущество рассмотрения третьего варианта состоит в том, что оператор преобразования $U = \exp(\Gamma X)$ всегда обратим и $U^{-1} = \exp(-\Gamma X)$, в отличие от выражения обратного к $I + \Gamma X$, через ряд

$$(I + \Gamma X)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\Gamma X)^i.$$

Каждое из уравнений (2.6), (2.8), (2.10) можно записать в виде

$$X = \Phi_i(X), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.11)$$

где $\Phi_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, $i = 1, 2, 3$, — нелинейные трансформаторы, определяемые правыми частями соответствующих нелинейных операторных уравнений. Так, например,

$$\Phi_1(X) = B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B, \quad X \in \mathcal{M}.$$

Теорема 2.1 (см. [6, теорема 19.3]). Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора A тройка, $B \in \mathcal{M}$ и

$$\gamma \|B\|_* \|J\| < \frac{1}{9}. \quad (2.12)$$

Тогда любое из уравнений (2.6), (2.8), (2.10) разрешимо и имеет единственное решение $X_i \in \mathcal{M}$, $i = 1, 2, 3$. Кроме того, операторы $A - B$ и $A - JX_i$ подобны, и при подстановке $X = X_i$, $i = 1, 2, 3$, имеют место равенства (2.4), (2.7), (2.9), соответственно.

Отметим, что обычно не рассматривают сразу все три преобразования подобия и все три нелинейных операторных уравнения. Если же каждый вариант рассматривать отдельно, то для первого и второго случаев условие (2.12) можно ослабить. Приведем соответствующие теоремы. Кроме того, в стандартной схеме условие разрешимости нелинейных уравнений (2.11) устанавливалось с помощью метода мажорантных уравнений. В данной работе мы предложим другой способ доказательства известной базовой теоремы метода подобных операторов, отличный от изложенного в [6].

Теорема 2.2 (см. [6, теорема 19.2]). Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора A тройка и B — некоторый оператор из $\mathcal{M}$. Если

$$4\gamma\|B\|_*\|J\| < 1, \quad (2.13)$$

то оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, где $X_* \in \mathcal{M}$ является решением нелинейного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi_1(X).$$

Решение X_* может быть найдено методом простых итераций, если положить $X_0 = 0$ и $X_n = \Phi_1(X_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - JX_*$ осуществляет обратимый оператор $I + \Gamma X_* \in \text{End } \mathcal{H}$. Отображение $\Phi_1 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ является сжимающим в шаре $\mathcal{B} = \{X \in \mathcal{M} : \|X - B\|_* \leq 3\|B\|_*\}$.

Доказательство (см. также [27]). Мы используем теорему Банаха о неподвижной точке, чтобы доказать существование решения $X_* \in \mathcal{M}$ нелинейного операторного уравнения (2.6). Отметим, что

$$\|X\|_* = \|X - B + B\|_* \leq \|X - B\|_* + \|B\|_* \leq 4\|B\|_*.$$

Покажем, что отображение Φ_1 переводит шар $\mathcal{B}$ в себя и

$$\|\Phi_1(X) - \Phi_1(Y)\|_* \leq q\|X - Y\|_*$$

для всех $X, Y \in \mathcal{B}$ и некоторого $q < 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(X) - B\|_* &\leq \|B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X)\|_* \leq \\ &\leq 4\gamma\|B\|_*^2 + 4\gamma\|J\|\|B\|_*^2 + 16\gamma^2\|J\|\|B\|_*^3 \leq (\|J\|^{-1} + 1 + \|J\|^{-1})\|B\|_* \leq 3\|B\|_*. \end{aligned}$$

Введем обозначение $q = 4\gamma\|J\|\|B\|_*$. Очевидно, в силу (2.13), выполняется неравенство $q < 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(X) - \Phi_1(Y)\|_* &\leq \\ &\leq \|B\Gamma(X - Y)\|_* + \|\Gamma(X - Y)JB\|_* + \|(\Gamma X)J(B\Gamma X) - (\Gamma Y)J(B\Gamma Y) \pm (\Gamma X)J(B\Gamma Y)\|_* \leq \\ &\leq \gamma\|B\|_*\|X - Y\|_* + \gamma\|J\|\|B\|_*\|X - Y\|_* + \|(\Gamma X)J(B\Gamma(X - Y))\|_* + \|\Gamma(X - Y)J(B\Gamma Y)\|_* \leq \\ &\leq \gamma\|B\|_*\|X - Y\|_* + \gamma\|J\|\|B\|_*\|X - Y\|_* + \gamma^2\|B\|_*(\|X\|_* + \|Y\|_*)\|X - Y\|_* \leq \\ &\leq \left(\frac{q}{4}\|J\|^{-1} + \frac{q}{4} + \frac{q^2}{2}\|J\|^{-1}\right)\|X - Y\|_* \leq q\|X - Y\|_*. \end{aligned}$$

Таким образом, отображение Φ_1 переводит шар $\mathcal{B}$ в себя и является в этом шаре сжимающим отображением с константой сжатия $q < 1$. Поэтому отображение Φ_1 имеет в шаре $\mathcal{B}$ единственную неподвижную точку X_* , $\Phi_1(X_*) = X_*$ и эта точка X_* может быть найдена как предел последовательности X_n , $n \geq 0$, $X_0 = 0$, $X_1 = B$, $\dots$, $X_n = \Phi_1(X_{n-1})$, $\dots$.

Осталось показать, что оператор $I + \Gamma X_*$ непрерывно обратим и $(\Gamma X_*)D(A) = D(A)$. Пусть X_* — решение уравнения (2.6). Тогда

$$\|\Gamma X_*\| \leq \gamma\|X_*\|_* \leq 4\gamma\|B\|_* < 1 \quad (2.14)$$

и

$$(I + \Gamma X_*)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\Gamma X_*)^n.$$

Так как $(I + \Gamma X_*)D(A) \subset D(A)$ согласно свойству (3) определения 2.3, то осталось показать, что $(I + \Gamma X_*)^{-1}D(A) \subset D(A)$. Пусть $\lambda \in \rho(A)$. Тогда

$$\begin{aligned} (\Gamma X_*)(A - \lambda I)^{-1} &= (A - \lambda I)^{-1}((A - \lambda I)(\Gamma X_*)(A - \lambda I)^{-1}) = \\ &= (A - \lambda I)^{-1}(X_* - JX_* + (\Gamma X_*)A - \lambda \Gamma X_*)(A - \lambda I)^{-1} = (A - \lambda I)^{-1}((X_* - JX_*)(A - \lambda I)^{-1} + \Gamma X_*). \end{aligned}$$

Используя свойство (6) определения 2.3 и (2.14), выберем такое $\lambda \in \rho(A)$, что

$$\|(X_* - JX_*)(A - \lambda I)^{-1} + \Gamma X_*\| < 1.$$

Тогда

$$(I + \Gamma X_*)^{-1}(A - \lambda I)^{-1} = (A - \lambda I)^{-1} \left(I + (X_* - JX_*)(A - \lambda I)^{-1} + \Gamma X_* \right)^{-1}.$$

Следовательно, $(I + \Gamma X_*)^{-1}D(A) \subseteq D(A)$. Доказательство теоремы 2.2 закончено. $\square$

Аналогично можно показать, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.3. Пусть A и B — самосопряженные операторы, $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора A тройка, причем

$$(JY)^* = J(Y^*), \quad Y \in \mathcal{M}.$$

Если выполнено условие

$$\gamma \|B\|_* \|J\| < 0,1568,$$

то уравнение (2.8) имеет единственное решение $X_* \in \mathcal{M}$, которое является самосопряженным оператором. Это решение может быть найдено методом простых итераций. Операторы $A - B$ и $A - JX_*$ подобны и имеет место равенство (2.7).

3. Предварительные сведения. Пусть $\mathcal{H} = L_2[0, \omega]$ — гильбертово пространство (классов эквивалентности) комплекснозначных функций, измеримых по Лебегу на отрезке $[0, \omega]$ и суммируемых с квадратом модуля. Скалярное произведение в $L_2[0, \omega]$ и порождаемая им норма задаются формулами

$$(x, y) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega x(s) \overline{y(s)} ds, \quad x, y \in \mathcal{H}, \quad \|x\|^2 = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega |x(s)|^2 ds, \quad x \in \mathcal{H},$$

Через $W_2^1[0, \omega]$ обозначено пространство Соболева абсолютно непрерывных функций из $\mathcal{H}$ с производными из $\mathcal{H}$ и скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle = (x, y) + (x', y'), \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

В пространстве $\mathcal{H}$ рассматривается интегро-дифференциальный оператор первого порядка

$$(Ly)(s) = y'(s) - \int_0^s K(t, s)y(s) ds \quad (3.1)$$

с областью определения $D(L)$, порождаемой периодическими краевыми условиями $D(L) = \{y \in W_2^1[0, \omega] : y(0) = y(\omega)\}$. Предполагается также, что ядро интегрального оператора удовлетворяет условию

$$\int_0^\omega \int_0^\omega |K(t, s)|^2 ds dt < \infty. \quad (3.2)$$

Представим оператор L в виде $L = L_0 - B$, где

$$L_0 : D(L_0) = D(L) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad (L_0 y)(t) = y'(t), \quad (By)(t) = \int_0^\omega K(t, s)y(s) ds.$$

Невозмущенным, или свободным, считаем оператор L_0 , а возмущением — оператор B .

Определение 3.1. [22]. Оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ с плотной областью определения $\overline{D(A)}$ называется *нормальным*, если $D(A) = D(A^*)$ и $\|Ax\| = \|A^*x\|$ для всех $x \in D(A)$.

Отметим, что в [5, 6] использовалось другое, эквивалентное, определение нормального оператора.

Определение 3.2. Линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ с $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$ называется *нормальным*, если он представим в виде $A = A_1 + iA_2$, где $A_i : D(A_i) = D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, — самосопряженные операторы.

Невозмущенный оператор L_0 является нормальным оператором с компактной резольвентой. Его простыми изолированными собственными значениями являются числа $\lambda_n = i2\pi n/\omega$, $n \in \mathbb{Z}$, а соответствующими собственными векторами — функции $e_n(t) = e^{\lambda_n t} = e^{i2\pi n t/\omega}$, $n \in \mathbb{Z}$. Спектральные проекторы $P_n = P(\{\lambda_n\}, L_0)$, $n \in \mathbb{Z}$, задаются формулой

$$P_n x = (x, e_n) e_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Введем в рассмотрение двусторонний идеал операторов Гильберта—Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ из алгебры $\text{End } \mathcal{H}$. Через $\|X\|_2$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, обозначим норму Гильберта—Шмидта: $\|X\|_2^2 = \text{tr}(XX^*)$ — след оператора XX^* , принадлежащего двустороннему идеалу $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ ядерных операторов из $\text{End } \mathcal{H}$ (см. [21]) с нормой $\|X\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n$, где (s_n) — последовательность s -чисел оператора

$X \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$. Пространство $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ является гильбертовым, и формула $(X, Y) = \text{tr}(XY^*)$ задает скалярное произведение в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Свойства операторных идеалов $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$, в частности, используемые далее, можно найти в [21].

Каждому оператору $X \in \text{End } \mathcal{H}$ поставим в соответствие его операторную матрицу $X = (X_{ij})$, $i, j \in \mathbb{Z}$, где $X_{ij} = P_i X P_j$ и проекторы P_i , $i \in \mathbb{Z}$, определены формулой (3.3).

Отметим, что система проекторов $(P_i, i \in \mathbb{Z})$ является дизъюнктивной системой ортопроекторов, и в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|X\|_2^2 = \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} \|X_{ij}\|_2^2.$$

Заметим, что условие (3.2) на оператор-возмущение B означает, что $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и

$$\|B\|_2^2 = \int_0^\omega \int_0^\omega |K(t, s)|^2 ds dt.$$

Пусть ядро $K(t, s)$ имеет ряд Фурье вида

$$K(t, s) = \sum_{l, p \in \mathbb{Z}} \widehat{k}(l, p) e^{i \frac{2\pi l}{\omega} t} e^{i \frac{2\pi p}{\omega} s}.$$

Тогда из условия (3.2) следует, что

$$\sum_{l, p \in \mathbb{Z}} |\widehat{k}(l, p)|^2 < \infty.$$

Кроме того, в базисе из собственных векторов e_i , $i \in \mathbb{Z}$, невозмущенного оператора L_0 матрица оператора-возмущения B состоит из элементов

$$b_{lp} = \frac{1}{\omega} \widehat{k}(-l, p), \quad l, p \in \mathbb{Z}.$$

В следующем разделе мы перейдем к построению допустимых троек для невозмущенного оператора L_0 . Подчеркнем, что метод подобных операторов легок в применении, если собственные значения невозмущенного оператора разбегаются. В данном же случае этого не происходит, и $\text{dist}(\{\lambda_n\}, \sigma(L_0) \setminus \{\lambda_n\}) = 2\pi/\omega$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому приходится строить две допустимые тройки: первая с допустимым пространством возмущений $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, а вторая — с допустимым пространством возмущений $\mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, построенным по возмущению $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ с использованием последовательности $(\alpha_n, n \in \mathbb{Z})$, которая учитывает скорость убывания элементов $P_i B P_j$, $i, j \in \mathbb{Z}$, $|i|, |j| \rightarrow \infty$.

4. Построение семейства допустимых троек $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J_k, \Gamma_k)$. Пусть $\mathcal{M} = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Отметим, что невозмущенный оператор L_0 необратим, но вместо L_0 можно рассматривать оператор $L_0 - \mu I$, $\mu \in \rho(L_0)$. Допустимые тройки для L_0 и $L_0 - \mu I$ будут одинаковыми.

Очевидно, что $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{L}_{L_0}(\mathcal{H})$, и свойство (1) определения 2.3 имеет место.

Перейдем к построению трансформаторов $J, \Gamma \in \text{End}(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}))$. Для $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ определим трансформаторы JX и ΓX матрицами

$$(JX)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (\Gamma X)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}/(\lambda_i - \lambda_j), & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases} \quad (4.1)$$

Очевидно, что $JX = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n X P_n$, и выписанный ряд безусловно сходится в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$,

$$\|JX\|_2^2 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \|P_i X P_i\|_2^2 \leq \|X\|_2^2,$$

т.е. из $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следует, что $JX \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Покажем, что $\Gamma X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ для $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Действительно,

$$\|\Gamma X\|_2^2 = \sum_{\substack{i, j \in \mathbb{Z}, \\ i \neq j}} \frac{\|X_{ij}\|_2^2}{|\lambda_i - \lambda_j|^2} \leq \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 \sum_{\substack{i, j \in \mathbb{Z}, \\ i \neq j}} \|X_{ij}\|_2^2 \leq \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 \|X\|_2^2. \quad (4.2)$$

Теорема 4.1. *Тройка $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J, \Gamma)$ является допустимой тройкой для оператора L_0 .*

Доказательство. Непрерывность трансформаторов $J, \Gamma \in \text{End}(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}))$ следует из их построения. Норма $\|J\|$ трансформатора $J \in \text{End}(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}))$ равна единице, так как, с одной стороны, $\|JX\|_2^2 \leq \|X\|_2^2$, а с другой стороны, если $X = \sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i X P_i$, то $\|JX\|_2^2 = \|X\|_2^2$.

Покажем, что $J^2 = J$:

$$J(JX) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P_j \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i X P_i \right) P_j = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P_j X P_j = JX.$$

Проверим свойства определения 2.3, относящиеся к трансформатору $\Gamma \in \text{End}(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}))$. Для проверки свойства (3) вычислим матрицы операторов $L_0 \Gamma X$, $\Gamma X L_0$, $X - JX$. Очевидно, что

$$(L_0 \Gamma X)_{ij} = \frac{\lambda_i X_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad (\Gamma X L_0)_{ij} = \frac{\lambda_j X_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad (X - JX)_{ij} = X_{ij}, \quad i \neq j.$$

При $i = j$ все три элемента равны нулю. Тогда

$$\frac{\lambda_i X_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j} - \frac{\lambda_j X_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j} = X_{ij}, \quad i \neq j.$$

Таким образом, условие (2.1) выполнено.

Из формулы (4.2) следует, что $\|\Gamma\|$ оценивается величиной $\omega/(2\pi)$. Операторы $X\Gamma Y$, $(\Gamma X)Y$ для $X, Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ принадлежат $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $\|X\Gamma Y\|_2 \leq (\omega/(2\pi))\|X\|_2\|Y\|_2$; $\|(\Gamma X)Y\|_2$ оценивается той же величиной. Свойство (4) выполняется.

Пусть $\lambda_0 \in \rho(L_0)$, $x \in D(L_0)$. Тогда $x = (L_0 - \lambda_0 I)^{-1}y$, $y \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \Gamma X(L_0 - \lambda_0 I)^{-1}y &= \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z}, \\ n \neq m}} \frac{X_{mn}}{(\lambda_m - \lambda_n)(\lambda_n - \lambda_0)} y = \\ &= \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z}, \\ n \neq m}} \frac{X_{mn}}{(\lambda_m - \lambda_n)(\lambda_m - \lambda_0)} y + \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{Z}, \\ n \neq m}} \frac{X_{mn}}{(\lambda_m - \lambda_0)(\lambda_n - \lambda_0)} y = \\ &= (L_0 - \lambda_0 I)^{-1}(\Gamma X)y + (L_0 - \lambda_0 I)^{-1}(X - JX)x = (L_0 - \lambda_0 I)^{-1}(\Gamma Xy + (X - JX)x). \end{aligned}$$

Таким образом, $(\Gamma X)D(L_0) \subset D(L_0)$.

Переходим к свойству (5). Пусть $Z = (\Gamma X)(JY)$, $X, Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда

$$Z_{ij} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\Gamma X)_{ip} (JX)_{pj} = \begin{cases} X_{ij} X_{jj}/(\lambda_i - \lambda_j), & i \neq j, \\ 0, & i = j, \end{cases}$$

поэтому $J(\Gamma X(JY)) = 0$.

Рассмотрим последнее, шестое свойство определения 2.3. Пусть $\lambda_\varepsilon \in \rho(L_0)$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Оператор $X(L_0 - \lambda_\varepsilon I) \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеет операторную матрицу, состоящую из элементов $X_{ij}/(\lambda_i - \lambda_\varepsilon)$, $i, j \in \mathbb{Z}$, поэтому

$$\|X(L_0 - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_2^2 \leq \frac{1}{\max_{j \in \mathbb{Z}} (\lambda_i - \lambda_j)} \|X\|_2^2.$$

Последнюю величину можно сделать сколь угодно малой за счет подходящего выбора числа $\lambda_\varepsilon \in \rho(L_0)$. Теорема 4.1 доказана. $\square$

Положим

$$P_{(k)} = \sum_{\substack{|i| \leq k, \\ i \in \mathbb{Z}}} P_i, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Наряду с трансформаторами $J, \Gamma \in \text{End}(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}))$ введем в рассмотрение семейства операторов $J_k, \Gamma_k \in \text{End}(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}))$, $k \in \mathbb{Z}_+$, определенных формулами

$$J_k X = P_{(k)} X P_{(k)} + \sum_{\substack{|i| > k, \\ i \in \mathbb{Z}}} P_i X P_i, \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \quad (4.3)$$

$$\Gamma_k X = \Gamma X - P_{(k)} (\Gamma X) P_{(k)} = \Gamma(X - J_k X), \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \quad (4.4)$$

при этом $J_0 X = JX$, $\Gamma_0 X = \Gamma X$. Операторы $J_k X$ и $\Gamma_k X$, $k \in \mathbb{Z}_+$, определены корректно, все указанные ряды сходятся в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Отметим, что операторы $J_k X$ и $\Gamma_k X$ отличаются от операторов JX и ΓX на оператор конечного ранга $2k + 1$. Аналогично предыдущему, имеет место следующая теорема.

Теорема 4.2. *Тройка $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \Gamma_k X, J_k X)$ является допустимой для оператора L_0 тройкой при любом $k \in \mathbb{Z}_+$.*

5. Построение семейства допустимых троек $(\mathcal{M}_B, J_k, \Gamma_k)$. Ниже будем использовать пространства допустимых возмущений $\mathcal{M}_B$, впервые введенные в [9]. Основные результаты в [11–13, 24, 25, 27] также получены с использованием этих пространств. Чтобы описать их, для любого ненулевого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ введем в рассмотрение двустороннюю последовательность вещественных чисел вида

$$\alpha_n(X) = \|X\|_2^{-1/2} \max \left\{ \left(\sum_{\substack{|k| \geq n, \\ k \in \mathbb{Z}}} \|P_k X\|_2^2 \right)^{1/4}, \left(\sum_{\substack{|k| \geq n, \\ k \in \mathbb{Z}}} \|X P_k\|_2^2 \right)^{1/4} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.1)$$

Последовательность $(\alpha_n(X))$, $n \in \mathbb{Z}$, обладает следующими свойствами:

- (1) $\alpha_n(X) = \alpha_{-n}(X)$, $n \in \mathbb{Z}$;
- (2) $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \alpha_n(X) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$;
- (3) $\alpha_n(X) \leq 1$ для всех $n \in \mathbb{Z}$;
- (4) $\alpha_n(X) \geq \alpha_{n+1}(X)$, $n \geq 0$;
- (5) $\alpha_n(X) \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, если $P_{(m)} X P_{(m)} \neq X$ для всех $m \in \mathbb{Z}_+$;
- (6) конечна величина

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\|X P_n\|_2^2 + \|P_n X\|_2^2}{(\alpha_n(X))^2}.$$

Без ограничения общности можно в дальнейшем считать, что $P_{(n)} B P_{(n)} \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$; в противном случае оператор $L_0 - B$ есть ортогональная сумма оператора конечного ранга $(L_0 - B)|_{\mathcal{H}_{(n)}}$ для некоторого $n \geq 0$ и оператора $L_0|_{\mathcal{H}^{(n)}}$, где $\mathcal{H}_{(n)} = P_{(n)} \mathcal{H}$ и $\mathcal{H}^{(n)} = (I - P_{(n)}) \mathcal{H}$.

Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ рассмотрим самосопряженный компактный оператор F_X , определенный формулой

$$F_X = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n(X) P_n.$$

Отметим, что $F_X \in \text{End } \mathcal{H}$ есть функция от нормального оператора L_0 вида $F_X = f_X(L_0)$, где $f_X : \sigma(L_0) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f_X(\lambda_n) = \alpha_n(X)$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\|F_X\| = \max_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n(X)| = 1$.

Для упрощения дальнейшей записи оператор F_B обозначим через F .

Введем множество операторов $\mathcal{M}_B$ из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, допускающих представление вида

$$X = X_l F, \quad X = F X_r,$$

где $X_l, X_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Положим $\|X\|_{\mathcal{M}_B} = \max\{\|X_l\|_2, \|X_r\|_2\}$. Очевидно, что $\|X\|_2 \leq \|X\|_{\mathcal{M}_B}$, $X \in \mathcal{M}_B$.

Свойство $\text{Ker } F = 0$ (см. свойство (5) последовательности $\alpha_n(X)$) позволяет заключить, что введенное множество операторов $\mathcal{M}_B$ является банаховым пространством.

Очевидно, что для любого оператора X из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеет место представление

$$X = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha_n(X)} X P_n \right) F_X = F_X \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha_n(X)} P_n X \right).$$

Поэтому возмущение B принадлежит пространству $\mathcal{M}_B$.

Отметим, что последовательность $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$ характеризует скорость убывания матричных элементов оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ по строкам и столбцам.

Поскольку $\mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то трансформаторы J_k и Γ_k , $k \geq 0$, задаваемые формулами (4.1), (4.3), (4.4), определены и для операторов из $\mathcal{M}_B$. Более того, подпространство $\mathcal{M}_B$ инвариантно относительно J_k и Γ_k , $k \geq 0$, и

$$\begin{aligned} J_k(X_l F) &= (J_k X_l) F, & J_k(F X_r) &= F(J_k X_r), \\ \Gamma_k(X_l F) &= (\Gamma_k X_l) F, & \Gamma_k(F X_r) &= F(\Gamma_k X_r), \end{aligned}$$

где $X_r, X_l \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Для оценки норм $\|\Gamma_k(XF)\|_2$ и $\|\Gamma_k(FX)\|_2$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, рассмотрим две последовательности (α'_n) , $n \in \mathbb{N}$, и $(\tilde{\alpha}'_n)$, $n \in \mathbb{N}$, определенные формулами

$$\alpha'_{n+1} = \max \{ \lambda_l d_{jl}^{-1}, l, j \in \mathbb{Z}, |l| \leq n, |j| > n \}, \quad (5.2)$$

$$\tilde{\alpha}'_n = \frac{\omega}{2\pi} \alpha_n + \alpha'_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.3)$$

где $d_{ij} = \text{dist}(\sigma_i, \sigma_j)$, $i, j \in \mathbb{Z}$. Последовательности (α'_n) и $(\tilde{\alpha}'_n)$ принадлежат пространству c_0 сходящихся к нулю последовательностей, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha'_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}'_n = 0. \quad (5.4)$$

Следующая лемма является аналогом леммы 3 из [9].

Лемма 5.1. Для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеют место оценки

$$\max \{ \|\Gamma_k(XF)\|_2, \|\Gamma_k(FX)\|_2 \} \leq \tilde{\alpha}_{k+1} \|X\|_2.$$

Доказательство. Пусть $P^{(k)} = I - P_{(k)}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, — дополнительный к $P_{(k)}$ проектор. Тогда

$$\|FP^{(k)}\| = \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n P_n P^{(k)} \right\| \leq \alpha_{k+1}.$$

Из определения трансформатора Γ_k следует

$$\Gamma_k(XF) = \Gamma_k(XFP^{(k)}) + \Gamma_k(P^{(k)}XFP_{(k)}).$$

Выпишем матрицы операторов $\Gamma_k(XFP^{(k)})$, $\Gamma_k(P^{(k)}XFP_{(k)})$:

$$\begin{aligned} (\Gamma_k(XFP^{(k)}))_{jl} &= \begin{cases} \alpha_l X_{jl} / (\lambda_j - \lambda_l), & |l| > k, l \neq j, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\ (\Gamma_k(P^{(k)}XFP_{(k)}))_{jl} &= \begin{cases} \alpha_l X_{jl} / (\lambda_j - \lambda_l), & |l| \leq k, |j| > k, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\Gamma_k(XFP^{(k)})\|_2 \leq \frac{\omega}{2\pi} \alpha_{k+1} \|X\|_2^2, \quad \|\Gamma_k(P^{(k)}XFP_{(k)})\|_2 \leq \alpha'_{k+1} \|X\|_2^2.$$

Таким образом, для $\|\Gamma_k XF\|_2$ оценка установлена. Аналогично и той же величиной оценивается $\|\Gamma_k(FX)\|_2$. Лемма 5.1 доказана. $\square$

Теорема 5.1. *Тройка $(\mathcal{M}_B, J_k, \Gamma_k)$ является допустимой тройкой для невозмущенного оператора L_0 для любого $k \in \mathbb{Z}_+$, а постоянная $\gamma = \gamma_k$ из определения 2.3 допускает оценку*

$$\gamma_k \leq \tilde{\alpha}'_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Ранее было установлено, что $\mathcal{M}_B$ является банаховым пространством. Из вложения $\mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следует, что $\mathcal{M}_B \subset \mathfrak{L}_{L_0}(\mathcal{H})$.

Выполнение свойств (2), (3) и (5) следует из построения трансформаторов $J_k, \Gamma_k \in \text{End}(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}))$, $k \geq 0$.

Перейдем к свойству (4). Пусть $X = X_l F \in \mathcal{M}_B$, $Y = Y_l F \in \mathcal{M}_B$, $X_l, Y_l \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда $X\Gamma_k Y = X_l F \Gamma_k Y_l F = Z_l F$, где $Z_l = X_l F \Gamma_k Y_l$. Из леммы 5.1 следует, что

$$\|Z_l\|_2 \leq \tilde{\alpha}'_{k+1} \|X_l\|_2 \|Y_l\|_2 \leq \tilde{\alpha}'_{k+1} \|X\|_{\mathcal{M}_B} \|Y\|_{\mathcal{M}_B}.$$

Аналогично устанавливаются остальные оценки в свойстве (4). Теорема 5.1 доказана. $\square$

6. Основные результаты. Отметим, что в данном случае операторы L_0 и B не являются самосопряженными, поэтому мы будем использовать оператор преобразования $U = I + \Gamma X$ и уравнение (2.6).

Из теорем 4.1 и 2.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Пусть для оператора B выполнено условие*

$$\|B\|_2 < \frac{\pi}{2\omega}. \quad (6.1)$$

Тогда оператор $L_0 - B$ подобен оператору $L_0 - J_k X_ = L_0 - V$, $X_*, V \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, имеющему диагональную операторную матрицу. Имеет место равенство*

$$(L_0 - B)(I + \Gamma X_*) = (I + \Gamma X_*)(L_0 - V),$$

где оператор $X_ \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — решение нелинейного операторного уравнения (2.6).*

Отметим, что условие (6.1) довольно жесткое и не всегда выполняется. Поэтому обычно бывает удобно рассмотреть допустимую тройку $(\mathcal{M}_B, J_k, \Gamma_k)$ из раздела 5.

Теорема 6.2. *Пусть целое число $k \geq 0$ таково, что выполняется неравенство*

$$4\tilde{\alpha}'_{k+1} \|B\|_{\mathcal{M}_B} < 1.$$

Тогда оператор $L_0 - B$ подобен блочно-диагональному оператору

$$L_0 - J_k X_* = L_0 - P_{(k)} X_* P_{(k)} - \sum_{\substack{|i| > k, \\ i \in \mathbb{Z}}} P_i X_* P_i = L_0 - V,$$

где $X_ \in \mathcal{M}_B$ — решение нелинейного уравнения (2.6). Оператор преобразования оператора $L_0 - B$ в оператор $L_0 - V$ есть оператор $I + \Gamma X_*$, $\Gamma X_* \in \mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.*

Далее через $l_p = l_p(\mathbb{Z})$, $1 \leq p < \infty$, обозначим банахово пространство двусторонних числовых последовательностей $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, суммируемых со степенью p , с нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|^p \right)^{1/p}, \quad x \in l_p.$$

Из теорем 6.1, 6.2 и леммы 2.1 получаются следующие утверждения, касающиеся асимптотики спектра возмущенного оператора L .

Теорема 6.3. Пусть выполнено условие (6.1). Тогда спектр $\sigma(L)$ оператора L представим в виде объединения простых изолированных собственных значений $\tilde{\lambda}_n$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$\sigma(L) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{\tilde{\lambda}_n\},$$

где

$$\tilde{\lambda}_n = i \frac{2\pi n}{\omega} - (Be_n, e_n) + \beta_n, \quad (6.2)$$

и последовательность (β_n) принадлежит l_1 .

Доказательство. Первое утверждение теоремы 6.3 следует из теоремы 6.1 и леммы 2.1. Для доказательства формулы (6.2) применим к обеим частям уравнения (2.6) проекторы P_n слева и справа и, учитывая свойство (5) определения 2.3, получим

$$P_n X_* P_n = P_n (B \Gamma_m X_*) P_n + P_n B P_n. \quad (6.3)$$

При этом оператор $B \Gamma X_* \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ как произведение двух операторов Гильберта—Шмидта. Напомним также, что оператор $L_0 - J X_*$ диагональный и образ проектора P_n , $n \in \mathbb{Z}$, одномерный. Следовательно,

$$\sigma(L_0 - J X_*) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{\lambda_n - x_{*nn}\},$$

где $x_{*nn} = (X_* e_n, e_n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Из (6.3) вытекает, что $x_{*nn} = (Be_n, e_n) + \beta_n$, $n \in \mathbb{Z}$, где последовательность β_n принадлежит l_1 . Теорема 6.3 доказана. $\square$

Теорема 6.4. В условиях теоремы 6.2 спектр $\sigma(L)$ оператора L представим в виде

$$\sigma(L) = \tilde{\sigma}_{(n)} \cup \{\tilde{\lambda}_k, |k| > n\},$$

где множество $\tilde{\sigma}_{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, содержит не более чем $2n + 1$ собственных значений, собственные значения $\tilde{\lambda}_k$, $|k| > n$, простые изолированные,

$$\tilde{\lambda}_k = i \frac{2\pi k}{\omega} - (Be_k, e_k) + \beta'_k,$$

и последовательность β'_k принадлежит l_1 .

Теорема 6.5. Собственные векторы $\tilde{e}_i$, $i \in \mathbb{Z}$, оператора L образуют в пространстве $\mathcal{H}$ базис Бари (в частности, базис Рисса) и p -базис для $p \geq 1$. Имеют место следующие формулы:

$$\tilde{e}_i = e_i + \Gamma_k X_* e_i, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

где X_* — решение нелинейного операторного уравнения (2.6),

$$\|\tilde{e}_i - e_i\| = \delta_i, \quad |i| > k,$$

$$\|\tilde{e}_i - e_i - \Gamma_k B e_i\| = \left\| \tilde{e}_i - e_i + \frac{i\omega}{2\pi} \sum_{j \neq i} \frac{B e_j}{j - i} e_j \right\| = \delta'_i, \quad |i| > k.$$

где последовательность δ_i , $|i| > k$, принадлежит l_2 , а последовательность δ'_i , $|i| > k$, принадлежит l_1 .

Утверждение теоремы 6.5 следует из леммы 2.1 и принадлежности оператора ΓX_* идеалу $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, а оператора $\Gamma(X_* - B)$ идеалу $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$.

Перейдем к оценке спектральных проекторов. Обозначим через Ω произвольное множество из $\mathbb{Z} \setminus \{-k, \dots, 0, 1, \dots, k\}$. Для множества $\Delta = \Delta(\Omega) = \{\lambda_n, n \in \Omega\}$ проектор $P_\Delta = P(\Delta, L_0)$ определим равенством

$$P_\Delta x = \sum_{n \in \Omega} P_n x, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Аналогично,

$$\tilde{P}_i = P(\{\tilde{\lambda}_i\}, L), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad \tilde{P}_{(k)} = P(\tilde{\sigma}_k, L), \quad \tilde{P}_\Delta x = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tilde{P}_i x, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Лемма 6.1. Пусть имеют место условия теоремы 6.1. Тогда для спектральных проекторов $\tilde{P}_i$, $|i| > k$, $\tilde{P}_{(k)}$ и $\tilde{P}_\Delta$ справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_i &= P_i U^{-1} + \Gamma X_* P_i U^{-1}, & \tilde{P}_i - P_i &= (\Gamma_k X_* P_i - P_i \Gamma_k X_*) U^{-1}, \\ \tilde{P}_{(k)} &= P_{(k)} U^{-1} + \Gamma_k X_* P_{(k)} U^{-1}, & \tilde{P}_{(k)} - P_{(k)} &= (\Gamma_k X_* P_{(k)} - P_{(k)} \Gamma_k X_*) U^{-1}, \\ \tilde{P}_\Delta &= P_\Delta U^{-1} + \Gamma_k X_* P_\Delta U^{-1}, & \tilde{P}_\Delta - P_\Delta &= (\Gamma_k X_* P_\Delta - P_\Delta \Gamma_k X_*) U^{-1}.\end{aligned}$$

Все приведенные в лемме 6.1 формулы следуют из представления проекторов подобных операторов в виде $\tilde{P}_i = U P_i U^{-1}$, $|i| > k$; аналогично для проекторов $\tilde{P}_{(k)}$ и $\tilde{P}_\Delta$.

Непосредственно из леммы 6.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6.6. В условиях теорем 6.1 и 6.2 для спектральных проекторов $\tilde{P}_j$, $j > k$, и $\tilde{P}_\Delta$ имеют место оценки

$$\|\tilde{P}_j - P_j\|_2 \leq M \nu(j),$$

где $\nu : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ — последовательность из l_2 и M — некоторая константа.

Доказательство. Так как

$$\|\tilde{P}_j - P_j\|_2 \leq \|U^{-1}\| (\|\Gamma_k X_* P_j\|_2 + \|P_j \Gamma_k X_*\|_2) \leq M \max \{\|X_* P_j\|_2, \|P_j X_*\|_2\},$$

то оценка установлена. При этом последовательности $\|X_* P_j\|_2$, $|j| > k$, а также $\|P_j X_*\|_2$, $|j| > k$, суммируемы с квадратом, так как $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. $\square$

В заключение этого раздела отметим, что аналогично [11, 25, 27] можно выписать группу операторов, генератором которой является исследуемый оператор L .

7. Пример. Пусть $\omega = 1$ и

$$(By)(t) = C \int_0^1 t(t+s)y(s) ds,$$

где $C > 0$ — некоторая константа. Непосредственный подсчет показывает, что $\|B\|_2 = C\sqrt{101/180}$ и возмущение B имеет числовую матрицу $B \sim (b_{nm})$, $n, m \in \mathbb{Z}$, состоящую из элементов

$$b_{nm} = \begin{cases} \frac{C}{4\pi^2 nm}, & n, m \neq 0, \\ \frac{7C}{12}, & n = m = 0, \\ -\frac{iC}{4\pi m}, & n = 0, m \neq 0, \\ \frac{3iC}{4\pi n} + \frac{C}{2\pi^2 n^2}, & n \neq 0, m = 0. \end{cases}$$

Возмущение B не является самосопряженным оператором, и сопряженный оператор B^* задается формулой

$$(B^*y)(t) = \int_0^1 s(t+s)y(s) ds.$$

Из теорем 6.1–6.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 7.1. Пусть число C таково, что выполняется условие

$$\frac{2C}{\pi} \sqrt{\frac{101}{180}} < 1. \quad (7.1)$$

Тогда оператор L подобен оператору $L_0 - V$, где $V \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, оператор $V = JX_*$ имеет диагональную матрицу и X_* есть решение уравнения (2.6). Имеют место следующие оценки собственных значений оператора L :

$$\tilde{\lambda}_0 = -\frac{7C}{12} + \beta_0, \quad \tilde{\lambda}_n = i2\pi n - \frac{C}{4\pi^2 n^2} + \beta_n,$$

где последовательность $(\beta_n, n \in \mathbb{Z})$ принадлежит l_1 .

Если же число C не удовлетворяет условию (7.1), то оператор L подобен блочно-диагональному оператору $L_0 - \tilde{V}$, где $\tilde{V} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $\tilde{V} = J_k X_*$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}_+$ и оператор $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного уравнения (2.6) с операторами $J_k, \Gamma_k \in \text{End}(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}))$. Имеют место оценки

$$\tilde{\lambda}_n = i2\pi n - \frac{C}{4\pi^2 n^2} + \beta_n, \quad |n| > k,$$

и последовательность $(\beta_n, |n| > k)$ принадлежит l_1 .

Отметим также, что в работах [11–13, 24, 25, 27], использующих последовательность α_n из раздела 5, обычно не приводится конкретный вид этой последовательности. Ниже мы выпишем для рассматриваемого примера последовательность $\alpha_n(B)$, $n \in \mathbb{Z}$. Сначала необходимо вычислить нормы операторов $\|BP_n\|_2$ и $\|P_n B\|_2$, $n \in \mathbb{Z}$. Отметим, что в силу одномерности образов проекторов P_n , $n \in \mathbb{Z}$, имеем $\|BP_n\|_2 = \|Be_n\|$ и $\|P_n B\|_2 = \|B^*e_n\|$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} (Be_n)(t) &= \frac{t}{i2\pi n}, & (Be_0)(t) &= \frac{1}{2}(2t^2 + t), \\ (B^*e_n)(t) &= \frac{t+1}{i2\pi n} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}, & (B^*e_0)(t) &= \frac{t}{2} + \frac{1}{3}, \\ \|Be_n\|^2 &= \frac{1}{12\pi^2 n^2}, & \|B^*e_n\| &= \frac{1}{4\pi^4 n^4} + \frac{7}{12\pi^2 n^2}, \\ \|Be_0\|^2 &= \frac{8}{15}, & \|B^*e_0\| &= \frac{13}{36}, \\ \sum_{|j|>n} \|BP_j\|^2 &= \sum_{|j|>n} \frac{1}{12\pi^2 j^2} \leq \frac{1}{36\pi^2(n-1)}, \quad n > 1, \\ \sum_{|j|>n} \|P_j B\|^2 &= \sum_{|j|>n} \left(\frac{1}{4\pi^4 j^4} + \frac{7}{12\pi^2 j^2} \right) \leq \frac{1}{20\pi^4(n-1)^5} + \frac{7}{36\pi^2(n-1)^3}. \end{aligned}$$

Тогда $\alpha_n(B)$ при $|n| > 1$ допускает оценку

$$\alpha_n(B) \leq \left(\frac{180}{101} \left(\frac{1}{20\pi^4(n-1)^5} + \frac{7}{36\pi^2(n-1)^3} \right) \right)^{1/4}.$$

Последовательность $\alpha_n(B)$ характеризует скорость убывания матричных элементов возмущения B . Так как решение нелинейного операторного уравнения (2.6) также принадлежит $\mathcal{M}_B$, то неизвестный оператор X_* наследует эту скорость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков А. Г. Замена Крылова—Боголюбова в теории возмущений линейных операторов/ Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. — М., 1980.
2. Баскаков А. Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов// Сиб. мат. ж. — 1983. — 24, № 1. — С. 21–39.
3. Баскаков А. Г. Замена Крылова—Боголюбова в теории возмущений линейных операторов// Укр. мат. ж. — 1984. — 36. — С. 601–611.
4. Баскаков А. Г. Метод усреднения в теории возмущений линейных дифференциальных операторов// Диффер. уравн. — 1985. — 21, № 4. — С. 555–562.
5. Баскаков А. Г. Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1986. — 50, № 3. — С. 435–457.
6. Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. — Воронеж: ВГУ, 1987.
7. Баскаков А. Г. Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов// Изв. РАН. Сер. мат. — 1994. — 58, № 4. — С. 3–32.
8. Баскаков А. Г. Об абстрактном аналоге преобразования Крылова—Боголюбова в теории возмущений линейных операторов// Функц. анализ. прилож. — 1999. — 32, № 2. — С. 76–80.
9. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Дирака с негладким потенциалом// Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — 75, № 3. — С. 3–28.

10. Баскаков А. Г., Поляков Д. М. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом// Мат. сб. — 2017. — 208, № 1. — С. 3–47.
11. Баскаков А. Г., Ускова Н. Б. Метод Фурье для дифференциальных уравнений первого порядка и группы операторов// Уфим. мат. ж. — 2018. — 10, № 3. — С. 11–34.
12. Баскаков А. Г., Ускова Н. Б. Обобщенный метод Фурье для системы дифференциальных уравнений первого порядка и группы операторов// Диффер. уравн. — 2018. — 54, № 2. — С. 276–280.
13. Баскаков А. Г., Ускова Н. Б. Спектральный анализ дифференциальных операторов с инволюцией и группы операторов// Диффер. уравн. — 2018. — 54, № 9. — С. 1287–1291.
14. Бурлуцкая М. Ш. О смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией и с периодическими краевыми условиями// Ж. выч. мат. мат. физ. — 2014. — 54, № 1. — С. 3–12.
15. Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Луконина А. С., Хромов А. П. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией// Докл. РАН. — 2007. — 414, № 3. — С. 443–446.
16. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией// Докл. РАН. — 2010. — 435, № 2. — С. 151–154.
17. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией// Ж. выч. мат. мат. физ. — 2011. — 51, № 12. — С. 2233–2245.
18. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Смешанные задачи для гиперболических уравнений первого порядка// Докл. РАН. — 2011. — 441, № 2. — С. 156–159.
19. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Теорема Штейнгауза о равносходимости для функционально-дифференциальных операторов// Мат. заметки. — 2011. — 90, № 1. — С. 22–33.
20. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Функционально-дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями// Докл. РАН. — 2014. — 454, № 1. — С. 15–17.
21. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
22. Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
23. Ускова Н. Б. К одному результату Р. Тернера// Мат. заметки. — 2004. — 76, № 6. — С. 905–917.
24. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Romanova E. Yu. Spectral analysis of a differential operator with an involution// J. Evolut. Eqs. — 2017. — 17. — P. 669–684.
25. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. Linear differential operator with an involution as a generator of an operator group// J. Oper. Matr. — 2018. — 12, № 3. — P. 723–756.
26. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. General Dirac operators as generators of operator groups/ arXiv: 1806.10831 [math.SP].
27. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices/ arXiv: 1812.10331 [math.SP].
28. Friedrichs K. O. Lectures on Advanced Ordinary Differential Equations. — New York: Gordon and Breach, 1965.
29. Turner R. F. L. Perturbation of compact spectral operators// Commun. Pure. Appl. Math. — 1965. — 18. — P. 519–541.

Баскаков Анатолий Григорьевич

Воронежский государственный университет;

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Криштал Илья Аркадьевич

Университет Северного Иллинойса, Де-Калб, Иллинойс, США

E-mail: ikrishtal@niu.edu

Ускова Наталья Борисовна

Воронежский государственный технический университет

E-mail: nat-uskova@mail.ru