Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Булатова, Система уравнений симметричного пограничного слоя модифицированной жидкости О. А. Ладыженской, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 171, 19–37

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-171-19-37>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:36:44

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 171 (2019). С. 19–37
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-171-19-37

УДК 517.956.45

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ СИММЕТРИЧНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ О. А. ЛАДЫЖЕНСКОЙ

© 2019 г. Р. Р. БУЛАТОВА

Аннотация. В статье изложены результаты изучения системы уравнений пограничного слоя нелинейно вязкой электропроводящей жидкости с реологическим законом, предложенным О. А. Ладыженской для несжимаемых сред. Впервые уравнения пограничного слоя для модели Ладыженской были выведены на основании аксиом Прандтля; при помощи преобразования Мизеса система уравнений пограничного слоя может быть сведена к одному квазилинейному уравнению. Основой методов, применяемых в данной работе, является преобразование Крокко, которое переводит систему уравнений пограничного слоя в квазилинейное вырождающееся параболическое уравнение, но в отличие от переменных Мизеса замена переменных Крокко позволяет изучать как стационарные, так и нестационарные уравнения.

Ключевые слова: симметричный пограничный слой, уравнения О. А. Ладыженской, преобразование Крокко, электропроводящая жидкость.

O. A. LADYZHENSKAYA'S SYSTEM OF EQUATIONS OF SYMMETRIC BOUNDARY LAYER OF MODIFIED FLUID

© 2019 R. R. BULATOVA

ABSTRACT. In this paper, we study the system of equations of a boundary layer for a nonlinearly viscous, electrically conductive fluid described by a rheological law proposed by O. A. Ladyzhenskaya for incompressible media. The boundary-layer equations for the Ladyzhenskaya model were first obtained from Prandtl's axioms. By the Mises transform, the system of boundary-layer equations can be reduced to a single quasilinear equation. The main method used in this paper is the Crocco transform, which turns the system of boundary-layer equations into a quasilinear degenerate parabolic equation. In contrast to the Mises variables, the Crocco substitution allows one to study both stationary and nonstationary equations.

Keywords and phrases: symmetric boundary layer, O. A. Ladyzhenskaya's equations, Crocco transform, electrically conductive liquid.

AMS Subject Classification: 35K55

1. Введение. В ряде областей гидродинамики, механики и физики по сей день возникает необходимость изучения движений электропроводящих жидкостей. К таким областям относятся авиационная и судостроительная техника, разработка магнитогидродинамических генераторов электрической энергии, электромагнитных насосов, используемых для перекачки жидких металлов или плазменных ускорителей. Магнитная гидродинамика интересна нам тем, что она дополнена силами электромагнитной природы, которые, в свою очередь, позволяют управлять потоком. Например, в авиационной и судостроительной технике особенно важными являются течения при больших числах Рейнольдса, когда влияние вязкости играет значительную роль в слое, плотно

примыкающем к поверхности обтекаемого тела. А под действием достаточно сильного магнитного поля можно предотвратить возникновение турбулентности в пограничном слое и избежать выхода его во внешний поток.

В настоящей работе рассматривается система уравнений, которая описывает динамику маловязкой электропроводящей среды в окрестности критической точки обтекаемого тела в случае двумерного симметричного потока и называется системой уравнений пограничного слоя. Критической точкой в этой теории называется точка, в которой скорость внешнего потока равна нулю. В данной статье применяется преобразование Крокко, которое приводит систему уравнений Прандтля к уравнению в конечной области с нелинейными граничными условиями. Решения этих нелинейных граничных задач построены методом прямых с дискретизацией переменной.

2. Преобразование Крокко. В случае двумерного стационарного течения модифицированная система уравнений электропроводящей жидкости имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \nu \left(1 + 3d \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + B^2(U - u) = -U \frac{dU}{dx}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь ν , d — постоянные, зависящие от свойств жидкости, плотность жидкости ρ и проводимость среды σ предполагаются равными единице, $U(x)$ и $B(x)$ — заданные функции. Функция скорости внешнего потока $U(x)$ связана с давлением $p(x)$ и компонентой электрического поля $B(x)$ соотношением

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{dp}{dx} - E \frac{B}{\sigma} - B^2 U$$

Система уравнений (2.1) рассматривается в области $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad u(x, y) \rightarrow U(x) \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

где $U(0) = 0$, $U(x) > 0$ при $x > 0$. Пусть функция $U_x(x)$ измерима и ограничена, $U_x(0) > 0$, функции $u_0(x)$, $v_0(x)$ предполагаются заданными. Условия $U(0) = 0$ и $u(0, y) = 0$ определяют точку $x = 0$ как точку, в которой происходит остановка внешнего потока жидкости и симметрический слой симметричен относительно этой точки. Далее будем предполагать, что $U(x) = xV(x)$, $V(x) > 0$, и функции V , V_x , v_0 ограничены при $0 \leq x \leq X$.

Определение 2.1. Классическим решением задачи (2.1), (2.2) называется пара функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, обладающих следующими свойствами: u непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, v непрерывна в D и по y в $\overline{D}$; u и v имеют в D непрерывные производные, входящие в уравнение (2.1); удовлетворяют поточечно уравнениям (2.1) и граничным условиям (2.2).

Задачу (2.1), (2.2) сведем к некоторой вспомогательной краевой задаче для одного квазилинейного уравнения.

Введем новые независимые переменные ξ , η и новую неизвестную функцию $w(\xi, \eta)$:

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{u(x, y)}{U(x)}, \quad w(\xi, \eta) = \frac{u_y(x, y)}{U(x)}. \quad (2.3)$$

Исключим v из системы уравнений (2.1), продифференцировав эти уравнения по y :

$$\nu(1 + 3d(u_y)^2)u_{yyy} + \nu u_{yy} 6du_{yy}u_y - u_y u_x - u u_{xy} - v_y u_y - v u_{yy} - B^2 u_y = 0.$$

Из системы уравнений (2.1) находим

$$v = \frac{1}{u_y} \left(-u u_x + \nu(1 + 3d(u_y)^2)u_{yy} + B^2(U - u) + U U_x \right), \quad v_y = -u_x.$$

Из этих трех равенств выводим

$$\begin{aligned} & \nu(1 + 3d(u_y)^2)u_{yyy} - \nu(1 + 3d(u_y)^2)\frac{u_{yy}^2}{u_y} + \nu u_{yy}^2 6du_y - \left(uu_{xy} - \frac{u_{yy}}{u_y} uu_x \right) - \\ & - \frac{u_{yy}}{u_y} UU_x - \frac{u_{yy}}{u_y} B^2(U - u) - B^2 u_y = \nu(1 + 3d(u_y)^2) \frac{u_{yyy}u_y - u_{yy}^2}{u_y} - u \frac{u_{xy}u_y - u_{yy}u_x}{u_y} + \\ & + 6\nu du_y u_{yy}^2 - \frac{u_{yy}}{u_y} UU_x - \frac{u_{yy}}{u_y} B^2 U + \frac{u_{yy}}{u_y} B^2 u - B^2 u_y = 0. \end{aligned}$$

Вернемся к соотношениям (2.3), из которых получим

$$\begin{aligned} u &= \eta U, \quad u_y = wU, \quad x = \xi, \quad u_{yy} = w_\eta \eta_y U = w_\eta u_y, \quad \frac{u_{yy}}{u_y} = w_\eta, \\ u_{yyy} &= w_{\eta\eta} \eta_y u_y + w_\eta u_{yy} = w_{\eta\eta} \frac{u_y^2}{U} + w_\eta u_{yy}; \\ u_{yx} &= wU_\xi + Uw_\xi + w_\eta u_\xi - w_\eta u \frac{U_\xi}{U}, \quad u_y u_{yy}^2 = w_\eta^2 w^3 U^3, \\ \frac{u_{xy}u_y - u_x u_{yy}}{u_y} &= w_\xi U + wU_\xi - w_\eta u_\xi + w_\eta u_\xi - w_\eta \eta U_\xi, \\ \frac{u_{yyy}u_y - u_{yy}^2}{u_y} &= w_{\eta\eta} \frac{u_y^2}{U} + w_\eta u_{yy} - \frac{u_{yy}}{u_y} u_{yy} = w_{\eta\eta} \frac{u_y^2}{U} + w_\eta u_{yy} - w_\eta u_{yy} = w_{\eta\eta} \frac{u_y^2}{U^2} U = w_{\eta\eta} w^2 U, \\ -\frac{u}{U} \left(\frac{u_{xy}u_y - u_x u_{yy}}{u_y} + \frac{u_{yy}}{u_y} UU_x \right) &= -\frac{u}{U} (w_\xi U + wU_\xi - w_\eta \eta U_\xi) - w_\eta U_\xi = \\ &= -\eta w_\xi U - \eta w U_\xi + \eta^2 w_\eta U_\xi - w_\eta U_\xi = (\eta^2 - 1)w_\eta U_\xi - \eta w_\xi U - \eta w U_\xi, \\ \frac{u_{yy}}{u_y} B^2 u - \frac{u_{yy}}{u_y} B^2 U &= w_\eta B^2 u - w_\eta B^2 U = w_\eta B^2 \eta - w_\eta B^2 = (\eta - 1)B^2 w_\eta, \\ B^2 u_y &= B^2 \frac{u_y}{U} U = B^2 wU. \end{aligned}$$

Преобразуем граничные условия. Имеем

$$\begin{aligned} v u_y &= -u u_x + \nu(1 + 3d(u_y)^2)u_{yy} + UU_x + B^2 U - B^2 u, \\ v \frac{u_y}{U} &= -u \frac{u_x}{U} + \nu(1 + 3d(u_y)^2) \frac{u_{yy}}{U} + U_x + B^2 - B^2 \frac{u}{U}, \\ v \frac{u_y}{U} &= -u \frac{u_x}{U} + \nu \left(\frac{u_y}{U} + 3d \frac{u_y^3}{U^3} U^2 \right) \frac{u_{yy}}{u_y} + U_x + B^2 - B^2 \frac{u}{U}, \\ v w &= -u \frac{u_\xi}{U} + \nu(w + 3dU^2 w^3)w_\eta + U_\xi + B^2 - B^2 \eta. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $u(x, 0) = 0$ и, следовательно, из $y = 0$ вытекает $\eta = 0$.

Таким образом, из того факта, что $y = 0$, следует

$$\nu(1 + 3dU^2 w^2)w w_\eta - v w + U_\xi + B^2 = 0.$$

В итоге, учитывая (2.2), выводим квазилинейное уравнение

$$\nu(1 + 3dU^2 w^2)w^2 w_{\eta\eta} - \eta U w_\xi + (\eta^2 - 1)U_\xi w_\eta - \eta U_\xi w + 6\nu dU^2 w_\eta^2 w^3 + (\eta - 1)B^2 w_\eta - B^2 U w = 0 \quad (2.4)$$

в области $\Omega = \{0 < \xi < X, 0 < \eta < 1\}$ с граничными условиями

$$w(\xi, 1) = 0, \quad \left(\nu w w_\eta (1 + 3dU^2 w^2) - v_0(\xi)w + U_\xi + B^2 \right) \Big|_{\eta=0} = 0. \quad (2.5)$$

Определение 2.2. Функция $w(\xi, \eta)$ называется *решением* задачи (2.4), (2.5), если она непрерывна в $\overline{\Omega}$ и имеет непрерывные производные $w_\xi, w_\eta, w_{\eta\eta}$ в Ω ; w_η непрерывна по η при $\eta = 0$; w удовлетворяет уравнению (2.4) в Ω и граничным условиям (2.5).

3. Теорема о существовании решения задачи.

Теорема 3.1. Пусть U и v_0 удовлетворяют условиям, приведенным выше. Тогда задача (2.4), (2.5) в области Ω , где X зависит от U , v_0 , ν , имеет решение положительное при $\eta < 1$ обладающее следующими свойствами: $w(\xi, \eta)$ непрерывна $\overline{\Omega}$; ее обобщенные производные w_ξ , w_η , $w_{\eta\eta}$ существуют и удовлетворяют неравенствам

$$Ye^{-C_1\xi} \leq w \leq Ye^{C_2\xi}, \quad Y_\eta e^{C_4\xi} \leq w_\eta \leq Y_\eta e^{-C_5\xi}, \quad (3.1)$$

$$|w_\xi(\xi, \eta)| \leq C_3Y, \quad -C_6 \leq w^2 w_{\eta\eta} \leq -C_7. \quad (3.2)$$

В любой замкнутой области, лежащей внутри Ω , функция w и ее производные, входящие в уравнение (2.4), удовлетворяют условию Гельдера.

Доказательство существования решения задачи (2.4), (2.5) проведем на основе метода прямых, т.е. дискретизацией по ξ и заменой уравнения (2.4) системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для любой функции $f(\xi, \eta)$ введем обозначение

$$f^k = f^k(\eta) \equiv f(kh, \eta), \quad h = \text{const} > 0, \quad k = 0, 1, \dots, [X/h].$$

Уравнения (2.4) с условиями (2.5) заменим системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L_k(w) := & \nu \left(1 + 3d(kh)^2 (V^k)^2 (w^k)^2 \right) (w^k)^2 w_{\eta\eta}^k - \eta kh V^k \frac{w^k - w^{k-1}}{h} + \\ & + (\eta^2 - 1) (V^k + kh V_\xi^k) w_\eta^k - \eta (V^k + kh V_\xi^k) w^k + 6\nu d(kh)^2 (V^k)^2 (w_\eta^k)^2 (w^k)^3 + \\ & + (\eta - 1) B^2 w_\eta^k - B^2 kh V^k w^k = 0, \quad 0 < \eta < 1, \quad k = 0, 1, \dots, [X/h]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

с граничными условиями

$$w^k(1) = 0, \quad l_k(w) = \left(\nu w^k w_\eta^k (1 + 3d(kh)^2 (V^k)^2 (w^k)^2) - v_0^k w^k + (V^k + kh V_\xi^k) + B^2 \right) \Big|_{\eta=0} = 0. \quad (3.4)$$

Докажем существование решения задачи (3.3), (3.4). В дальнейшем через M_i и K_i будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от h .

Лемма 3.1. Задача (3.3), (3.4) имеет решение $w^k(\eta)$, $k = 0, 1, \dots, [X/h]$, которое непрерывно при $0 \leq \eta \leq 1$ и бесконечно дифференцируемо при $0 \leq \eta < 1$, если $V_x > 0$ при $0 \leq x \leq X$ и V , V_x , v_0 ограничены при $0 \leq x \leq X$. Для этого решения справедлива оценка

$$K_1(1 - \eta) \leq w^k(\eta) \leq K_2(1 - \eta) \sqrt{-\ln \mu(1 - \eta)} \quad (3.5)$$

при $kh \leq X$, где $h \leq h_0$, $h_0 = \text{const} > 0$, $\mu = \text{const}$, $0 < \mu < 1$.

Доказательство. Решение системы (3.3) с условиями (3.4) получим как предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений системы

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon,k}(w) := & \nu \left((1 + 3d(kh)^2 (V^k)^2 (w^k)^2) (w^k)^2 + \varepsilon \right) w_{\eta\eta}^k - \\ & - \eta kh V^k \frac{w^k - w^{k-1}}{h} + (\eta^2 - 1) (V^k + kh V_\xi^k) w_\eta^k - \eta (V^k + kh V_\xi^k) w^k + \\ & + 6\nu d(kh)^2 (V^k)^2 (w_\eta^k)^2 (w^k)^3 + (\eta - 1) B^2 w_\eta^k - B^2 kh V^k w^k = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

при $0 < \eta < 1$, $\varepsilon > 0$ с условиями (3.4). Предположив, что задача (3.6), (3.4) имеет решение w^k , положительное при $\eta = 0$, получим для этого решения априорную оценку снизу. Пусть $V_1^k = K_1(1 - \eta)$. Тогда

$$L_{\varepsilon,k}(V_1) = K_1(1 - \eta) \left((V^k + kh V_\xi^k) + B^2 - B^2 kh V^k + 6\nu d(kh)^2 (V^k)^2 K_1^2 K_1^2 (1 - \eta)^2 \right) > 0$$

при $0 \leq \eta < 1$.

Положим

$$\lambda_{\varepsilon,k}(w) \equiv \left(\nu(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2)w_\eta^k - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{w^k} + \frac{B^2}{w^k} \right) \Big|_{\eta=0}.$$

Тогда

$$\lambda_{\varepsilon,k}(V_1) = \left(\nu(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(K_1)^2)(-K_1) - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{K_1} + \frac{B^2}{K_1} \right) \Big|_{\eta=0} > 0,$$

если K_1 достаточно мало.

Положим $y^k = V_1^k - w^k$ и покажем, что $y^k \leq 0$. Получим

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon,k}(V_1) - L_{\varepsilon,k}(w) &= \left(\nu(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2)(w^k)^2 + \varepsilon \right) y_{\eta\eta}^k - \eta(kh)V^k \frac{y^k - y^{k-1}}{h} + \\ &+ (\eta^2 - 1)(V^k + khV_\xi^k)y_\eta^k - \eta(V^k + khV_\xi^k)y^k - B^2khV^ky^k + (\eta - 1)B^2y_\eta^k + \\ &+ 6\nu d(kh)^2(V^k)^2 \left((V_{1\eta}^k)^2((V_1^k)^2 + V_1^kw^k + (w^k)^2)y^k + (w^k)^3(V_{1\eta}^k + w_\eta^k)y_\eta^k \right) > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon,k}(V_1) - \lambda_{\varepsilon,k}(w) &= \nu \left(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k(0))^2 \right) y_\eta^k(0) - \frac{B^2}{V_1^k(0)w^k(0)} y^k(0) + \\ &+ 3\nu d(kh)^2(V^k)^2 \left((V_1^k(0))^2 + (w^k(0))^2 \right) V_{1\eta}^k(0)y^k(0) - \frac{V^k + khV_\xi^k}{V_1^k(0)w^k(0)} y^k(0) > 0. \end{aligned}$$

Из этих неравенств и условия $y^k(1) = 0$ следует, что $y^k \leq 0$. Действительно, рассмотрим $S^k = y^k e^{-\alpha kh}$. Получим

$$\begin{aligned} &\left(\nu(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2)(w^k)^2 + \varepsilon \right) S_{\eta\eta}^k e^{\alpha kh} - \eta kh V^k e^{\alpha kh} \left(\frac{S^k - S^{k-1}}{h} e^{-\alpha h} - S^k \alpha e^{\alpha h'} \right) + \\ &+ (\eta^2 - 1)(V^k + khV_\xi^k) e^{\alpha kh} S_\eta^k - \eta(V^k + khV_\xi^k) S^k e^{\alpha kh} + 6\nu d(kh)^2(V^k)^2(V_{1\eta}^k + w_\eta^k)(w^k)^3 S_\eta^k e^{\alpha kh} + \\ &+ (\eta - 1)B^2 S_\eta^k e^{\alpha kh} - B^2 kh V^k S^k e^{\alpha kh} > 0 \quad (3.7) \end{aligned}$$

при $\eta < 1$, $0 < h' < h$, и

$$\begin{aligned} &\left(\nu(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2) S_\eta^k e^{\alpha kh} - \frac{V^k + khV_\xi^k}{w^k V_1^k} S^k e^{\alpha kh} - \frac{B^2}{w^k V_1^k} S^k e^{\alpha kh} + \right. \\ &\left. + \nu V_{1\eta}^k 3d(kh)^2(V^k)^2(V_1^k + w^k) S^k e^{\alpha kh} \right) \Big|_{\eta=0} > 0. \quad (3.8) \end{aligned}$$

Если $\alpha > 0$ достаточно велико и h достаточно мало, то коэффициент

$$-B^2 kh V^k - \eta(V^k + khV_\xi^k) - \alpha e^{\alpha h'} \eta kh V^k < 0$$

при S^k в (3.7) неположителен.

Так как $U_\xi^k = (V^k + khV_\xi^k) > 0$ и w^k, V_1^k положительны при $\eta = 0$, то из (3.7), (3.8) в силу принципа максимума следует, что $S^k \leq 0$. Действительно, в противном случае функция $S^k(\eta)$ при некотором k имела бы положительный максимум при $0 \leq \eta < 1$. При $0 < \eta < 1$ функция $S^k(\eta)$ не может принимать положительный максимум, так как в точке максимума мы имели бы

$$S^k > 0, \quad S_\eta^k = 0, \quad S_{\eta\eta}^k \leq 0, \quad \frac{S^k - S^{k-1}}{h} \geq 0,$$

что противоречит (3.7). При $\eta = 0$ положительный максимум S^k также не может достигаться, так как в противном случае приходим к противоречию между неравенствами $S_\eta^k(0) \leq 0$ и (3.8). Значит, $S^k \leq 0$ и $y^k = V_1^k - w^k \leq 0$. Следовательно, $w^k(\eta) \geq K_1(1 - \eta)$ при $kh \leq X$.

Для доказательства существования решения задачи (3.6), (3.4) рассмотрим вместо условий (3.4) граничные условия вида

$$w^k(1) = 0, \quad \left(\nu \left(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2 \right) w_\eta^k - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{\psi(w^k)} + \frac{B^2}{\psi(w^k)} \right) \Big|_{\eta=0} = 0, \quad (3.9)$$

где $\psi(w)$ — такая бесконечно дифференцируемая функция при $w \in (-\infty; +\infty)$, что $\psi(w) = w$ при $w \geq K_3$, $\psi(w) = K_3/2$ при $w \leq K_3/4$ и $0 \leq \psi'(w) \leq 1$ при $K_3/4 \leq w \leq K_3$. Постоянная K_3 выбрана так, что

$$w^k(0) \geq K_3, \quad \max \frac{|v_0|}{U_\xi} < \frac{2}{K_3}, \quad K_3 \leq K_1.$$

Пусть $\tilde{w}^k$ — любое решение задачи (3.6), (3.9) при $0 < \varepsilon \leq 1$. Покажем, что справедливо неравенство $\tilde{w}^k \geq V_1^k$. Положим $\tilde{y}^k = V_1^k - \tilde{w}^k$. Имеем

$$\begin{aligned} & \left(\nu \left(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(V_1^k)^2 \right) V_{1\eta}^k - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{\psi(V_1^k)} + \frac{B^2}{\psi(V_1^k)} \right) \Big|_{\eta=0} = \\ & = -\nu \left(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2 K_1^2 \right) K_1 - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{K_1} + \frac{B^2}{K_1} > 0 \end{aligned}$$

в силу выбора K_3 и

$$\begin{aligned} & \left(\nu \left(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2 \right) \tilde{y}_\eta^k + \nu V_{1\eta}^k 3d(kh)^2(V^k)^2(V_1^k + w^k) \tilde{y}^k - \right. \\ & \quad \left. - \frac{V^k + khV_\xi^k}{\psi(V^k)\psi(w^k)} \tilde{y}^k - \frac{B^2 \tilde{y}^k}{\psi(V^k)\psi(w^k)} \right) \Big|_{\eta=0} > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\nu \left(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2 \right) + \varepsilon \right) (w^k)^2 \tilde{y}_{\eta\eta}^k - \eta kh V^k \frac{\tilde{y}^k - \tilde{y}^{k-1}}{h} + (\eta^2 - 1)(V^k + khV_\xi^k) \tilde{y}_\eta^k - \\ & - \eta(V^k + khV_\xi^k) \tilde{y}^{kk} + 6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^3(\tilde{y}_\eta^k)^2 + (\eta - 1)B^2 \tilde{y}_\eta^k - B^2 kh V^k \tilde{y}^k > 0 \end{aligned}$$

при $\eta < 1$.

Далее, для $\tilde{S}^k = \tilde{y}^k e^{-\alpha kh}$, как и для S^k , получим, что $\tilde{S}^k \leq 0$ и $V_1^k \leq \tilde{w}^k$ при $0 \leq \eta \leq 1$, $kh \leq X$. Следовательно, $w^k(0) \geq V_1^k(0) \geq K_4$, и поэтому $\psi(\tilde{w}^k) = \tilde{w}^k$. Таким образом, решение $\tilde{w}^k(\eta)$ задачи (3.6), (3.9) является также решением задачи (3.6), (3.4), положительным при $\eta = 0$. Если $\alpha > 0$ достаточно велико и h достаточно мало, то коэффициент

$$D^k - \eta(V^k + khV_\xi^k) - \alpha e^{\alpha h'} \eta kh V^k < 0$$

при S^k в (3.7) неположителен.

Так как $U_\xi = (V^k + khV_\xi^k) > 0$ и w^k, V_1^k положительны при $\eta = 0$, то из (3.7), (3.8) в силу принципа максимума следует, что $S^k \leq 0$. Действительно, в противном случае функция $S^k(\eta)$ при некотором k имела бы положительный максимум при $0 \leq \eta < 1$. При $0 < \eta < 1$ функция $S^k(\eta)$ не может принимать положительный максимум, так как в точке максимума имели бы

$$S^k > 0, \quad S_\eta^k = 0, \quad S_{\eta\eta}^k \leq 0, \quad \frac{S^k - S^{k-1}}{h} \geq 0,$$

что противоречит (3.7). При $\eta = 0$ положительный максимум S^k также не может достигаться, так как в противном случае приходим к противоречию между неравенствами $S_\eta^k(0) \leq 0$ и (3.8). Значит, $S^k \leq 0$ и $y^k = V_1^k - w^k \leq 0$. Следовательно, $w^k(\eta) \geq K_1(1 - \eta)$ при $kh \leq X$.

Для доказательства существования решения задачи (3.6), (3.4) рассмотрим вместо условий (3.4) граничные условия вида

$$w^k(1) = 0, \quad \left(\nu(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2)w_\eta^k - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{\psi(w^k)} + \frac{B^2}{\psi(w^k)} \right) \Big|_{\eta=0} = 0, \quad (3.10)$$

где $\psi(w)$ — такая бесконечно дифференцируемая функция при $w \in (-\infty; +\infty)$, что $\psi(w) = w$ при $w \geq K_3$, $\psi(w) = K_3/2$ при $w \leq K_3/4$ и $0 \leq \psi'(w) \leq 1$ при $K_3/4 \leq w \leq K_3$. Постоянная K_3 выбрана так, что

$$w^k(0) \geq K_3, \quad \max \frac{|v_0|}{U_\xi} < \frac{2}{K_3}, \quad K_3 \leq K_1.$$

Пусть $\tilde{w}^k$ — любое решение задачи (3.6), (3.9) при $0 < \varepsilon \leq 1$. Покажем, что справедливо неравенство $\tilde{w}^k \geq V_1^k$. Положим $\tilde{y}^k = V_1^k - \tilde{w}^k$. Имеем

$$\begin{aligned} & \left(\nu(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(V_1^k)^2)V_{1\eta}^k - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{\psi(V_1^k)} + \frac{B^2}{\psi(V_1^k)} \right) \Big|_{\eta=0} = \\ & = -\nu(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2K_1^2)K_1 - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{K_1} + \frac{B^2}{K_1} > 0 \end{aligned}$$

в силу выбора K_3 и

$$\begin{aligned} & \left(\nu(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2)\tilde{y}_\eta^k + \nu V_{1\eta}^k 3d(kh)^2(V^k)^2(V_1^k + w^k)\tilde{y}^k - \right. \\ & \quad \left. - \frac{V^k + khV_\xi^k}{\psi(V^k)\psi(w^k)}\tilde{y}^k - \frac{B^2\tilde{y}^k}{\psi(V^k)\psi(w^k)} \right) \Big|_{\eta=0} > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\nu(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2) + \varepsilon)(w^k)^2\tilde{y}_{\eta\eta}^k - \eta khV^k \frac{\tilde{y}^k - \tilde{y}^{k-1}}{h} + (\eta^2 - 1)(V^k + khV_\xi^k)\tilde{y}_\eta^k - \\ & - \eta(V^k + khV_\xi^k)\tilde{y}^{kk} + 6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^3(\tilde{y}_\eta^k)^2 + (\eta - 1)B^2\tilde{y}_\eta^k - B^2khV^k\tilde{y}^k > 0 \end{aligned}$$

при $\eta < 1$.

Далее, для $\tilde{S}^k = \tilde{y}^k e^{-\alpha kh}$, как и для S^k , получим, что $\tilde{S}^k \leq 0$ и $V_1^k \leq \tilde{w}^k$ при $0 \leq \eta \leq 1$, $kh \leq X$. Следовательно, $w^k(0) \geq V_1^k(0) \geq K_4$, и поэтому $\psi(\tilde{w}^k) = \tilde{w}^k$. Таким образом, решение $\tilde{w}^k(\eta)$ задачи (3.6), (3.9) является также решением задачи (3.6), (3.4), положительным при $\eta = 0$.

Доказательство существования решения задачи (3.6), (3.9) при $\varepsilon > 0$ проводится на основе теоремы Лере—Шаудера.

Оценим теперь решение задачи (3.6), (3.4) сверху равномерно относительно ε и h . Пусть

$$V_2^k = K_2(1 - \eta)\sigma, \quad \sigma = \sqrt{-\ln \mu(1 - \eta)}, \quad 0 < \mu < 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon,k}(V_2) &= -\varepsilon K_2 \left(-\frac{1}{2\sigma(1 - \eta)} - \frac{1}{4\sigma^3(1 - \eta)} \right) - (1 - \eta)(1 + \eta)K_2(V^k + khV_\xi^k) \left(\frac{1}{2\sigma} - \sigma \right) + \\ &+ \left(\nu(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2K_2^2(1 - \eta)^2\sigma^2)K_2^2(1 - \eta)^2\sigma^2 \right) \left(-\frac{K_2}{2\sigma(1 - \eta)} - \frac{K_2}{4\sigma^3(1 - \eta)} \right) - \\ &- \eta K_2(1 - \eta)\sigma(V^k + khV_\xi^k) + 6\nu d(kh)^2(V^k)^2K_2^3(1 - \eta)^3\sigma^3K_2^2 \left(\frac{1}{2\sigma} - \sigma \right)^2 - \\ &- (1 - \eta)B^2K_2 \left(\frac{1}{2\sigma} - \sigma \right) - (1 - \eta)B^2K_2\sigma < 0 \quad (3.11) \end{aligned}$$

при $0 \leq \eta < 1$, если $K_2 > 0$ достаточно велико; K_2 не зависит от ε и h . Далее,

$$\lambda_k(V_2^k) = \left(\nu(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2 K_2^2(1 - \eta)^2 \sigma^2) K_2 \left(\frac{1}{2\sigma} - \sigma \right) - \right. \\ \left. - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{K_2(1 - \eta)\sigma} + \frac{B^2}{K_2(1 - \eta)\sigma} \right) \Big|_{\eta=0} < 0, \quad (3.12)$$

если K_2 достаточно велико и $\sigma^2 > 1/2$ при $\eta = 0$, т.е. $\mu < e^{-1/2}$. Из неравенств (3.11), (3.12) и условия $(w^k - V_2^k)|_{\eta=1} = 0$ согласно принципу максимума получаем, что

$$w^k - V_2^k \leq 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq x \leq X.$$

Из уравнений (3.6), граничного условия (3.4) при $\eta = 0$ и оценок снизу и сверху для w^k следуют равномерные по ε оценки $w_\eta^k, w_{\eta\eta}^k$ на любом отрезке $0 \leq \eta \leq 1 - \delta$, $\delta = \text{const} > 0$. Дифференцируя уравнение (3.6) по η , устанавливаем, что производные любого порядка от функций w^k ограничены на отрезке $0 \leq \eta \leq 1 - \delta$ равномерно по ε .

Следовательно, из совокупности решений w^k задачи (3.6), (3.4) при $0 < \varepsilon \leq 1$ можно выделить такую последовательность w^k , что функции w^k вместе с их производными любого порядка при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно сходятся на отрезке $0 \leq \eta \leq 1 - \delta$, причем предельная функция (в силу оценок $V \leq w^k \leq V_1$) непрерывна при $0 \leq \eta \leq 1$, обращается в нуль при $\eta = 1$ и удовлетворяет (3.3), (3.4) при $\eta < 1$. Очевидно, что оценки (3.5) верны для предельных функций w^k . $\square$

Рассмотрим вспомогательную граничную задачу при $k = 0$ для обыкновенного дифференциального уравнения, решение которой будем использовать для последующих оценок решений задачи (3.3), (3.4). Пусть $V(0) = a$, $v_0(0) = b$. Согласно сделанным ранее предположениям, $a > 0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L(Y) \equiv \nu Y^2 Y_{\eta\eta} + (\eta^2 - 1)aY_\eta - \eta aY + (\eta - 1)B^2 Y_\eta = 0, \quad 0 < \eta < 1, \quad (3.13)$$

с граничными условиями

$$l(Y) \equiv \left(\nu Y Y_\eta - bY + B^2 + a \right) \Big|_{\eta=0} = 0, \quad Y(1) = 0 \quad (3.14)$$

Лемма 3.2. *Задача (3.13), (3.14) имеет решение, обладающее следующими свойствами:*

$$M_2(1 - \eta)\sigma \leq Y(\eta) \leq M_1(1 - \eta)\sigma \quad \text{при} \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (3.15)$$

$$M_1(1 - \eta)(\sigma - K_4) \leq Y(\eta) \quad \text{при} \quad 0 < \eta_0 \leq \eta < 1, \quad (3.16)$$

$$-M_4\sigma \leq Y_\eta(\eta) \leq -M_3\sigma, \quad (3.17)$$

$$|Y Y_{\eta\eta}| \leq M_5, \quad Y Y_{\eta\eta} \leq -M_6, \quad (3.18)$$

$$\sigma = \sqrt{-\ln \mu(1 - \eta)}, \quad \mu = \text{const}, \quad 0 < \mu < 1,$$

$$\nu M_1^2 = 2a, \quad \sigma(0) \geq \frac{|b|}{a} + 2, \quad \frac{K_4}{\sigma} < 1 \quad \text{при} \quad \eta > \eta_0 = \text{const} \geq 0.$$

Лемма 3.2 доказывается аналогично тому, как доказана лемма [5, § 3.2.2], лишь с некоторыми техническими осложнениями. Мы опускаем доказательство этой леммы.

Лемма 3.3. *Предположим, что $V(x) = a + xa_1(x)$, $v_0(x) = b + xb_1(x)$ и функции $a_1(x)$, $a_{1x}(x)$, $b_1(x)$ ограничены при $0 \leq x \leq X$. Тогда при $0 \leq kh \leq X$, где X зависит от $V(x)$, $v_0(x)$, для решения $w^k(\eta)$ задачи (3.3), (3.4) имеют место неравенства*

$$Y e^{-C_1 kh} \leq w^k(\eta) \leq Y e^{C_2 kh}, \quad (3.19)$$

где $Y(\eta)$ — решение задачи (3.13), (3.14).

Доказательство. Для функций $W^k = Ye^{-C_1kh}$ имеем

$$\begin{aligned} L_k(W) = e^{-C_1kh} & \left[\nu Y^2 Y_{\eta\eta} (e^{-2C_1kh} - 1) + \nu Y^2 Y_{\eta\eta} + 3\nu d(kh)^2 (V^k)^2 Y^4 Y_{\eta\eta} (e^{-4C_1kh} - 1) + \right. \\ & + 3\nu d(kh)^2 ((V^k)^2 - a^2) Y^4 Y_{\eta\eta} + 6\nu d(kh)^2 (V^k)^2 Y^3 Y_{\eta}^2 (e^{-3C_1kh} - 1) + \\ & + 6\nu d(kh)^2 ((V^k)^2 - a^2) Y^3 Y_{\eta}^2 + \eta kh V^k Y C_1 e^{C_1h'} + (\eta^2 - 1) kh (a_1^k + V_x^k) Y_{\eta} - \\ & \left. - \eta kh (a_1^k + V^k) + (\eta - 1) B^2 Y_{\eta} - B^2 kh ((V^k)^2 - a^2) Y \right] = 0, \end{aligned}$$

где $0 < h' < h$. В силу предположений леммы имеем

$$\left| (V^k)^2 - a^2 \right| < M_8 \quad \text{при} \quad kh \leq X.$$

Кроме того, при $kh \leq X$ и достаточно малом X

$$e^{-2C_1kh} - 1 \leq -khC_1, \quad e^{-3C_1kh} - 1 \leq -\frac{3}{2}khC_1, \quad e^{-4C_1kh} - 1 \leq -2khC_1,$$

а в силу леммы 3.2

$$|(\eta^2 - 1)kh(a_1^k + V_{\xi}^k)Y_{\eta}| \leq M_9 khY.$$

Поэтому, если C_1 достаточно велико, то имеем неравенство $L_k(W) > 0$ при $0 \leq \eta < 1$ и $0 \leq kh \leq X$.

Учитывая (3.14), находим, что

$$\begin{aligned} l_k(W) = & \left[\nu(1 + 3d(kh)^2((V^k)^2 - (a_1^k)^2)Y^2)Y_{\eta}(e^{-3C_1kh} - 1) - \right. \\ & \left. - v_0^k Y(e^{-C_1kh} - 1) - (v_0^k - b)Y + (a_1^k - khV_{\xi}^k) + B^2 \right] \Big|_{\eta=0}. \end{aligned}$$

По условию леммы

$$|v_0^k - b| \leq M_{10}kh, \quad |a_1^k - khV_{\xi}^k| \leq M_{11}kh \quad \text{при} \quad kh \leq X.$$

Поэтому при достаточно большой постоянной C_1 и X_0 , зависящем от V , v_0 , имеем $l_k(W) > 0$ при $0 \leq kh \leq X_0$.

При $0 \leq \eta < 1$ и $kh \leq X$ получаем неравенства

$$L_k(W) - L_k(w) > 0, \quad l_k(W) - l_k(w) > 0,$$

откуда следует

$$w^k \leq W = Ye^{-C_1kh} \quad \text{при} \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq kh \leq X_0.$$

Аналогично получается оценка (3.19) сверху, так как если $W_* = Ye^{C_2kh}$ и C_2 достаточно велико, то $L_k(W_*) < 0$ и $l_k(W_*) < 0$ при $0 \leq \eta < 1$, $0 \leq kh \leq X$. $\square$

Для обоснования предельного перехода в задаче (3.3), (3.4) при $h \rightarrow 0$ оценим величины

$$r^k = \frac{w^k - w^{k-1}}{h}, \quad z^k = w_{\eta}^k, \quad (w^k)^2 w_{\eta\eta}^k$$

равномерно по h .

Лемма 3.4. Пусть выполнены предположения леммы 3.3; кроме того, $a_{1xx}(x)$ и $b_{1x}(x)$ ограничены. Тогда при достаточно малом X и $0 \leq kh \leq X$ решения $w^k(\eta)$ задачи (3.3), (3.4) удовлетворяют неравенствам

$$\left| \frac{w^k - w^{k-1}}{h} \right| \leq C_3 Y(\eta), \quad k = 1, 2, \dots, \frac{X}{h}, \quad (3.20)$$

$$Y_{\eta} e^{C_4 kh} \leq w_{\eta}^k \leq Y_{\eta} e^{-C_5 kh}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{X}{h}, \quad (3.21)$$

$$|(w^k)^2 w_{\eta\eta}^k| < C_6, \quad (w^k)^2 w_{\eta\eta}^k < -C_7, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{X}{h}, \quad (3.22)$$

где $Y(\eta)$ — решение задачи (3.13), (3.14).

Доказательство. Неравенства (3.20)–(3.22) докажем по индукции. В лемме 3.2 мы доказали неравенства (3.21), (3.22) при $k = 0$. Покажем, что постоянные C_j можно подобрать независимо от h так, что из выполнения неравенств (3.20)–(3.22) при некотором $k - 1$ следует их справедливость при k , если $0 \leq kh \leq X$, где X зависит от V, v_0, ν и не зависит от h .

Для удобства в уравнениях

$$L_k(w) \equiv \nu \left(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2 \right) (w^k)^2 w_{\eta\eta}^k - \eta kh V^k \frac{w^k - w^{k-1}}{h} + (\eta^2 - 1)(V^k + kh V_\xi^k) w_\eta^k - \\ - \eta(V^k + kh V_\xi^k) w^k + 6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w_\eta^k)^2(w^k)^3 + (\eta - 1)B^2 w_\eta^k - B^2 kh V^k w^k = 0$$

и

$$\lambda_k(w) = \left(\nu \left(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2 \right) w_\eta^k - v_0^k + \frac{V^k + kh V_\xi^k}{w^k} + \frac{B^2}{w^k} \right) \Big|_{\eta=0} = 0$$

введем обозначения:

$$E^k \equiv (\eta^2 - 1)(V^k + kh V_\xi^k), \quad F^k \equiv -\eta(V^k + kh V_\xi^k), \\ G^k \equiv 3\nu d(kh)^2(V^k)^2, \quad H^k \equiv 6\nu d(kh)^2(V^k)^2, \quad I^k \equiv V^k + kh V_\xi^k.$$

Составим уравнения, которым удовлетворяют r^k и z^k . Для начала возьмем

$$w_{\eta\eta}^k = \frac{\eta kh V^k r^k - E^k z^k - F^k w^k - H^k (z^k)^2 (w^k)^3 - (\eta - 1)B^2 z^k + B^2 kh V^k w^k}{(\nu + G^k (w^k)^2) (w^k)^2}.$$

Из уравнения (3.3) для w^k вычтем уравнение (3.3) для w^{k-1} и разделим полученное равенство на h . Имеем

$$R_k(r) \equiv \nu (w^k)^2 r_{\eta\eta}^k + G^k (w^k)^4 r_{\eta\eta}^k + E^k r_\eta^k + F^k r^k - \eta \frac{kh V^k - (k-1)h V^{k-1}}{h} r^k + \\ + \frac{(w^k + w^{k-1})((w^k)^2 + (w^{k-1})^2)}{(\nu + G^{k-1} (w^{k-1})^2) (w^{k-1})^2} (\nu + G^{k-1}) \times \\ \times \left[\eta(k-1)h V^{k-1} r^{k-1} - E^{k-1} z^{k-1} - F^{k-1} w^{k-1} - H^{k-1} (z^{k-1})^2 (w^{k-1})^3 \right] r^k - \\ - \eta(k-1)h V^{k-1} \frac{r^k - r^{k-1}}{h} + H^{k-1} (w^{k-1})^3 r^k (z^k + z^{k-1}) + \frac{H^k - H^{k-1}}{h} (z^k)^2 (w^k)^3 + \\ + H^{k-1} (z^k)^2 r^k ((w^k)^2 + w^k w^{k-1} + (w^{k-1})^2) + B^2 \frac{kh V^k - (k-1)h V^{k-1}}{h} w^k = \\ = - \frac{3\nu d((kh)^2(V^k)^2 - ((k-1)h)^2(V^{k-1})^2)(w^k)^4}{h(\nu + G^{k-1} (w^{k-1})^2) (w^{k-1})^2} \times \\ \times \left[\eta(k-1)h V^{k-1} r^{k-1} - E^{k-1} z^{k-1} - F^{k-1} w^{k-1} - H^{k-1} (z^{k-1})^2 (w^{k-1})^3 \right] - \\ - z^{k-1} \frac{E^k - E^{k-1}}{h} - w^{k-1} \frac{F^k - F^{k-1}}{h} - (\eta - 1)B^2 r_\eta^k + B^2 kh V^k r^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Аналогично из (3.4) получаем

$$\rho^k(r) \equiv \left(\nu r_\eta^k + G^{k-1} (w^{k-1})^2 r_\eta^k + G^{k-1} z^k r^k (w^k + w^{k-1}) + \frac{G^k - G^{k-1}}{h} (w^k)^2 z^k - \right. \\ \left. - \frac{(I^k + B^2) r^k}{w^k w^{k-1}} \right) \Big|_{\eta=0} = \frac{v_0^k - v_0^{k-1}}{h} - \frac{I^k - I^{k-1}}{h w^{k-1}(0)}, \quad r^k(1) = 0, \quad k \geq 1.$$

Дифференцируя уравнение (3.3) по η , для z^k получим уравнения

$$\begin{aligned} P_k(z) \equiv & \nu(w^k)^2 z_{\eta\eta}^k + 2\nu w^k z^k z_\eta^k + 4G^k(w^k)^3 z^k z_\eta^k + G^k(w^k)^4 z_{\eta\eta}^k - \\ & - \eta k h V^k \frac{z^k - z^{k-1}}{h} - k h V^k r^k + E^k z_\eta^k + E_\eta^k z^k + F^k z^k + F_\eta^k w^k + 3H^k(w^k)^2 (z^k)^3 + \\ & + 2H^k(w^k)^3 z^k z_\eta^k + (\eta - 1)B^2 z_\eta^k + B^2 z^k + B^2 k h V^k z^k = 0. \end{aligned}$$

Из граничного условия (3.4) при $\eta = 0$ следует условие

$$z^k(0) = \frac{v_0^k}{(\nu + G^k(w^k(0))^2)} - \frac{I^k}{(\nu + G^k(w^k(0))^2)w^k(0)}.$$

Рассмотрим функцию $\varphi^k = C_3 Y$ и оценим $R^k(\varphi)$ при условии, что неравенства (3.20), (3.21) выполнены при $k-1$. Сначала заметим, что в силу результатов, полученных в лемме 3.2, выполнено неравенство

$$\left| \nu C_3 Y^2 Y_{\eta\eta} + C_3 E^k Y_\eta + C_3 F^k Y \right| \leq C_3 M_{12} k h Y$$

при $0 \leq k h \leq X$. Так как $U_x > 0$ и $a_{1_{xx}}(0)$ ограничена по предположению леммы, то

$$\frac{k h V^k - (k-1) h V^{k-1}}{h} > 0$$

при $h \leq h_0$ и достаточно малом h_0 ; кроме того, отношения

$$\frac{(k h)^2 (V^k)^2 - ((k-1) h)^2 (V^{k-1})^2}{h}, \quad \frac{E^k - E^{k-1}}{h}, \quad \frac{F^k - F^{k-1}}{h}, \quad \frac{G^k - G^{k-1}}{h}, \quad \frac{H^k - H^{k-1}}{h}$$

ограничены.

Далее, учитывая предположения индукции, находим, что

$$\begin{aligned} & \eta(k-1) h V^{k-1} r^{k-1} - E^{k-1} z^{k-1} - F^{k-1} w^{k-1} - H^{k-1} (z^{k-1})^2 (w^{k-1})^3 - (\eta-1) B^2 z^{k-1} \leq \\ & \leq \eta(k-1) h V^{k-1} C_3 Y - (E^{k-1} - a(\eta^2 - 1)) z^{k-1} - (\eta^2 - 1) a Y_\eta e^{-C_3 k h} - (F^{k-1} + \eta a) w^{k-1} - \\ & - \eta a Y e^{C_2 k h} - (B^2 - a(\eta-1)) z^{k-1} - (H^{k-1} - 6\nu d a^2) (z^{k-1})^2 (w^{k-1})^3 - \\ & - 6\nu d a^2 Y^3 Y_\eta^2 e^{3C_2 k h} e^{-2C_5 k h} \leq \nu Y Y_{\eta\eta} + G^{k-1} Y^4 Y_{\eta\eta} + M_{13} k h Y \leq -M_{14} Y(\eta), \end{aligned}$$

если $k h \leq X$ и X достаточно мало и не зависит от h .

Учитывая эти замечания, получаем, что

$$\begin{aligned} R_k(\varphi) + & \left| - \frac{3\nu d((k h)^2 (V^k)^2 - ((k-1) h)^2 (V^{k-1})^2) (w^k)^4}{h(\nu + G^{k-1}(w^{k-1})^2) (w^{k-1})^2} \times \right. \\ & \times \left[\eta(k-1) h V^{k-1} r^{k-1} - E^{k-1} z^{k-1} - F^{k-1} w^{k-1} - H^{k-1} (z^{k-1})^2 (w^{k-1})^3 \right] - \\ & \left. - z^{k-1} \frac{E^k - E^{k-1}}{h} - w^{k-1} \frac{F^k - F^{k-1}}{h} - B^2 (\eta-1) r_\eta^k + B^2 k h V^k r^{k-1} \right| < 0 \quad (3.23) \end{aligned}$$

при $0 \leq \eta < 1$, $0 \leq k h \leq X(C_3, C_4, C_5)$, где C_3 достаточно велико и не зависит от h ; здесь мы использовали неравенства

$$\begin{aligned} & -\eta \frac{k h V^k - (k-1) h V^{k-1}}{h} C_3 Y + \left| w^{k-1} \frac{F^k - F^{k-1}}{h} \right| < 0, \\ & (w^k + w^{k-1}) ((w^k)^2 + (w^{k-1})^2) C_3 Y > \left| \frac{(k h)^2 (V^k)^2 - ((k-1) h)^2 (V^{k-1})^2}{h} \right|, \end{aligned}$$

$$M_{12}kh \leq \frac{1}{4} \left| \frac{(w^k + w^{k-1})((w^k)^2 + (w^{k-1})^2)}{(\nu + G^{k-1}(w^{k-1})^2)(w^{k-1})^2} (\nu + G^{k-1}) \times \right. \\ \left. \times \left[\eta(k-1)hV^{k-1}r^{k-1} - E^{k-1}z^{k-1} - F^{k-1}w^{k-1} - H^k k - 1(z^{k-1})^2(w^{k-1})^3 - (\eta-1)B^2 \right] \right|.$$

Постоянная C_3 не зависит от C_4 и C_5 , так как если

$$M_{14} \geq \frac{M_{14}}{2} + \frac{M_{15}E^{k-1}z^{k-1}}{Y},$$

то

$$-\frac{C_3 M_{15}(w^k + w^{k-1})((w^k)^2 + (w^{k-1})^2)(\nu + G^{k-1})E^{k-1}z^{k-1}}{(\nu + G^{k-1}(w^{k-1})^2)(w^{k-1})^2} + \left| z^{k-1} \frac{E^k - E^{k-1}}{h} \right| < 0$$

при подходящем выборе C_3 и достаточно малом X .

Вычислим $\rho_k(\varphi)$. Имеем:

$$\rho^k(\varphi) = C_3 \left(\nu Y_\eta + G^{k-1}(w^{k-1})^2 Y_\eta + G^{k-1} z^k Y (w^k + w^{k-1}) + \right. \\ \left. + \frac{G^k - G^{k-1}}{h} (w^k)^2 z^k - \frac{(I^k + B^2)Y}{w^k w^{k-1}} \right) \Big|_{\eta=0} \leq -C_3 M_{16}$$

при $M_{16} > 0$, $kh \geq 0$, $kh \leq X$ и достаточно малом X . Поэтому

$$\rho_k(\varphi) + \left| \frac{v_0^k - v_0^{k-1}}{h} - \frac{I^k - I^{k-1}}{h w^{k-1}(0)} \right| < 0, \quad (3.24)$$

если C_3 достаточно велико, $kh \leq X$ и $h \leq h_0$; здесь воспользовались тем, что по условия при малых h ограничены отношения

$$\frac{v_0^k - v_0^{k-1}}{h}, \quad \frac{I^k - I^{k-1}}{h}.$$

Рассмотрим функции $S_\pm^k = \varphi^k \pm r^k$ при $0 \leq kh \leq X$. Из оценок (3.23), (3.24) получаем неравенства

$$R_k(S_\pm^k) < 0, \quad \rho_k(S_\pm^k) < 0.$$

Так как $S_\pm^k(1) = 0$, то из этих неравенств на основании принципа максимума находим, что $S_\pm^k(\eta) \geq 0$ при $0 \leq \eta \leq 1$ и, следовательно, $|r^k| \leq C_3 Y$.

Для оценки $Z^k = w_\eta^k$ рассмотрим функцию $J_1 = Y_\eta e^{-C_5 kh}$. Имеем

$$P_k(J_1) = e^{-C_5 kh} \left\{ \left(\nu Y^2 Y_{\eta\eta} + 2\nu Y Y_\eta Y_{\eta\eta} + (\eta^2 - 1)a Y_\eta + \eta a Y_\eta - a Y \right) + B^2 Y_\eta + \right. \\ + (\eta - 1)B^2 Y_{\eta\eta} + \nu((w^k)^2 - Y^2) Y_{\eta\eta} + G^k((w^k)^4 - Y^4) Y_{\eta\eta} + (E^k - (\eta^2 - 1)a) Y_{\eta\eta} + \\ + (E_\eta^k - 2\eta a) Y_\eta + (F^k - \eta a) Y_\eta + (B^2 - (\eta - 1)a) Y_{\eta\eta} + 2H^k((w^k)^3 - Y^3) Y_\eta Y_{\eta\eta} \Big\} + \\ - kh V^k r^k + 2\nu Y_\eta Y_{\eta\eta} (w^k e^{-C_5 kh} - Y) e^{-C_5 kh} + 4G^k Y_\eta Y_{\eta\eta} ((w^k)^3 e^{-C_5 kh} - Y^3) e^{-C_5 kh} + \\ + 3H^k (Y_\eta)^3 ((w^k)^2 e^{-C_5 kh} - Y^2) e^{-C_5 kh} + (B^2 - 2\eta a) Y_\eta + (F_\eta^k w^k + a Y e^{-C_5 kh}) - \\ - B^2 kh V^k Y_\eta + \eta kh C_5 V^k e^{C_5 h'} e^{-C_5 kh} Y_\eta. \quad (3.25)$$

Дифференцируя уравнение (3.13) по η , получим

$$\nu Y^2 Y_{\eta\eta} + 2\nu Y Y_\eta Y_{\eta\eta} + (\eta^2 - 1)a Y_\eta + \eta a Y_\eta - a Y + B^2 Y_\eta + (\eta - 1)B^2 Y_{\eta\eta} = 0. \quad (3.26)$$

Из (3.26) следует, что $|Y^2 Y_{\eta\eta}| \leq M_{17} |Y_\eta|$ и что в (3.25) первое слагаемое правой части равно нулю. Слагаемые $kh V^k r^k$, $F_\eta^k w^k + a Y e^{-C_5 kh}$ имеют порядок $kh Y$ и $C_5 kh Y$ соответственно; остальные слагаемые в (3.25) имеют порядок $kh Y_\eta$. Если выбрать C_5 достаточно большим, то последние два члена в (3.25) превосходят по модулю остальные, если $kh \leq X$ и X достаточно мало. Поэтому $P_k(J_1) < 0$ при $0 \leq \eta \leq 1$ и $0 \leq kh \leq X$.

Из неравенств (3.19) следует, что существуют такие две последовательности $\eta_m \rightarrow 1$ и $\bar{\eta}_m \rightarrow 1$ при $m \rightarrow \infty$, что

$$z^k \Big|_{\eta=\eta_m} \leq Y_\eta(\eta_m)e^{-C_1 kh}, \quad z^k \Big|_{\eta=\bar{\eta}_m} \geq Y_\eta(\bar{\eta}_m)e^{C_2 kh}. \quad (3.27)$$

Пусть $C_5 > C_1$. Рассмотрим разность $S^k = J_1 - Z^k$. Из (3.27) следует, что $S^k(\eta_m) \geq 0$. При $k \geq 1$, $kh \leq X$, достаточно малом X и достаточно большом C_5 имеем

$$S^k(0) = -\frac{v_0^k - b}{(\nu + G^k(w^k(0))^2)} + \frac{(I^k + B^2)}{(\nu + G^k(w^k(0))^2)w^k(0)} - \frac{a}{(\nu + G^k(Y(0))^2)Y(0)} + Y_\eta(0)(e^{-C_5 kh} - 1) > 0. \quad (3.28)$$

Из уравнения (3.3) при $k = 1$ получаем для $z^1 = w_\eta^1$ уравнение

$$P_1^0(z_1) \equiv \nu(w^1)^2 z_\eta^1 + G^1(w^1)^4 z_\eta^1 + E^1 z^1 + H^1(w^1)^3 z^1 + (\eta - 1)B^2 z^1 = -J^1 w^1 + \eta V^1 w^1 + B^2 V^2 w^1.$$

Полагая $J_2 = Y_\eta e^{-C_8 h}$, находим

$$\begin{aligned} P_1^0(z^1 - J_2) &= e^{-C_8 h} \left\{ \nu(Y^2 - (w^1)^2)Y_\eta + G^k(Y^4 - (w^1)^4)Y_\eta + \right. \\ &\quad \left. + ((\eta^2 - 1)a - E^1)Y_\eta + ((\eta - 1)a - B^2)Y_\eta + H^k(Y^3 - (w^1)^3)Y_\eta \right\} - \\ &\quad - \left(F^1 w^1 + \eta a Y e^{-C_8 h} \right) + \eta V^1 (w^1 - Y) + B^2 V^1 (w^1 - Y) > 0, \quad \eta_0 \leq \eta < 1, \end{aligned}$$

при достаточно большом C_8 и достаточно малом h . Кроме того, если выберем $C_8 \geq C_1$, то из (3.27) получим неравенство

$$(z^1 - J_2) \Big|_{\eta=\eta_m^1} \leq 0.$$

Как и при доказательстве леммы 3.2, находим, что $z^1 \leq J_2$ при $\eta_0 \leq \eta < 1$. Возьмем $C_5 \geq C_8$. Тогда при $\eta_0 \leq \eta < 1$ получим неравенство

$$z^1 \leq J_1^1. \quad (3.29)$$

Для разности $z^k - J_1 = S^k$ имеем

$$\begin{aligned} P_k(J_1) - P_k(z) &= \nu(w^k)^2 S_{\eta\eta}^k + G^k(w^k)^4 S_{\eta\eta}^k - \eta \frac{khV^k}{h} S^k + E^k S_\eta^k + F^k S_\eta^k + \\ &\quad + 3H^k(w^k)^2 (S_\eta^k)^3 + (\eta - 1)B^2 S_\eta^k + 2\nu w^k J_{1\eta}^k S^k + 2\nu w^k z^k S_\eta^k + 4G^k(w^k)^3 J_{1\eta}^k S^k + \\ &\quad + 4G^k(w^k)^3 z^k S_\eta^k + E_\eta^k S^k + 2H^k(w^k)^3 J_{1\eta}^k S^k + B^2 S^k + 2H^k(w^k)^3 z^k S_\eta^k < -\eta \frac{khV^k}{h} S^{k-1}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

В неравенстве (3.30) коэффициент при S^k равен

$$2\nu w^k J_{1\eta}^k + 4G^k(w^k)^3 J_{1\eta}^k + F^k + E_\eta^k + 2H^k(w^k)^3 J_{1\eta}^k - \eta k V^k - B^2 k V^k. \quad (3.31)$$

Если $0 \leq kh \leq X$ и X достаточно мало, то выражение (3.31) отрицательно при $k \geq 2$ для $0 \leq \eta \leq 1$ и при $k = 1$ для $0 \leq \eta \leq \eta_0$ в силу выбора η_0 . Так как $S^1(0) > 0$, $S^1(\eta_0) > 0$, как показано выше, и $S^0 = 0$ в силу леммы 3.2, то из (3.30) согласно принципу максимума получаем $S^1 > 0$ при $0 \leq \eta \leq \eta_0$. Вместе с (3.29) это приводит к неравенству $S^1 \leq 0$ при $0 \leq \eta \leq 1$.

Далее, в силу того, что сумма (3.31) при $k \leq 2$ отрицательна, $S^1 \leq 0$ при $0 \leq \eta < 1$, из (3.30), (3.27) и (3.28) по принципу максимума выводим неравенство $S^k \leq 0$ при $0 \leq \eta < 1$, $k \leq 2$. Поэтому

$$z^k \leq J_1 = Y_\eta e^{-C_5 kh}.$$

Для оценки функции z^k снизу рассмотрим функцию $J_3 = Y_\eta e^{C_4 kh}$ и вычислим $P_k(J_3)$. Так же, как при оценке z^k сверху, покажем, что $P_k(J_3) > 0$, если C_6 достаточно велико и X достаточно мало. Выбрав $C_4 > C_2$, получим

$$(J_3 - z^k) \Big|_{\eta=\bar{\eta}_m} \leq 0, \quad (J_3 - z^k) \Big|_{\eta=0} < 0$$

при достаточно большом C_4 и $0 \leq kh \leq x$. Рассуждая далее так же, как при доказательстве оценки z^k сверху, получим, что

$$z^k \geq Y_\eta e^{C_4 kh}.$$

Из полученных оценок функций w^k , r^k , z^k и уравнения (3.3) следует ограниченность произведений $(w^k)^2 w_{\eta\eta}^k$ и $(w^k)^4 w_{\eta\eta}^k$. Установим второе из неравенств (3.22). Из (3.3) находим

$$\begin{aligned} \nu w^k w_{\eta\eta}^k \left(1 + 3d(kh)^2 (V^k)^2 (w^k)^3 w_{\eta\eta}^k \right) &= \eta kh V^k \frac{r^k}{w^k} - (\eta^2 - 1) (V^k + kh V_\xi^k) \frac{w_\eta^k}{w^k} - \\ &- \eta (V^k + kh V_\xi^k) - (\eta - 1) B^2 \frac{w_\eta^k}{w^k} + B^2 kh V^k - H^k (w^k)^2 (w_\eta^k)^2 \leq \\ &\leq \eta kh V^k \frac{r^k}{w^k} - (\eta^2 - 1) \frac{a Y_\eta}{Y} + \eta a - (\eta - 1) B^2 \frac{Y_\eta}{Y} + \\ &+ (\eta^2 - 1) \left[\frac{a Y_\eta}{Y} - (V^k + kh V_\xi^k) \frac{w_\eta^k}{w^k} \right] - \left[\eta a - \eta (V^k + kh V_\xi^k) \right] - H^k (w^k)^2 (w_\eta^k)^2 < \\ &< -\nu M_6 M_{17} = -\nu C_7, \end{aligned}$$

если $0 \leq kh \leq X$ и X достаточно мало. Этим доказательство леммы 3.4 завершено. $\square$

Доказательство теоремы 3.1. Продолжим решения $w^k(\eta)$ задачи (3.3), (3.4) линейно по ξ при $(k-1)h \leq \xi \leq kh$, $k = 1, 2, \dots, X/h$. В силу лемм 3.3, 3.4 полученное семейство функций $w_h(\xi, \eta)$ равномерно ограничено и равномерно непрерывно в Ω . По теореме Арцела получаем, что существует последовательность функций $w_{h_m}(\xi, \eta)$, равномерно сходящаяся в Ω к некоторой функции $w(\xi, \eta)$ при $h_m \rightarrow 0$. Точно так же, как в [5, § 3.1], доказывается, что w имеет обобщенные производные, входящие в уравнение (2.4), и удовлетворяет этому уравнению почти всюду, а также неравенствам (3.1), (3.2).

Чтобы доказать, что производные функции w , входящие в уравнение, удовлетворяют условию Гельдера в любой внутренней подобласти области Ω , рассмотрим в прямоугольнике $\Delta = \{\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2\}$ уравнение

$$\nu(1 + 3d\xi^2 V)^2 w^2 S_{\eta\eta} - \eta \xi V_\xi^S + E S_\eta + F S + 6\nu d\xi^2 V^2 w^3 S_\eta^2 + (\eta - 1) B^2 S_\eta - B^2 \xi V S = 0 \quad (3.32)$$

с условиями

$$S|_{\xi=\xi_1} = w|_{\xi=\xi_1}, \quad S|_{\eta=\eta_1} = w|_{\eta=\eta_1}, \quad S|_{\eta=\eta_2} = w|_{\eta=\eta_2}, \quad (3.33)$$

где $0 < \xi_1 < \xi_2 < X$, $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$. Поскольку w удовлетворяет условию Липшица, то задача (3.32), (3.33) в области Δ имеет такое решение S , что S_η ограничено в Δ , S_η , S_ξ , $S_{\eta\eta}$ удовлетворяют условию Гельдера в любой внутренней подобласти Δ . Покажем, что $S = w$. Функция $W = S - w$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \nu(1 + 3d\xi^2 V^2 w^2) w^2 W_{\eta\eta} - \eta \xi V W_\xi + E W_\eta + F W + \\ + 6\nu d\xi^2 V^2 w^3 W_\eta^2 + (\eta - 1) B^2 W_\eta - B^2 \xi V W = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

и условиям

$$W|_{\xi=\xi_1} = W|_{\eta=\eta_1} = W|_{\eta=\eta_2} = 0. \quad (3.35)$$

Умножим уравнение (3.34) на $W e^{-\alpha \xi}$, $\alpha = \text{const} > 0$, и проинтегрируем по Δ . Преобразуя некоторые члены интегрированием по частям, получим равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \left[-\nu w^2 W_\eta^2 + \nu (w_\eta^2 + w w_{\eta\eta}) W^2 - G w^4 W_\eta^2 + 2G (3w^2 w_\eta^2 + w^3 w_{\eta\eta}) W^2 - \eta B^2 W^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} B^2 \xi V W + \frac{1}{2} B^2 (\xi V)_\xi W^2 + \eta (\xi V)_\xi \frac{1}{2} W^2 - \eta \xi V \frac{1}{2} W^2 \alpha - \frac{1}{2} E_\eta W^2 + F W^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} H w^3 W_{\eta\eta} W^2 - \frac{3}{2} H w^2 w_\eta W_\eta W^2 \right] e^{-\alpha \xi} d\xi d\eta - \int_{\xi=\xi_2} \eta \xi V \frac{1}{2} W^2 e^{-\alpha \xi} d\eta = 0, \end{aligned}$$

а из него неравенство

$$\int_{\Delta} \left[\nu(w_{\eta}^2 + ww_{\eta\eta}) + 2G(3w^2w_{\eta}^2 + w^3w_{\eta\eta}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\eta(\xi V)_{\xi} - \frac{1}{2}\eta\xi V\alpha - \frac{1}{2}E_{\eta} + F - \eta B^2 \right] W^2 e^{-\alpha\xi} d\xi d\eta \geq 0. \quad (3.36)$$

При достаточно большом α выражение в квадратных скобках может быть сделано отрицательным, и тогда из (3.36) следует, что $W \equiv 0$ и $S = w$. $\square$

Обращая преобразование переменных (2.3), что возможно в силу свойств решения задачи (2.4), (2.5), получаем основной результат о существовании и единственности классического решения задачи (2.1), (2.2) в смысле данного нами определения.

Теорема 3.2. *Предположим, что*

$$U(x) = x(a + xa_1(x)), \quad v_0(x) = b + xb_1(x),$$

где $a = \text{const} > 0$, $b = \text{const}$; $U(x) > 0$ при $x > 0$; $a_1(x)$, $a_{1x}(x)$, $a_{1xx}(x)$, $b_1(x)$, $b_{1x}(x)$ ограничены. Тогда задача (2.1), (2.2) в области D при X , зависящем от U и v_0 , имеет решение u , v , которое обладает следующими свойствами:

- (i) $u_y > 0$ при $y \geq 0$, $x > 0$; u/U , u_y/U ограничены и непрерывны в $\overline{D}$;
- (ii) $u > 0$ при $y > 0$, $x > 0$; $u(x, y) \rightarrow U(x)$ при $y \rightarrow \infty$, $u(x, 0) = u(0, y) = 0$;
- (iii) $u_y/U > 0$ при $y \geq 0$; $u_y/U \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$;
- (iv) u_x , u_y , u_{yy} ограничены и непрерывны в $\overline{D}$;
- (v) v непрерывна в $\overline{D}$ по y при $x > 0$; v непрерывна по x и y внутри D ;
- (vi) u_{yyy} ограничена в $\overline{D}$; u_{xy} ограничена в D при ограниченных y ; u_{xy} и u_{yyy} непрерывны в $\overline{D}$; u_{yy}/u_y непрерывна в $\overline{D}$ по y ;
- (vii) имеют место оценки

$$U(x)Y\left(\frac{u}{U}\right)e^{-C_1x} \leq u_y \leq U(x)Y\left(\frac{u}{U}\right)e^{C_2x}, \quad Y_{\eta}\left(\frac{u}{U}\right)e^{C_4x} \leq \frac{u_{yy}}{u_y} \leq Y_{\eta}\left(\frac{u}{U}\right)e^{-C_5x}, \\ \exp\left[-\frac{M_1^2}{4}y^2e^{2C_2x}\right] \leq 1 - \frac{u}{U} \leq \exp\left[-\frac{M_1^2}{4}y^2e^{-2C_1x}\right],$$

где $Y(\eta)$ — решение задачи (3.13), (3.14).

Доказательство теоремы 3.2. Доказательство проводится на основе теоремы 3.1. Для начала покажем, что если $w(\xi, \eta)$ обладает свойствами, указанными в теореме 3.1, то можно с помощью замены (2.3) перейти от решения задачи (2.4), (2.5) к решению задачи (2.1), (2.2), существование которого доказано в теореме 4.1. Согласно (2.3) имеем

$$w(\xi, \eta) = w\left(x, \frac{u}{U}\right) = \frac{u_y}{U}, \quad x = \xi, \quad y = \int_0^{u(x,y)/U(x)} \frac{ds}{w(x, s)}. \quad (3.37)$$

Отсюда в силу непрерывности функции $w(\xi, \eta)$ в $\overline{\Omega}$ и неравенства $w > 0$ при $0 \leq \eta < 1$ получаем, что $u(x, y)/U(x)$ непрерывна и ограничена в $\overline{D}$,

$$u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, y) \rightarrow U(x) \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty,$$

u_y непрерывна и ограничена в $\overline{D}$, $u_y > 0$ при $y \geq 0$, $x \geq 0$. Из (3.37) находим

$$u_y = wU, \quad \frac{u_{yy}}{u_y} = w_{\eta}, \quad u_{yy} = Uw_{\eta}u_y = w_{\eta}u_y, \quad u_{yyy} = w_{\eta\eta}\frac{u_y^2}{U} + w_{\eta}u_{yy}, \\ u_{xy} = wU_{\xi} + Uw_{\xi} + u_{\xi}w_{\eta} - uw_{\eta}\frac{U_{\xi}}{U}, \quad u_x = u\frac{U_x}{U} + wU \int_0^{u(x,y)/U(x)} \frac{w_{\xi}(x, s)}{w^2(x, s)} ds. \quad (3.38)$$

Из свойств функции w и ее производных ввиду равенств (3.38) следует, что обобщенные производные u_x , u_{yy} , u_{yyy} ограничены в D , u_{xy} ограничена при конечных y . Неравенства для u , утверждаемые теоремой 4.1, следуют из оценок функций w , w_ξ , w_η и $ww_{\eta\eta}$. Непрерывность u_x и u_{yy} по y следует из (3.38). Функцию $v(x, y)$ определим равенством

$$v = \frac{1}{u_y} \left(-uu_x + \nu u_{yy}(1 + 3du_y^2) + UU_x + B^2U - B^2u \right). \quad (3.39)$$

Покажем, что u и v , определенные формулами (3.37), (3.39), удовлетворяют системе (2.1) и условиям (2.2). Функция v имеет производную по y в D . Дифференцируя (3.39) по y , получим

$$v_y u_y + \nu u_{yy} + u_y u_x + uu_{xy} - \nu u_{yyy} - 6\nu du_y u_{yy}^2 - 3\nu du_y^2 u_{yyy} - B^2 u_y = 0$$

или

$$v_y u_y + \frac{u_{yy}}{u_y} \left(-uu_x + \nu u_{yy}(1 + 3du_y^2) + UU_x \right) + u_y u_x + uu_{xy} - \nu u_{yyy} - 6\nu du_y u_{yy}^2 - 3\nu du_y^2 u_{yyy} - B^2 u_y = 0. \quad (3.40)$$

Функция $w(\xi, \eta) = u_y/U$ удовлетворяет уравнению (2.4). Заменяя в уравнении (2.4) производные w через производные от u , находим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{U} \left\{ \nu(1 + 3du_y^2) \frac{u_{yyy}u_y - u_{yy}^2}{u_y} - \frac{(u_{xy}u_y - u_x u_{yy}^2)u}{u_y} - \frac{uU_x(uu_{yy} - u_y^2)}{Uu_y} + \right. \\ \left. + \frac{(u^2 - U^2)U_x}{U} \frac{u_{yy}}{u_y} + uu_y - \frac{uu_y U_x}{U} + 6\nu du_y^2 u_y + (u - U) \frac{u_{yy}}{u_y} B^2 - B^2 u_y \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Умножив (3.41) на U и складывая равенства (3.40) и (3.41), получим

$$u_x + u_y = 0. \quad (3.42)$$

Уравнения (3.39), (3.42) представляют систему (2.1). Покажем, что $v(x, y)$ удовлетворяет условию $v(x, 0) = v_0(x)$. Из (2.5) следует, что

$$v_0 = \left[\frac{\nu w w_\eta (1 + 3dU^2 w^2) + U_x + B^2}{w} \right] \Big|_{\eta=0}.$$

Используя (3.39), получаем

$$v(x, 0) = \left[\frac{\nu u_{yy}(1 + 3du_y^2) + UU_x + B^2U + B^2u}{u_y} \right] \Big|_{y=0} = \left[\frac{\nu w w_\eta (1 + 3dU^2 w^2) + U_x + B^2}{w} \right] \Big|_{\eta=0} = v_0(x).$$

Здесь мы использовали непрерывность функций u , u_x , u_y , u_{yy} по y при $y = 0$, а также непрерывность w и ww_η по η . Как следует из (3.41), функция v , определенная равенством (3.39), непрерывна в $\bar{D}$ по y и ограничена при ограниченных y ; v_y ограничена в D , так как $v_y = -u_x$, а u/U и u ограничены.

Выведем асимптотическую формулу для отношения $u(x, y)/U(x)$ при $y \rightarrow \infty$. Используя оценки функций $w(\xi, \eta)$ из теоремы 3.1 и оценки $Y(\eta)$ из леммы 3.2, получаем при $\eta_0 \leq \eta \leq 1$ неравенства

$$M_1(1 - \eta)(\sigma - K_4)e^{-C_1 x} \leq w(\xi, \eta) \leq M_1(1 - \eta)\sigma e^{C_2 x}.$$

Это приводит к неравенствам

$$M_1 \left(1 - \frac{u}{U} \right) \left(\sigma \left(\frac{u}{U} \right) - K_4 \right) e^{-C_1 x} \leq \frac{u_y}{U} \leq M_1 \left(1 - \frac{u}{U} \right) \sigma \left(\frac{u}{U} \right) e^{C_2 x}.$$

Из того факта, что

$$\sigma_y = \frac{u_y/U}{2(1 - u/U)\sigma},$$

получаем

$$\frac{2\sigma_y}{M_1 e^{C_2 x}} \leq 1 \leq \frac{2\sigma\sigma_y}{M_1(\sigma - K_4)e^{-C_1 x}}.$$

Интегрируя последние неравенства по y от y_0 , соответствующего η_0 , до произвольного $y \in (y_0, \infty)$, получаем

$$\frac{2(\sigma - \sigma_0)}{M_1 e^{C_2 x}} \leq y - y_0 \leq \frac{2(\sigma - \sigma_0)}{M_1 e^{-C_1 x}} + \frac{2K_4}{M_1 e^{-C_1 x}} [\ln(\sigma - K_4) - \ln(\sigma_0 - K_4)],$$

где $\sigma = \sqrt{-\ln \mu(1 - u/U)}$, $\sigma_0 = \sigma|_{y=y_0}$.

Из этих неравенств находим

$$\frac{(y - y_0)M_1 e^{-C_1 x}}{2} + K_4 \ln \left(1 + \frac{(y - y_0)M_1 e^{C_2 x}}{2(\sigma - K_4)} \right) + \sigma_0 \leq \sigma \leq \frac{(y - y_0)M_1 e^{C_2 x}}{2} + \sigma_0$$

и, следовательно,

$$\exp \left[-\frac{U(0)}{2\nu} y^2 e^{2C_2 x} + O(y) \right] \leq 1 - \frac{u}{U} \leq \exp \left[-\frac{U(0)}{2\nu} y^2 e^{-2C_1 x} + O(y \ln y) \right] \quad \text{при } y \rightarrow \infty,$$

где $M_1^2 = 2a/\nu$, $a = U_x(0)$. Данные неравенства доказывают справедливость формулы

$$\exp \left[-\frac{M_1^2}{4} y^2 e^{2C_2 x} \right] \leq 1 - \frac{u}{U} \leq \exp \left[-\frac{M_1^2}{4} y^2 e^{-2C_1 x} \right]. \quad \square$$

4. Теорема о единственности решения задачи.

Теорема 4.1. *Задача (2.4), (2.5) в области Ω может иметь лишь одно неотрицательное решение w , обладающее следующими свойствами: w непрерывна в Ω ; w_η , $w_{\eta\eta}$, w_ξ непрерывны во внутренних точках Ω ; $w > 0$ при $\eta = 0$; w_η непрерывна по η при $\eta = 0$.*

Доказательство теоремы 3.2. Предположим, что задача имеет два таких решения w_1 и w_2 . Их разность $\bar{w} = w_1 - w_2$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \nu w_1^2 \bar{w}_{\eta\eta} + \nu(w_1 + w_2)w_{2\eta\eta} \bar{w} + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^4 \bar{w}_{\eta\eta} + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1^3 + w_1 w_2^2 + w_1^2 w_2 + w_2^3) w_{2\eta\eta} \bar{w} - \\ - \eta \xi V \bar{w}_\xi + (\eta^2 - 1)(V + \xi V_\xi) \bar{w}_\eta - \eta(V + \xi V_\xi) \bar{w} + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_{1\eta} + w_{2\eta}) w_{2\eta}^3 \bar{w}_{2\eta} + \\ + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2) w_{1\eta}^2 \bar{w} + (\eta - 1) B^2 \bar{w}_\eta - B^2 \xi V \bar{w} = 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\bar{w} \Big|_{\eta=1} = 0, \quad \left(\nu \bar{w}_\eta + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^2 \bar{w}_{2\eta} + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1 + w_2) w_{2\eta} \bar{w} - \frac{(V + \xi V_\xi) \bar{w}}{w_1 w_2} - \frac{B^2 \bar{w}}{w_1^2 w_2^2} \right) \Big|_{\eta=0} = 0.$$

Для $W = \bar{w} e^{-\alpha \xi}$, $\alpha = \text{const} > 0$, имеем следующее уравнение в области Ω :

$$\begin{aligned} \nu w_1^2 W_{\eta\eta} + \nu(w_1 + w_2)w_{2\eta\eta} W + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^4 W_{\eta\eta} + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1^3 + w_1 w_2^2 + w_1^2 w_2 + w_2^3) w_{2\eta\eta} W - \\ - \eta \xi V W_\xi - \alpha \eta \xi V W_\xi + (\eta^2 - 1)(V + \xi V_\xi) W_\eta - \eta(V + \xi V_\xi) W + \\ + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2) w_{1\eta}^2 W + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_{1\eta} + w_{2\eta}) w_{2\eta}^3 W_{2\eta} + (\eta - 1) B^2 W_\eta = 0 \quad (4.1) \end{aligned}$$

а также граничные условия

$$W \Big|_{\eta=1} = 0, \quad \left(\nu W_\eta + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^2 W_{2\eta} + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1 + w_2) w_{2\eta} W - \frac{(V + \xi V_\xi + B^2) W}{w_1 w_2} \right) \Big|_{\eta=0} = 0. \quad (4.2)$$

При достаточно большом α коэффициент при W в (4.1) отрицателен, $(V + \xi V_\xi) > 0$ по условию. По принципу максимума из (4.1), (4.2) следует, что W не может иметь ни положительного максимума, ни отрицательного минимума при $0 \leq \eta < 1$. Следовательно, $W \equiv 0$ и $\bar{w} \equiv 0$. $\square$

Теорема 4.2. *Пусть u , v — решение задачи (2.1), (2.2), удовлетворяющее следующим условиям:*

Рис. 1

Рис. 2

- (1) производные $u_x, u_y, v_y, u_{yy}, u_{yyy}, u_{xy}$ непрерывны в D ;
- (2) функции u/U и u_y/U непрерывны в $\bar{D}$;
- (3) $u_y > 0$ при $y \geq 0, x > 0$; $u_y/U > 0$ при $y = 0$; $u_y/U \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$;
- (4) $u_{yy}/u_y, u_x$ непрерывны по y при $y = 0$;
- (5) $\frac{u_{yyy}u_y - u_y^2}{u_y^2} \leq 0$.

Тогда u, v — единственное решение задачи (2.1), (2.2) с указанными свойствами.

Доказательство теоремы 4.2. Если u, v — решение задачи (2.1), (2.2), обладающее этими свойствами, то с помощью замены независимых переменных (2.3) и введения новой неизвестной функции $w = u_y/U$ приходим к решению w задачи (2.4), (2.5), обладающему свойствами из теоремы 3.1, аналогично доказательству теоремы 4.1. Как показано выше, такое решение w единственно. $\square$

5. Влияние магнитного поля на отрыв пограничного слоя. Одним из способов активного воздействия на характеристики пограничного слоя является искусственное воздействие поперечным магнитным полем на жидкости. Поперечное магнитное поле используется для управления точкой отрыва пограничного слоя, так как преждевременный его отрыв уменьшает подъемную силу и увеличивает лобовое сопротивление обтекаемого тела, например, профиля крыла или иной несущей поверхности.

Определение 5.1. Точкой отрыва пограничного слоя называется такая точка x_0 , что $u_y(x_0, 0) = 0$ и $u_y(x, 0) > 0$ при $0 < x < x_0$. Тогда x_0 — верхняя грань таких $X > 0$, что в области D задача (2.1), (2.2) имеет такое решение $u(x, y), v(x, y)$, что $u_y(x, 0) > 0$.

В точке x_0 при $y = 0$ производная скорости по y равна нулю, откуда появляется перегиб, и устойчивость течения нарушается. С последующим поступательным движением пограничного слоя появляется область, где производная по y становится меньше нуля, т.е. возникает обратное течение жидкости и образуются вихри. При этом нарушается ламинарный характер течения и его стационарность. Этого можно избежать, подействовав магнитным полем, направленным перпендикулярно потоку жидкости. Под этим влиянием точка отрыва пограничного слоя от твердой обтекаемой поверхности сдвинется вправо, тем самым выравнивая течение жидкости (см. рис. 2). Таким образом, сделан вывод о том, что при достаточно сильном магнитном поле возможно безотрывное течение независимо от других параметров движения вязкой сплошной среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булатова Р. Р., Самохин В. Н., Чечкин Г. А. Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя для модифицированной несжимаемой вязкой среды. Отрыв пограничного слоя// Пробл. мат. анализ. — 2018. — 92. — С. 83–100.
2. Булатова Р. Р. Влияние магнитного поля на положение точки отрыва пограничного слоя электропроводной жидкости// Изв. вузов. Пробл. полиграфии и издат. дела. — 2018. — № 1. — С. 14–22.
3. Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г. А. Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье—Стокса// Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 2011. — 28. — С. 329–361.
4. Самохин В. Н., Чечкин Г. А. Уравнения пограничного слоя обобщенно ньютоновской среды в окрестности критической точки// Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 2016. — 31. — С. 158–176.
5. Олейник О. А., Самохин В. Н. Математические методы в теории пограничного слоя. — М.: Наука, 1997.
6. Bulatova R. R., Chechkin G. A., Chechkina T. P., Samokhin V. N. On the influence of a magnetic field on the separation of the boundary layer of a non-Newtonian MHD medium// C. R. Méc. — 2018. — 346, № 9. — P. 807–814.

Булатова Регина Рашидовна

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: regina.bulatova@mech.math.msu.su