Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Гаркавенко, О спектральных свойствах одного класса возмущенных операторов, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 171, 57–69

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-171-57-69>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 13:15:34

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 171 (2019). С. 57–69
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-171-57-69

УДК 517.9

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА ВОЗМУЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2019 г. Г. В. ГАРКАВЕНКО

Аннотация. При помощи метода подобных операторов исследованы спектральные свойства возмущенного оператора $A - B : D(A) \subset H \rightarrow H$, где A — самосопряженный оператор, имеющий компактную резольвенту, B — неограниченное возмущение. При некоторых условиях на спектр невозмущенного оператора A и возмущение B найдены оценки спектральных множеств возмущенного оператора. Полученные результаты применены к исследованию спектра дифференциальных операторов с периодическими краевыми условиями и негладким потенциалом.

Ключевые слова: метод подобных операторов, спектр, дифференциальный оператор.

ON SPECTRAL PROPERTIES OF A CERTAIN CLASS OF PERTURBED OPERATORS

© 2019 G. V. GARKAVENKO

ABSTRACT. Using the method of similar operators, we examine spectral properties of the perturbed operator $A - B : D(A) \subset H \rightarrow H$, where A is a self-adjoint operator with a compact resolvent and B is an unbounded perturbation. Under certain conditions on the spectrum of the unperturbed operator A and the perturbation B , we obtain estimates of the spectral sets of the perturbed operator. The results obtained are applied to the study of the spectrum of differential operators with periodic boundary conditions and a nonsmooth potential.

Keywords and phrases: method of similar operators, spectrum, differential operator.

AMS Subject Classification: 47B06, 47B37

1. Введение. Статья посвящена исследованию спектральных свойств возмущенного самосопряженного оператора с дискретным спектром, удовлетворяющим некоторым условиям, и с неограниченным возмущением. Исследование проводится с помощью метода подобных операторов. Полученные результаты для абстрактного оператора применяются к исследованию спектральных свойств дифференциальных операторов второго порядка, определяемых периодическими краевыми условиями на конечном промежутке с негладким потенциалом.

В основе проводимого исследования лежит метод подобных операторов, основные положения которого описаны в [1–3]; дальнейшее развитие метод получил в [4–8].

Для изучения спектральных свойств оператора существенно используется теорема 2.1 о подобии возмущенного оператора оператору более простой структуры. Основные результаты статьи изложены в теоремах 3.2 и 3.3, где найдена асимптотика спектра возмущенного оператора. Полученные результаты применены в разделе 4 для исследования спектральных свойств дифференциального оператора. Асимптотика спектра описана в теореме 4.1.

Итак, будем рассматривать возмущенный оператор $A - B$, где A — оператор с известным спектром, удовлетворяющим некоторому условию, а B — оператор возмущения.

Пусть самосопряженный оператор $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ имеет спектр $\sigma(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n$, состоящий из множеств $\sigma_n = \{\lambda_n\}$, где λ_n — полупростые собственные значения. Первым предварительным условием на спектр оператора будет являться условие

$$\text{dist}(\lambda_n, \sigma_n(A) \setminus \lambda_n) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Оператор B принадлежит пространству допустимых возмущений для оператора A .

2. Основные положения метода подобных операторов. Приведем основные определения и теоремы, составляющие основу метода подобных операторов.

Пусть H — комплексное сепарабельное гильбертово пространство, $\text{End } H$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в H .

Определение 2.1. Линейные операторы $A_1 : D(A_1) \subset H \rightarrow H$ и $A_2 : D(A_2) \subset H \rightarrow H$ называются *подобными*, если существует такой непрерывно обратимый оператор $U \in \text{End } H$, что

$$A_1 Ux = U A_2 x, \quad x \in D(A_2), \quad U(D(A_2)) = D(A_1).$$

Оператор U называется *оператором преобразования* оператора A_1 в оператор A_2 .

В следующей лемме отражены спектральные свойства подобных операторов.

Лемма 2.1. Пусть оператор $A_2 : D(A_2) \subset H \rightarrow H$ подобен оператору $A_1 : D(A_1) \subset H \rightarrow H$ и $U \in \text{End } H$ — оператор преобразования оператора A_1 в оператор A_2 . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2)$, $\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2)$, $\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, где $\sigma(A_i)$ — спектр, $\sigma_d(A_i)$ — дискретный спектр, $\sigma_c(A_i)$ — непрерывный спектр, $\sigma_r(A_i)$ — остаточный спектр оператора A_i , $i = 1, 2$;
- (2) если оператор A_2 допускает разложение $A_2 = A_{21} \oplus A_{22}$, где $A_{2k} = A|_{H_k}$, $k = 1, 2$, — сужение A_2 на H_k относительно прямой суммы $H = H_1 \oplus H_2$ инвариантных относительно A_2 подпространств H_1, H_2 , то подпространства $\tilde{H}_k = U(H_k)$, $k = 1, 2$, инвариантны относительно оператора A_1 и $A_1 = A_{11} \oplus A_{12}$, где $A_{1k} = A_1|_{\tilde{H}_k}$, $k = 1, 2$; при этом $H = \tilde{H}_1 \oplus \tilde{H}_2$. Кроме того, если P — проектор, осуществляющий разложение $H = H_1 \oplus H_2$ (т.е. $H_1 = \text{Im } P$ — образ проектора P , $H_2 = \text{Im}(I - P)$ — образ дополнительного проектора $I - P$), то проектор $\tilde{P} \in \text{End } H$, осуществляющий разложение $H = \tilde{H}_1 \oplus \tilde{H}_2$, определяется формулой $\tilde{P} = U P U^{-1}$.

Всюду в статье символом $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ обозначается самосопряженный замкнутый оператор, в дальнейшем играющий роль *невозмущенного* оператора.

Определение 2.2. Оператор $B : D(B) \subset H \rightarrow H$ называется *подчиненным оператору A* , если $D(B) \supseteq D(A)$ и существует такая постоянная $C > 0$, что $\|Bx\| \leq C(\|x\| + \|Ax\|)$ для любого $x \in D(A)$, где $C = C(A)$ — некоторая постоянная.

Множество линейных операторов, подчиненных оператору A , будем обозначать $L_A(H)$. Положим $\|B\|_A = \inf C$, где $\inf$ берется по всем постоянным $C > 0$ из определения 2.2. Эта величина конечна и принимается за норму оператора B в $L_A(H)$.

В работе используется термин *трансформатор*, который согласно терминологии М. Г. Крейна обозначает линейный оператор в пространстве линейных операторов. Область определения трансформатора состоит из таких операторов $X \in \text{End } H$, для которых $XD(A) \subset D(A)$ и оператор $Y = AX - XA : D(A) \rightarrow H$ допускает ограниченное расширение Y на H .

Основной составляющей метода подобных операторов является понятие допустимой тройки, которая должна для применимости метода удовлетворять ряду условий.

Определение 2.3. [3] Пусть $\mathfrak{A}$ — линейное многообразие операторов из $L_A(H)$ и $J : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, $\Gamma : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End } H$ — линейные трансформаторы. Тройку $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ назовем *допустимой тройкой* для оператора $A : D(A) \subset H \rightarrow H$, а $\mathfrak{A}$ — *пространством допустимых возмущений*, если выполнены следующие условия:

- (1) $\mathfrak{A}$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_*$, непрерывно вложенное в $L_A(H)$ (т.е. существует такая постоянная $C > 0$, что $\|X\|_A \leq C\|X\|_*$, для любого $X \in L_A(X)$);
- (2) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причем J — проектор;
- (3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$ и, более того, имеют место равенства

$$A\Gamma X - (\Gamma X)A = X - JX, \quad X \in \mathfrak{A},$$

справедливые для векторов из $D(A)$, причем ΓX — единственное решение уравнения $AU - UA = X - JX$, удовлетворяющее условию $JU = 0$;

- (4) $X\Gamma Y, (\Gamma X)Y \in \mathfrak{A}$ для любых $X, Y \in \mathfrak{A}$ и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что $\|\Gamma\| \leq \gamma$ и
$$\max \{ \|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma X)Y\|_* \} \leq \gamma \|X\|_* \|Y\|_* \quad \forall X, Y \in \mathfrak{A};$$
- (5) $J((\Gamma X)JY) = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{A}$;
- (6) для любых $X \in \mathfrak{A}$ и $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, что $\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$, где I — тождественный оператор.

Теорема 2.1. Пусть $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ — допустимая тройка для невозмущенного оператора

$$A : D(A) \subset H \rightarrow H$$

и $B \in \mathfrak{A}$. Если выполняется неравенство

$$\|J\| \|B\|_* \|\Gamma\| < \frac{1}{4}, \quad (2)$$

то оператор вида $A - B$ подобен оператору вида $A - J\tilde{X}$, где $\tilde{X} \in \mathfrak{A}$ является решением нелинейного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)J(B\Gamma X) - (\Gamma X)JB + B = \Phi(X), \quad (3)$$

которое можно найти методом простых итераций, полагая $X_0 = 0$, $X_1 = B$, $X_2 = \Phi(X_1)$, ..., $X_{n+1} = \Phi(X_n)$, $n \geq 2$. Отображение $\Phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ является сжимающим в шаре $\{X \in \mathfrak{A} : \|X - B\|_* \leq 3\|B\|_*\}$. Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - J\tilde{X}$ осуществляет обратимый оператор $I + \Gamma\tilde{X}$, т.е. имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma\tilde{X}) = (I + \Gamma\tilde{X})(A - J\tilde{X}).$$

Далее в статье производится построение допустимой тройки метода подобных операторов и исследуются спектральные свойства возмущенного оператора.

3. Построение допустимой тройки метода подобных операторов для одного класса неограниченных возмущений. Для самосопряженного оператора $A : D(A) \subset H \rightarrow H$, имеющего спектр, состоящий из множеств $\sigma_n = \{\lambda_n\}$, где λ_n — полупростые собственные значения удовлетворяющие условию (1), построим допустимую тройку $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$.

Построение допустимой тройки осуществляется с привлечением ортогональных проекторов Рисса P_k , $k \geq 1$, построенных по спектральным множествам $\sigma_n = \{\lambda_n\}$, т.е. $AP_k = \lambda_k P_k$, $k \geq 1$. Проекторы Рисса P_k , $k \geq 1$, построенные по изолированным спектральным множествам σ_n , приводят оператор A и разлагают пространство H в ортогональную прямую сумму подпространств H_k , $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots$, где $H_k = \text{Im } P_k$.

В случае $\dim \text{Im } P_k = \dim H_k = 2$ будем получать проекторы вида

$$P_k x = (x, e_k)e_k + (x, e_{-k})e_{-k}, \quad k \geq 1, \quad e_k \perp e_{-k}, \quad \|e_k\| = \|e_{-k}\| = 1, \quad (4)$$

где $Ae_k = \lambda_k e_k$, $Ae_{-k} = \lambda_k e_{-k}$, $k \geq 1$. Через $A_k = \lambda_k I_k$ будем обозначать сужение оператора A на подпространство H_k .

Матрица оператора A в базисе из собственных векторов в общем случае имеет блочно-диагональный вид.

Введем в рассмотрение такой проектор P'_m , что $P'_m = P_1 + P_2 + \dots + P_m$ и $H'_m = \text{Im } P'_m$, $\dim H'_m = \sum_{i=1}^m \dim H_i$, т.е. P'_m — проектор Рисса, построенный по множеству $\sigma'_m = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$.

Значение m выбирается с тем расчетом, чтобы $d_m = \text{dist}(\sigma'_m, \sigma(A) \setminus \sigma'_m)$ было достаточно велико. Тогда спектр оператора A представим в виде

$$\sigma(A) = \sigma'_m \cup \left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} \sigma_n \right).$$

Через $A_n = \lambda_n I_n$ будем обозначать сужение оператора A на подпространство H_n , $n \geq m+1$, а через AP'_m — сужение на подпространство $H'_m = \text{Im } P'_m$.

Построение рассматриваемого пространства допустимых возмущение $\mathfrak{A}$ осуществляется следующим образом. Оператор X из $L_A(H)$ отнесем к $\mathfrak{A}$, если выполняются следующие условия:

- (1) $\sup_{m-k=n} \|P_m X P_k\| = M(n) < \infty$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, $m, k \geq 1$;
- (2) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} M^2(n) < \infty$.

В качестве нормы в $\mathfrak{A}$ берется величина

$$\|X\|_* = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} M^2(n)}.$$

Из условия (1) следует сильная сходимость ряда

$$\sum_{m-k=n} P_m X P_k, \quad m, k \geq 1, \quad (5)$$

к некоторому оператору $X(n)$ из $\text{End } H$. Этот оператор назовем n -й диагональю оператора X . Действительно, для любого $X \in \mathfrak{A}$ и $x \in H$ верны следующие неравенства, полученные при помощи равенства Парсеваля (для определенности будем считать, что $n \geq 0$):

$$\begin{aligned} \|X(n)x\|^2 &= \sum_{m-k=n} \|P_m X P_k x\|^2 = \sum_{m=n+k} \|P_m X P_{m-n} x\|^2 \leq \\ &\leq \sup_{m \geq n+k} \|P_m X P_{m-n} x\|^2 \|x\|^2 \leq M^2(n) \|x\|^2, \quad m, k \geq 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует сходимость ряда (5) и неравенство $\|X(n)\| \leq M(n)$. Таким образом, каждый оператор $X \in \mathfrak{A}$ допускает представление вида

$$X = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n), \quad (6)$$

и его блоки $X_{mk} = P_m X P_k$, стоящие на n -й диагонали ($m - k = n$) равномерно ограничены. Сходимость ряда (6) понимается на векторах из $D(A)$, причем

$$Xx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n X(k)x, \quad x \in D(A).$$

Факт $X \in \mathfrak{A}$ обоснован в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пространство $\mathfrak{A}$ является банаховым и оно непрерывно вложено в $L_A(H)$.*

Доказательство. Выполнение аксиом нормы для пространства $\mathfrak{A}$ проверить несложно; покажем, что оно полно относительно введенной нормы. Если (X_l) — фундаментальная последовательность в $\mathfrak{A}$, то она ограничена в $\mathfrak{A}$ и поэтому величина

$$\sup_{m-k=n} \|P_m X_l P_k\| = \|X_l(n)\| = M_l(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m, k \geq 1,$$

будет обладать свойством

$$\|X_l\|_*^2 = \sup_{l \geq 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_l^2(n) < \infty.$$

Из этой оценки следует, что последовательность операторов $(X_l(n))$ будет фундаментальной в $\text{End } H$ для каждого фиксированного $n \in \mathbb{Z}$. Обозначим предел этой последовательности через $X_0(n)$; тогда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|X_0(n)\|^2 \leq \sup_{l \geq 1} \|X_l\|_*^2 < \infty.$$

На векторах $x \in D(A)$ определим оператор $X_0 : D(A) \rightarrow H$ формулой

$$X_0 x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_0(n)x.$$

Докажем, что $X_0 \in L_A(H)$. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$. Тогда верны равенства

$$X_0(n)x = X_0(n)(A - \lambda_0 I)^{-1}(A - \lambda_0 I)x = \left(\sum_{\substack{m-k=n, \\ m, k \geq 1}} \frac{P_m X_0 P_k}{\lambda_k - \lambda_0} \right) y,$$

где $y = (A - \lambda_0 I)x$. Так как последовательность $\{\lambda_k\}$ удовлетворяет соотношению (1), то последовательность (α_k) , где $\alpha_k = 1/|\lambda_k - \lambda_0|$, $k > 0$, принадлежит l_2 .

Определим оператор Y_0 формулой

$$Y_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_0(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m-k=n} \frac{P_m X_0 P_k}{\lambda_k - \lambda_0}, \quad m, k \geq 1,$$

где $X_0 \in \mathfrak{A}$. Факт $Y_0 \in \text{End } H$ следует из соотношения

$$Y_0(n) = \sum_{m-k=n} \frac{P_m X_0 P_k}{\lambda_k - \lambda_0}, \quad m, k \geq 1,$$

из которого получаем:

$$\|Y_0(n)\| = \sup_{m-k=n} \|P_m Y_0 P_k\| \leq \sup_{m-k=n} \|P_m X_0 P_k\| \|(\alpha_k)\|_{l_2} = \tilde{M}(n) < \infty, \quad m, k \geq 1.$$

Следовательно,

$$\|Y_0\|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|Y_0(n)\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{M}^2(n) < \infty.$$

Поскольку $X_0 = Y_0(A - \lambda_0 I)$, т.е. $\|X_0 x\| \leq C(\|Ax\| + \|x\|)$, $x \in D(A)$, то $X_0 \in L_A(H)$. Получаем из доказанного, что $\mathfrak{A}$ непрерывно вложено в $L_A(H)$ и справедлива оценка

$$\|X_0\|_* \leq C \|X_0(A - \lambda_0 I)^{-1}\|_{\text{End } H}, \quad X_0 \in \mathfrak{A}. \quad \square$$

Построение трансформатора $J : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ также будет зависеть от выбранного m , поэтому обозначим его J_m и на операторах из допустимого пространства возмущений определим формулой

$$J_m X = P'_m X P'_m + \sum_{i=m+1}^{\infty} P_i X P_i, \quad X \in \mathfrak{A};$$

J является проектором. Соответственно трансформатор $\Gamma = \Gamma_m : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End } H$ в этом случае определяется формулой

$$\Gamma_m X = \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

Найдем представление для $\Gamma_m X(n)$ при $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}\Gamma_m X(n) &= \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{P_i \left(\sum_{l-k=n} P_l X P_k \right) P_j}{\lambda_i - \lambda_j} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{P_i \left(\sum_{l-k=n} P_l X P_k \right) P_j}{\lambda_i - \lambda_j} = \\ &= \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1, \\ i-j=n}}^{i-1} \frac{P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{\substack{i=1, \\ i-j=n}}^{j-1} \frac{P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j}.\end{aligned}$$

Оценим норму трансформатора $\Gamma = \Gamma_m : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End } H$ при каждом $m \in \mathbb{N}$. Из представления оператора $\Gamma_m X(n)$ с учетом того факта, что это n -диагональный ограниченный оператор, получаем оценку вида

$$\|\Gamma_m X(n)\| = \alpha_m(n) \sup_{i-j=n} \|P_i X P_j\| \leq \alpha_m(n) \|X(n)\|,$$

где двусторонняя последовательность $\alpha_m : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ определяется равенством

$$\alpha_m(n) = \max \left(\max_{\substack{i > m, \\ 1 \leq j \leq i-1}} (|\lambda_i - \lambda_j|^{-1}); \max_{\substack{j > m, \\ 1 \leq i \leq j-1}} (|\lambda_i - \lambda_j|^{-1}) \right), \quad i - j = n, \quad n \neq 0.$$

В дальнейшем всюду считаются выполненными следующие условия:

- (1) двусторонняя последовательность α_m принадлежит $l_2(\mathbb{Z})$;
- (2) $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\alpha_m\|_{l_2} = 0$.

Из этих условий следует, что спектр рассматриваемого оператора удовлетворяет условию (1).

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}\|\Gamma_m X\| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\Gamma_m X(n)\| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_m(n) \|X(n)\| \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_m^2(n)} \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|X(n)\|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_m^2(n)} \|X\|_* = \|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})} \|X\|_*.\end{aligned}$$

Следовательно, трансформатор Γ_m допускает оценку

$$\|\Gamma_m\| \leq \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_m^2(n)} = \|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})}.$$

Из этой оценки следует, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Gamma_m\| = 0$. Тогда, выбирая достаточно большое m , можно не требовать малости $\|B\|_*$.

Лемма 3.1. *Тройка $(\mathfrak{A}, J_m, \Gamma_m)$ является допустимой для оператора $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ и*

$$\begin{aligned}\|\Gamma_m\| &\leq \|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})}, \\ \max \{ \|X \Gamma_m Y\|_*, \|(\Gamma_m X) Y\|_* \} &\leq \|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})} \|X\|_* \|Y\|_*, \quad X, Y \in \mathfrak{A}.\end{aligned}$$

Доказательство. Первое свойство допустимой тройки, т.е. факт, что банахово пространство $\mathfrak{A}$ непрерывно вложено в $L_A(H)$, доказано в теореме 3.1. Из построения J_m и Γ_m видно, что трансформаторы непрерывны (ограничены), причем J_m — проектор и $\|\Gamma_m\| \leq \|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})}$. Докажем, что $(\Gamma_m X)D(A) \subset D(A)$ и $A\Gamma_m X - \Gamma_m XA = X - J_m X$ для всех $X \in \mathfrak{A}$. В соответствии с построением пространства возмущений $\mathfrak{A}$, если $X \in \mathfrak{A}$, то диагонали $X(n)$, $n \geq 1$, этого оператора равномерно ограничены, откуда следует ограниченность $\Gamma_m X(n)$. Следовательно, $(\Gamma_m X(n))D(A) \subset D(A)$ (см. [1], где доказано это свойство для ограниченных операторов).

Рассмотрим последовательность операторов $\tilde{X}_n = \sum_{k=-n}^n X(k)$, $n \geq 0$; имеем

$$Xx = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{X}_n, \quad x \in D(A),$$

где $X \in \mathfrak{A}$.

Пусть $x \in D(A)$; как в теореме 3.1, рассмотрим $\lambda_0 \in \rho(A)$. Тогда

$$\Gamma_m \tilde{X}_n x = \Gamma_m \tilde{X}_n (A - \lambda_0 I)^{-1} (A - \lambda_0 I) x = \Gamma_m \tilde{X}_n (A - \lambda_0 I)^{-1} y,$$

где $y \in H$.

Рассмотрим последовательность векторов вида $z_n = \Gamma_m \tilde{X}_n (A - \lambda_0 I)^{-1} y$, $z_n \in D(A)$. Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{X}_n (A - \lambda_0 I)^{-1} y = X (A - \lambda_0 I)^{-1} y,$$

то $z_n \rightarrow z = \Gamma_m X (A - \lambda_0 I)^{-1} y$. Таким образом, последовательность векторов $g_n = Az_n$, $n \geq 1$, такова, что $g_n \rightarrow g_0 = Az_0$. Так как A — замкнутый оператор, то из условий $z_n \rightarrow z_0$ и $Az_n \rightarrow g_0$ следует, что $z_0 \in D(A)$. Итак, получили включение $\Gamma_m D(A) \subset D(A)$.

Докажем равенство

$$A\Gamma_m X - \Gamma_m X A = X - J_m X, \quad X \in \mathfrak{A}. \quad (7)$$

Введем обозначения $y = (A(\Gamma_m X) - (\Gamma_m X)A)x$ и $z = (X - J_m X)x$, $x \in D(A)$. Для доказательства (7) достаточно установить, что $P'_m y = P'_m z$. Используя перестановочность оператора A и проекторов P_n , $n \geq 1$, имеем

$$\begin{aligned} P'_m y &= P'_m (A(\Gamma_m X) - (\Gamma_m X)A)x = P'_m \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{AP_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{AP_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right) x - \\ &\quad - \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{P'_m P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{P'_m P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right) Ax = \\ &= \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j} x - \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_j P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j} x = \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^m P_i X P_j x. \end{aligned}$$

Применяя проектор P'_m к вектору z , получаем

$$\begin{aligned} P'_m z &= P'_m (X - J_m X)x = P'_m X x - P'_m \left(P'_m X P'_m + \sum_{i=m+1}^{\infty} P_i X P_i \right) x = \\ &= \sum_{i=1}^m P_i X \sum_{j=1}^{\infty} P_j x - \sum_{i,j=1}^m P_i X P_j x = \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^m P_i X P_j x. \end{aligned}$$

Пусть теперь $n > m$, тогда

$$\begin{aligned} P_n y &= P_n (A(\Gamma_m X) - (\Gamma_m X)A)x = \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_n P_n X P_j}{\lambda_n - \lambda_j} x + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{\lambda_n P_n X P_j}{\lambda_n - \lambda_j} x \right) - \\ &\quad - \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_j P_n X P_j}{\lambda_n - \lambda_j} x + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{\lambda_j P_n X P_j}{\lambda_n - \lambda_j} x \right) = \sum_{j=1}^{n-1} P_n X P_j x + \sum_{j=m+1}^{\infty} P_n X P_j x = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} P_n X P_j x - P_n X P_n x. \end{aligned}$$

Применим проектор P_n , $n > m$ к вектору z :

$$\begin{aligned} P_n z &= P_n (X - J_m X)x = P_n X x - P_n \left(P'_m X P'_m + \sum_{i=m+1}^{\infty} P_i X P_i \right) x = \\ &= P_n \sum_{i,j=1}^{\infty} P_i X P_j x - P_n X P_n x = \sum_{j=1}^{\infty} P_n X P_j x - P_n X P_n x. \end{aligned}$$

Получили $P_n y = P_n z$, $n \geq 1$; значит, равенство (7) выполнено.

Выполнение четвертого свойства допустимой тройки можно доказать, рассматривая оператор $Z = (\Gamma_m X)Y$, $X, Y \in \mathfrak{A}$, допускающий представление

$$Z = \sum_{n=-\infty}^{inf ty} Z(n), \quad \text{где} \quad Z(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\Gamma_m X)(k) Y(n-k).$$

Приходим к оценкам

$$\begin{aligned} \|Z(n)\| &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|(\Gamma_m X)(k)\| \|Y(n-k)\| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_m(k) \|X(k)\| \|Y(n-k)\|, \\ \|(\Gamma_m X)Y\|_* &\leq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_m^2(k) \right)^{1/2} \|X\|_* \|Y\|_*, \end{aligned}$$

из которых следует, что $Z = (\Gamma_m X)Y \in \mathfrak{A}$; аналогично для $X\Gamma_m Y$. Константа γ выбирается равной $\|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})}$. Итак,

$$\begin{aligned} \|\Gamma_m\| &\leq \|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})}, \\ \max \{ \|X\Gamma_m Y\|_*, \|(\Gamma_m X)Y\|_* \} &\leq \|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})} \|X\|_* \|Y\|_*, \quad X, Y \in \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Итак, тройка $(\mathfrak{A}, \Gamma_m, J_m)$ является допустимой для оператора A . $\square$

Из леммы 3.1 и теоремы 2.1 метода подобных операторов вытекает следующая теорема.

Теорема 3.2. Пусть $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ — самосопряженный оператор со спектром, удовлетворяющим условию (1), оператор $B : D(B) \subset H \rightarrow H$ принадлежит построенному пространству допустимых возмущений $\mathfrak{A}$ и существует такое натуральное число m_0 , что

$$\|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})} \|B\|_* \leq \frac{1}{4}. \quad (8)$$

Тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - J_{m_0} X_0$ и имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma_{m_0} X_0) = (I + \Gamma_{m_0} X_0)(A - J_{m_0} X_0) = (I + \Gamma_{m_0} X_0)(A - P'_{m_0} X P'_{m_0} - \sum_{i \geq m_0+1}^{\infty} P_i X_0 P_i), \quad (9)$$

где X_0 — решение нелинейного уравнения вида (3), которое можно найти методом простых итераций.

В следующей теореме описан спектр возмущенного оператора $A - B$.

Теорема 3.3. Пусть $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ — самосопряженный оператор со спектром $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, удовлетворяющим условию (1), и число m_0 таково, что выполнено условие (8). Спектр оператора A представим в виде

$$\sigma(A) = \sigma'_{m_0} \cup \left(\bigcup_{n=m_0+1}^{\infty} \sigma_n \right),$$

где $\sigma'_{m_0} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m_0}\}$, $\sigma_n = \lambda_n$, $n \geq m_0 + 1$ (λ_n — полупростые собственные значения оператора A). Тогда спектр оператора $A - B$ представим в виде объединения

$$\sigma(A - B) = \tilde{\sigma}'_{m_0} \cup \left(\bigcup_{n=m_0+1}^{\infty} \tilde{\sigma}_n \right) \quad (10)$$

взаимно не пересекающихся множеств $\tilde{\sigma}'_{m_0}, \tilde{\sigma}_n$, $n \geq m_0 + 1$, обладающих свойством

$$\text{dist}(\tilde{\sigma}'_{m_0}, \sigma'_{m_0}) \leq 4\|B\|_*, \quad (11)$$

$$\text{dist}(\tilde{\sigma}_n, \tilde{\sigma}_n^0) \leq 2\|P_n B\|_* \|B\|_* \|\alpha_{n-1}\|_{l_2(\mathbb{Z})}, \quad n \geq m_0 + 1, \quad (12)$$

где $\tilde{\sigma}_n^0 = \sigma((\lambda_n P_n - P_n B)|_{H_n})$.

Доказательство. Поскольку

$$H = H'_{m_0} \oplus \left(\bigoplus_{n=m_0+1}^{\infty} H_n \right),$$

спектр $\sigma(A - J_{m_0}X_0)$ оператора $A - J_{m_0}X_0$ содержит спектр оператора $(AP'_{m_0} - P'_{m_0}X_0)|_{H'_{m_0}}$ и каждого из операторов $(A_n - P_nX_0)|_{H_n}$, действующих в H_n , $n \geq m_0 + 1$. Поскольку выполнены условия теоремы 3.2, то оператор $A - B$ подобен оператору вида $A - J_{m_0}X_0$, где X_0 — решение нелинейного уравнения (3). Воспользовавшись равенством (9), где

$$A - J_{m_0}X_0 = A - P'_{m_0}X_0P'_{m_0} - \sum_{i=m_0+1}^{\infty} P_iX_iP_i,$$

получаем

$$\begin{aligned} \sigma(A - B) &= \sigma(A - J_{m_0}X_0) = \\ &= \sigma\left((AP'_{m_0} - P'_{m_0}X_0)|_{H'_{m_0}}\right) \cup \left(\bigcup_{n \geq m_0+1} \sigma\left((\lambda_n I_n - P_nX_0)|_{H_n}\right)\right) = \tilde{\sigma}'_{m_0} \cup \left(\bigcup_{n=m_0+1}^{\infty} \tilde{\sigma}_n\right) \end{aligned} \quad (13)$$

для всех m_0 , удовлетворяющих оценке (8), где

$$\tilde{\sigma}'_{m_0} = \sigma\left((AP'_{m_0} - P'_{m_0}X_0)|_{H'_{m_0}}\right), \quad \tilde{\sigma}_n = \sigma\left((\lambda_n I_n - P_nX_0)|_{H_n}\right).$$

Эти множества взаимно не пересекаются.

Теперь получим оценку (11). Учитывая оценки в теореме 2.1, заключаем, что имеет место оценка

$$\text{dist}(\tilde{\sigma}'_{m_0}, \sigma'_{m_0}) \leq \|P'_{m_0}X_0P'_{m_0}\| \leq \|X_0\| \leq 4\|B\|_*.$$

Для получения оценок множеств $\tilde{\sigma}_n$, $n \geq m_0 + 1$, для каждого $n > m_0$ будем рассматривать свою допустимую тройку $(\mathfrak{A}, J_n, \Gamma_n)$; поскольку $n \geq m_0 + 1$, то имеет место утверждение теоремы 3.2 с последующими равенствами (13), где вместо m_0 берется n . Операторы $\lambda_n P_n - P_n X_0 P_n$, $n \geq m_0 + 1$, представим в виде

$$\lambda_n P_n - P_n X_0 P_n = \lambda_n P_n - P_n B P_n - P_n (X_0 - B) P_n, \quad n > m_0. \quad (14)$$

Такое представление позволяет получить оценки

$$\text{dist}(\tilde{\sigma}_n, \sigma((\lambda_n I_n - P_n X_0)|_{H_n})) \leq \|P_n (X_0 - B) P_n\|, \quad n \geq m_0 + 1.$$

Далее, имеют место равенства, вытекающие после применения слева и справа в (3) операторов P_n , $n \geq m_0 + 1$:

$$P_n (X_0 - B) P_n = P_n B \Gamma_{n-1} (X_0 P_n), \quad n \geq m_0 + 1.$$

При этом учитывались равенства $P_n (\Gamma_{n-1} X_0) (J_{n-1} X_0) P_n = 0$, $n \geq m_0 + 1$. Итак, получаем следующую оценку:

$$\|P_n (X_0 - B) P_n\| \leq \|P_n B \Gamma_{n-1} (X_0 P_n)\| \leq \|P_n B\| \|\Gamma_{n-1} (X_0 P_n)\|, \quad n \geq m_0 + 1.$$

Представим операторы $\Gamma_{n-1} (X_0 P_n)$, $n \geq m_0 + 1$ в виде

$$\Gamma_{n-1} (X_0 P_n) = \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq n}}^{\infty} \frac{P_i X_0 P_n}{\lambda_i - \lambda_n}.$$

Тогда получаем оценки

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{n-1}(X_0 P_n)\| &\leq \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq n}}^{\infty} \frac{\|P_i X_0 P_n\|}{|\lambda_i - \lambda_n|} \leq \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq n}}^{\infty} \frac{\|X_0(i-n)\|}{|\lambda_i - \lambda_n|} \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \|X_0(k)\|^2} \sqrt{\sum_{\substack{i=1, \\ i \neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_i - \lambda_n|^2}} \leq \frac{1}{2} \|X_0\|_* \|\alpha_{n-1}\|_{l_2(\mathbb{Z})}, \quad n \geq m_0 + 1. \end{aligned}$$

Вводя обозначение $\tilde{\sigma}_n^0 = \sigma((\lambda_n P_n - P_n B)|_{H_n})$ из равенства (11) получаем оценку

$$\text{dist}(\tilde{\sigma}_n, \tilde{\sigma}_n^0) \leq \|P_n B \Gamma_{n-1}(X_0 P_n)\| \leq \|P_n B\|_* \|\Gamma_{n-1}(X_0 P_n)\| \leq \frac{1}{2} \|P_n B\|_* \|X_0\|_* \|\alpha_{n-1}\|_{l_2(\mathbb{Z})}.$$

Учитывая полученные соотношения, а также (8), получаем оценки

$$\text{dist}(\tilde{\sigma}_n, \tilde{\sigma}_n^0) \leq 2 \|P_n B\|_* \|B\|_* \|\alpha_{n-1}\|_{l_2(\mathbb{Z})}, \quad n \geq m_0 + 1. \quad \square$$

4. Применение к дифференциальным операторам с периодическими краевыми условиями. Будем рассматривать в гильбертовом пространстве $L_2(0, 2\pi)$ суммируемых с квадратом функций со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_0^{2\pi} x(t) \bar{y}(t) dt$$

дифференциальный оператор

$$A - B : D(A) \subset L_2(0, 2\pi) \rightarrow L_2(0, 2\pi), \quad A - B = -\frac{d^2}{dt^2} - q$$

в случае периодических краевых условий

$$x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi). \quad (15)$$

Для изучения оператора будем использовать полученные в предыдущем разделе результаты, взяв в качестве невозмущенного самосопряженный оператор

$$A : D(A) \subset L_2(0, 2\pi) \rightarrow L_2(0, 2\pi), \quad A = -\frac{d^2}{dt^2}.$$

Область определения $D(A)$ оператора A совпадает с пространством Соболева $W_2^2[0, 2\pi]$ непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, производная которых x' абсолютно непрерывна и $x'' \in L_2(0, 2\pi)$. Таким образом,

$$D(A) = \left\{ x : x \in W_2^2[0, 2\pi], x(0) = x(2\pi), x'(0) = x'(2\pi) \right\}.$$

Оператор $B : D(A) \subset L_2(0, 2\pi) \rightarrow L_2(0, 2\pi)$ является оператором умножения на функцию q , принадлежащую пространству $L_2(0, 2\pi) \setminus L_\infty(0, 2\pi)$, т.е. B не допускает ограниченное расширение на $L_2(0, 2\pi)$. Итак, B — неограниченный оператор. Известно, что спектр оператора A имеет вид

$$\sigma(A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma_n,$$

где $\sigma_n = \{n^2\}$, $n \geq 0$. При этом собственное значение $\lambda_0 = 0$ является однократным собственным значением, а $\lambda_n = n^2$, $n \geq 1$, — собственными значениями кратности 2.

Ортонормированные собственные функции $e_n(t) = (\sqrt{2\pi})^{-1} e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, 2\pi]$, образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2(0, 2\pi)$, причем $Ae_0 = 0$, $Ae_n = n^2 e_n$, $|n| \geq 1$. Проекторы Рисса P_n , $n \geq 0$, построенные по этому базису, определяются равенствами

$$P_0 x = (x, e_0) e_0, \quad P_n x = (x, e_n) e_n + (x, e_{-n}) e_{-n}, \quad n \geq 1, \quad x \in L_2(0, 2\pi).$$

Оператор B будет принадлежать построенному в разделе 3 пространству возмущений $\mathfrak{A}$, если будут выполнены соотношения

$$\sup_{\substack{m-k=n, \\ m,k \geq 1}} \|P_m B P_k\| = M(n) < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} M^2(n) < \infty.$$

Проверим выполнение этих свойств. Операторы $P_m B P_k$, $m, k \geq 1$, имеют вид

$$\begin{aligned} P_m B P_k x &= (B P_k x, e_m) e_m + (B P_k x, e_{-m}) e_{-m} = \\ &= \left((x, e_k) (B e_k, e_m) + (x, e_{-k}) (B e_{-k}, e_m) \right) e_m + \left((x, e_k) (B e_k, e_{-m}) + (x, e_{-k}) (B e_{-k}, e_{-m}) \right) e_{-m}, \end{aligned}$$

где

$$(B e_k, e_m) = (q e_k, e_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t) e^{-i(m-k)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (q, e_{m-k}), \quad (q, e_{m-k}) = \hat{q}(m-k)$$

— коэффициенты Фурье функции q по ортонормированному базису (e_n) . Таким образом, операторы $P_m B P_k$, $m, n \geq 1$, допускают представление вида

$$\begin{aligned} P_m B P_k x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left((x, e_k) \hat{q}(m-k) + (x, e_{-k}) \hat{q}(m+k) \right) e_m + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left((x, e_k) \hat{q}(-(m+k)) + (x, e_{-k}) \hat{q}(-(m-k)) \right) e_{-m}. \end{aligned}$$

Представления для блоков вида $P_0 B P_0$, $P_0 B P_m$, $P_m B P_0$ имеют вид

$$\begin{aligned} P_0 B P_0 x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (x, e_0) \hat{q}(0) e_0, \\ P_0 B P_m x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left((x, e_m) \hat{q}(-m) + (x, e_{-m}) \hat{q}(m) \right) e_0, \\ P_m B P_0 x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (x, e_0) \left(\hat{q}(m) e_m + \hat{q}(-m) e_{-m} \right). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает оценка

$$\|P_m B P_k x\|^2 = \frac{1}{2\pi} \left(|\hat{q}(m-k)|^2 + |\hat{q}(m+k)|^2 + |\hat{q}(-(m+k))|^2 + |\hat{q}(-(m-k))|^2 \right) \|x\|^2.$$

Следовательно, имеют место оценки

$$\|P_m B P_k\| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(|\hat{q}(m-k)|^2 + |\hat{q}(m+k)|^2 + |\hat{q}(-(m+k))|^2 + |\hat{q}(-(m-k))|^2 \right)^{1/2}.$$

Так как $q \in L_2(0, 2\pi)$, то

$$\|q\| = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{q}(n)|^2 \right)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|B\|_* &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|B(n)\|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{\substack{m-k=n, \\ m,k \geq 1}} \left(|\hat{q}(m-k)|^2 + |\hat{q}(m+k)|^2 + \right. \\ &\quad \left. + |\hat{q}(-(m+k))|^2 + |\hat{q}(-(m-k))|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \|q\|. \end{aligned}$$

Из полученных оценок следует, что оператор B принадлежит допустимому пространству возмущений $\mathfrak{A}$, которое строится по системе ортопроекторов (P_n) .

Для собственных значений рассматриваемого оператора A имеем $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. выполнено соотношение (3), а значит, и условия (1) и (2) на последовательность $\alpha_m(n)$. Кроме того, последовательность $\alpha_m(n)$ имеет вид $\alpha_m(n) = (m^2 - n^2)^{-1}$. Тогда

$$\|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})}^2 = \sum_{n \neq m} (m^2 - n^2)^{-1} = \frac{\pi^2}{4m^2} - \frac{3}{8m^4}$$

и, следовательно, $\|\alpha_m\|_{l_2(\mathbb{Z})} \leq \pi/(2m)$. Поэтому выполняются условия теоремы 3.2, а следовательно, и теоремы 3.3. Спектр оператора $A - B = -d^2/dt^2 - q$ может быть представлен в виде

$$\sigma\left(-\frac{d^2}{dt^2} - q\right) = \{\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{2m_0}\} \cup \{\tilde{\lambda}_{\pm n}, n \geq m_0 + 1\}.$$

Найдем асимптотику этого спектра. Для получения оценок собственных значений оператора $A - B$ представим подобный ему оператор $A - J_{m_0}X_0$ в виде (14); при этом

$$P_n B P_n x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left((x, e_n) \hat{q}(0) + (x, e_{-n}) \hat{q}(2n) \right) e_n + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left((x, e_n) \hat{q}(-2n) + (x, e_{-n}) \hat{q}(0) \right) e_{-n},$$

где

$$\hat{q}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} q(t) dt.$$

Таким образом, оператору $(n^2 P_n - P_n B)|_{H_n}$ отвечает в базисе $e_n e_{-n}$ пространства H_n матрица вида

$$\begin{pmatrix} n^2 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(0) & -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(-2n) \\ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(2n) & n^2 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(0) \end{pmatrix}, \quad n > m_0.$$

Ее спектр $\tilde{\sigma}_n^0 = \sigma((n^2 P_n - P_n B)|_{H_n})$ имеет вид

$$n^2 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(0) \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(2n) \hat{q}(-2n)}.$$

Имеют место следующие оценки:

$$\left| \tilde{\lambda}_{\pm n} - n^2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(0) \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(2n) \hat{q}(-2n)} \right| \leq 2 \|P_n B\|_* \|B\|_* \|\alpha_n\|_{l_2(\mathbb{Z})}.$$

Теорема 4.1. *Существует такое число m_0 , что при $n > m_0$ собственные значения дифференциального оператора $-d^2/dt^2 - q$, определяемого краевыми условиями (15), допускают следующие оценки:*

$$\left| \tilde{\lambda}_{\pm n} - n^2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(0) \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{q}(2n) \hat{q}(-2n)} \right| \leq \frac{8}{n} \|q\|^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. — Воронеж: ВГУ, 1987.
2. Баскаков А. Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов // Сиб. мат. ж. — 1987. — 24, № 1. — С. 21–39.
3. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — 75, № 3. — С. 3–28.
4. Гаркавенко Г. В. О диагонализации некоторых классов линейных операторов // Изв. вузов. Мат. — 1994. — № 11. — С. 14–19.
5. Гаркавенко Г. В. Спектральный анализ возмущенных самосопряженных операторов с дискретным спектром // в кн.: Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — Воронеж, 2017. — С. 101–104.

6. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств разностного оператора с растущим потенциалом// Сиб. электр. мат. изв. — 2017. — 14. — С. 673–689.
7. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Спектральный анализ одного класса разностных операторов с растущим потенциалом// Изв. Саратов. ун-та. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2016. — 16, № 4. — С. 395–402.
8. *Garkavenko G. V., Zgolich A. R., Uskova N. B.* Spectral analysis of a difference operator with a growing potential// J. Phys. Conf. Ser. — 2018. — 973, № 1. — 012053.

Гаркавенко Галина Валериевна

Воронежский государственный педагогический университет

E-mail: g.garkavenko@mail.ru