Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Волосивец, Б. И. Голубов, Дробные модифицированные операторы Харди и Харди—Литтлвуда в пространствах Морри—Герца и их коммутаторы в весовых пространствах, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 171, 70–77

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-171-70-77>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 12:33:43

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 171 (2019). С. 70–77
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-171-70-77

УДК 517.518.13

ДРОБНЫЕ МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ОПЕРАТОРЫ
ХАРДИ И ХАРДИ—ЛИТТЛВУДА
В ПРОСТРАНСТВАХ МОРРИ—ГЕРЦА
И ИХ КОММУТАТОРЫ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2019 г. С. С. ВОЛОСИВЕЦ, Б. И. ГОЛУБОВ

Аннотация. В работе получены достаточные условия ограниченности модифицированных дробных операторов Харди—Литтлвуда и Харди из одного модифицированного пространства Морри—Герца в другое. Изучается также ограниченность коммутаторов этих операторов из одного весового пространства со степенным весом в другое.

Ключевые слова: дробный оператор Харди—Литтлвуда, дробный оператор Харди, модифицированное пространство Морри—Герца, весовое пространство L^q , коммутатор.

MODIFIED HARDY AND HARDY—LITTLEWOOD
FRACTIONAL OPERATORS IN MORREY—HERZ SPACES
AND THEIR COMMUTATORS IN WEIGHTED SPACES

© 2019 S. S. VOLOSIVETS, B. I. GOLUBOV

ABSTRACT. In this paper, we obtain sufficient conditions of the boundedness of modified fractional Hardy—Littlewood and Hardy operators from one modified Morrey—Herz space to another. We also study the boundedness of commutators of these operators from one weighted space with a power weight to another.

Keywords and phrases: Hardy—Littlewood fractional operator, Hardy fractional operator, modified Morrey—Herz space, weighted space L^q , commutator.

AMS Subject Classification: 44A15, 42B35

1. Введение. Пусть $P = \{p_n\}_{n=1}^\infty$ — такая последовательность натуральных чисел, что $2 \leq p_n \leq N$, $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$ и $p_{-n} = p_n$, $m_{-n} = m_n^{-1}$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое число $x \in \mathbb{R}_+$ записывается в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{-n} m_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \quad x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_i), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (1)$$

Здесь первая сумма конечна и для $x = l/m_k$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{Z}$, мы выбираем разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Для $x \in [m_{n-1}, m_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, положим $|x|_P = m_n$ и $|0|_P = 0$; тогда для всех $x \in \mathbb{R}_+$ имеем $N^{-1}|x|_P \leq x \leq |x|_P$. Для x, y , записанных в виде (1), по определению

$$x \oplus y = z := \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} m_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{m_n},$$

где $x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $z_n = x_n + y_n \pmod{p_n}$. В случае, когда $z_n = p_n - 1$ при $n \geq n_0$ (это возможно для счетного числа y при фиксированном x), считаем, что $x \oplus y$ не определено. Для функций из используемых ниже классов это не существенно. Аналогично определяется $x \ominus y$ (подробнее см. [2, § 1.5]). Легко видеть, что для $\alpha > 0$ и $n \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k=n}^{\infty} m_k^{-\alpha} \leq C m_n^{-\alpha}, \quad \sum_{k=-\infty}^n m_k^{\alpha} \leq C m_n^{\alpha}. \quad (2)$$

Классические операторы Харди и Харди—Литтлвуда для функций f , определенных на $\mathbb{R}_+$, задаются формулами

$$\mathcal{H}(f)(x) = \int_x^{\infty} t^{-1} f(t) dt, \quad \mathcal{B}(f)(x) = x^{-1} \int_0^x f(t) dt$$

соответственно. Известно, что первый оператор ограничен в $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, а второй — в $L^p(\mathbb{R}_+)$ при $1 < p \leq \infty$ (см. [5, теоремы 327 и 328]). В ряде работ изучались дробные операторы Харди и Харди—Литтлвуда (см., например, [7]).

Можно рассмотреть оператор

$$\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)(x) = |x|_{\mathbf{P}}^{-1} \int_{|t|_{\mathbf{P}} \leq |x|_{\mathbf{P}}} f(t) dt$$

и сопряженный к нему

$$\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)(x) = \int_{|t|_{\mathbf{P}} \geq |x|_{\mathbf{P}}} |t|_{\mathbf{P}}^{-1} f(t) dt,$$

называемые модифицированными операторами Харди—Литтлвуда и Харди соответственно. В случае $p_i \equiv 2$ такие операторы ввел Б. И. Голубов (см. [3, 4]), который также доказал тождества типа Титчмарша для этих операторов и $\mathbf{P}$ -ичного преобразования Фурье, а также ограниченность $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ в двоичных пространствах BMO и VMO на полупрямой и ограниченность $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$ в двоичном пространстве Харди на $\mathbb{R}_+$. На случай произвольной ограниченной последовательности $\mathbf{P}$ эти результаты перенес С. С. Волосивец (см. [12]). Ряд свойств модифицированных операторов Харди—Литтлвуда и Харди в пространствах Гельдера—Бесова, локальных пространствах bmo , vmo и пространствах Харди был установлен в [1]; там же было установлено, что удобно изучать действие указанных модифицированных операторов в $\mathbf{P}$ -ичных пространствах Герца; в частности, оператор $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ ограничен в $K_r^{\alpha, q}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ при $\alpha < 1 - 1/r$ и это свойство нарушается при $\alpha = 1 - 1/r$; аналогичное свойство верно для $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Тогда по определению

$$|\mathbf{x}|_{\mathbf{P}} := \max(|x_1|_{\mathbf{P}}, \dots, |x_n|_{\mathbf{P}}),$$

$$B_k(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}|_{\mathbf{P}} \leq m_k\}, \quad S_k(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}|_{\mathbf{P}} = m_k\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Через B_k и S_k обозначаем $B_k(\mathbf{0})$ и $S_k(\mathbf{0})$, где $\mathbf{0}$ — нуль $\mathbb{R}^n$. Ясно, что

$$|B_k(\mathbf{a})| = m_k^n, \quad |S_k(\mathbf{a})| = m_k^n - m_{k-1}^n,$$

где $|\cdot|$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Будем рассматривать дробные операторы типа Харди—Литтлвуда и Харди

$$B_{\beta}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}^{\beta-n} \int_{|t|_{\mathbf{P}} \leq |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}} f(t) dt, \quad H_{\beta}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) = \int_{|t|_{\mathbf{P}} \geq |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}} |t|_{\mathbf{P}}^{\beta-n} f(t) dt$$

при $0 \leq \beta \leq n$ и, для $b \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^N)$, их коммутаторы

$$B_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}) B_{\beta}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) - B_{\beta}(\mathbf{P}, bf)(\mathbf{x}),$$

$$H_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}) H_{\beta}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) - H_{\beta}(\mathbf{P}, bf)(\mathbf{x}).$$

Далее, пусть X_E обозначает индикатор множества E , а также $\alpha \in \mathbb{R}$, $q, r \in (0, \infty)$. Будем говорить, что функция $f \in L^r_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$ принадлежит *пространству Герца* $K_r^{\alpha, q}(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+)$, если

$$\|f\|_{K_r^{\alpha, q}} := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k^{\alpha q} \|f X_{S_k}\|_r^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Здесь, как обычно,

$$\|f\|_r = \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |f(\mathbf{t})|^r d\mathbf{t} \right)^{1/r}, \quad 0 < r < \infty,$$

— норма или квазинорма в пространстве $L^r(\mathbb{R}^n_+) = K_r^{0, r}(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+)$. Пространство Герца было введено К. Герцем (см. [10]), а его модификация для групп Виленкина, соответствующая нашему определению при $n = 1$ — К. Онневиром (см. [11]). Обобщением пространств Герца являются пространства Морри—Герца (см., например, [6]). Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < q, r < \infty$ и $\lambda > 0$. Тогда пространство Морри—Герца $MK_{q, r}^{\alpha, \lambda}(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+)$ состоит из функций $f \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0})$, для которых

$$\|f\|_{MK_{q, r}^{\alpha, \lambda}} = \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\alpha q} \|f X_{S_k}\|_r^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Пусть $\alpha > 0$. Будем писать $f \in \Lambda_\alpha(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+)$, если

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq C |\mathbf{x} \ominus \mathbf{y}|_{\mathbf{P}}^\alpha, \quad \text{где} \quad |\mathbf{x} \ominus \mathbf{y}|_{\mathbf{P}} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i \ominus y_i|_{\mathbf{P}}$$

и последняя величина существует при заданном $\mathbf{x}$ для всех $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+$, кроме счетного множества. Через $\|f\|_{\Lambda_\alpha}$ мы обозначим $\inf C$, где C удовлетворяет неравенству выше.

Рассмотрим весовую функцию $w(x)$, измеримую и почти всюду положительную на $\mathbb{R}^n_+$. Тогда пространство $L_w^q(\mathbb{R}^n_+)$, $1 \leq q < \infty$, состоит из функций с конечной нормой

$$\|f\|_{q, w} = \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |f(\mathbf{t})|^q w(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right)^{1/q};$$

аналогично определяется пространство $L_w^q(\mathbb{R}^n)$. Введем обозначение $w_\delta(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}^\delta$.

Ясно, что

$$MK_{q, r}^{\alpha, 0}(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+) = K_r^{\alpha, q}(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+), \quad MK_{q, q}^{\alpha/q, 0}(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+) = L_{w_\alpha}^q(\mathbb{R}^n_+).$$

Будем писать $A(t) \asymp B(t)$, если существуют такие постоянные $C_1, C_2 > 0$, что неравенства $C_1 A(t) \leq B(t) \leq C_2 A(t)$ выполняются при всех допустимых значений t .

Целью нашей работы является получение достаточных условий ограниченности операторов $B_\beta(\mathbf{P}, f)$ и $H_\beta(\mathbf{P}, f)$, действующих из одного модифицированного пространства Морри—Герца в другое. Изучается также ограниченность коммутаторов этих операторов, действующих из одного весового пространства со степенным весом в другое. В p -адическом случае некоторые близкие к данной работе результаты можно найти в статье Г. Гао и Й. Чжуна (см. [9]).

2. Вспомогательные утверждения. Пусть

$$|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|_{\mathbb{R}^n} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $B(|\mathbf{x}|) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}|\}$, $u(x)$, $v(x)$ — неотрицательные локально интегрируемые функции на $\mathbb{R}^n$. Следующие две леммы установлены в [8].

Лемма 2.1. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$. Неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|\mathbf{x}|)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)^q v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/p} \quad (3)$$

справедливо для любой измеримой неотрицательной функции $f(\mathbf{x})$ при некоторой постоянной $C > 0$ тогда и только тогда, когда

$$A := \sup_{t>0} \left(\int_{|\mathbf{x}| \geq t} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/q} \left(\int_{|\mathbf{x}| \leq t} u^{1-p'}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/p'} < \infty. \quad (4)$$

Лемма 2.2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$. Неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|\mathbf{x}|)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right]^q v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/p} \quad (5)$$

справедливо для любой измеримой неотрицательной функции $f(\mathbf{x})$ при некоторой постоянной $C > 0$ тогда и только тогда, когда

$$B := \sup_{t>0} \left(\int_{|\mathbf{x}| \leq t} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/q} \left(\int_{|\mathbf{x}| \geq t} u^{1-p'}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/p'} < \infty. \quad (6)$$

Следствие 2.1. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $u(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^\gamma =: w_\gamma(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x}) = w_\delta(\mathbf{x})$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Тогда неравенство (3) для неотрицательных функций $f \in L_u^p(\mathbb{R}_+^n)$ выполняется при

$$\frac{\gamma}{p} = \frac{\delta}{q} + n \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \quad (7)$$

и $\delta > -n$, а неравенство (5) имеет место при условии (7) и $\delta < -n$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\int_{B(|\mathbf{x}|)} |\mathbf{t}|^\gamma d\mathbf{t} \asymp |\mathbf{x}|^{\gamma+n}, \quad \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|\mathbf{x}|)} |\mathbf{t}|^\gamma d\mathbf{t} \asymp |\mathbf{x}|^{\gamma+n},$$

причем первый интеграл сходится при $\gamma + n > 0$, а второй — при $\gamma + n < 0$. Поэтому выражение под знаком $\sup$ в (4) слабо эквивалентно

$$t^{(\delta+n)/q} t^{((1-p')\gamma+n)/p'} = t^{\delta/q - \gamma/p + n(1/p' + 1/q)}$$

и $A < \infty$ только в случае $\gamma/p = \delta/q + n(1 - 1/p + 1/q)$. При этом $\delta + n > 0$ и $(1 - p')\gamma + n < 0$, т.е. $\gamma > n(p - 1)$, но эти неравенства эквивалентны при выполнении (7). Аналогично разбирается случай неравенства (5). Следствие доказано. $\square$

Следствие 2.2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$. Для $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$, рассмотрим операторы

$$B(f)(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-n} \int_{|\mathbf{t}| \leq |\mathbf{x}|} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad H(f)(\mathbf{x}) = \int_{|\mathbf{x}| \leq |\mathbf{t}|} |\mathbf{t}|^{-n} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

Тогда неравенства

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{x}|^\delta (B(f)(\mathbf{x}))^q d\mathbf{x} \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{x}|^\gamma f^p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/p},$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{x}|^\delta (H(f)(\mathbf{x}))^q d\mathbf{x} \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{x}|^\gamma f^p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/p}$$

с некоторой константой $C > 0$ выполнены соответственно для неотрицательной измеримой функции $f(\mathbf{x})$ при $\delta/q = \gamma/p + n(1/p - 1/q)$, $\delta > n(q-1)$, и при $\delta/q = \gamma/p + n(1/p - 1/q)$, $\gamma < -n$.

Доказательство. В первом случае надо заменить в (7) δ на $\delta - nq$, что дает нам $\gamma/p = \delta/q - n(1/p - 1/q)$ и $\delta - nq + n > 0$, т.е. $\delta > n(q-1)$. Во втором случае в (7) надо заменить γ на $\gamma + np$, откуда также находим, что $\gamma/p = \delta/q - n(1/p - 1/q)$ и $\gamma + np < n(p-1)$, т.е. $\gamma < -n$. Следствие доказано. $\square$

Замечание 2.1. Пусть функция $f(x)$ задана на $\mathbb{R}_+^n$ и

$$B^+(|\mathbf{x}|) = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^n : |\mathbf{t}| \geq |\mathbf{x}|\}.$$

Рассмотрим операторы

$$\mathfrak{B}(f)(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-n} \int_{B^+(|\mathbf{x}|)} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad \mathfrak{H}(f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus B^+(|\mathbf{x}|)} |\mathbf{t}|^{-n} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

Применяя следствие 2.2 к функциям, значения которых совпадают в точках вида $(\pm x_1, \pm x_2, \dots, \pm x_n)$ при любой комбинации знаков $+$ и $-$, получаем, что оператор $\mathfrak{B} : L_{w_\gamma}^p(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow L_{w_\delta}^q(\mathbb{R}_+^n)$ ограничен при $1 < p \leq q < \infty$, $\delta/q = \gamma/p + n(1/p - 1/q)$ и $\delta > n(q-1)$, оператор $\mathfrak{H} : L_{w_\gamma}^p(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow L_{w_\delta}^q(\mathbb{R}_+^n)$ ограничен при $1 < p \leq q < \infty$, $\delta/q = \gamma/p + n(1/p - 1/q)$ и $\gamma < -n$.

3. Основные результаты. Всюду ниже константы $C, C_1, C_2, \dots$ положительны и не зависят от измеримой функции f , заданной на $\mathbb{R}_+^n$.

Теорема 3.1. Пусть $0 < q_1 \leq q_2 < \infty$, $1 < r_1 < r_2 < \infty$, $0 \leq \beta < n$, $1/r_1 - 1/r_2 = \beta/n$ и $\lambda \geq 0$.

(1) Если $\alpha < n/r_1' + \lambda$, то $\|B_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{MK_{q_2, r_2}^{\alpha, \lambda}} \leq C \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}}$.

(2) Если $\alpha > -n/r_2 + \lambda$, то $\|H_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{MK_{q_2, r_2}^{\alpha, \lambda}} \leq C \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}}$.

Доказательство. (1) Согласно определению оператора $B_\beta(\mathbf{P}, f)$ имеем

$$\|B_\beta(\mathbf{P}, f)X_{S_k}\|_{r_2}^{r_2} \leq \int_{S_k} m_k^{r_2(\beta-n)} \left(\sum_{j=-\infty}^k \int_{\tilde{S}_j} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \right)^{r_2} d\mathbf{x} \leq m_k^{r_2(\beta-n)+n} \left(\sum_{j=-\infty}^k \int_{\tilde{S}_j} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \right)^{r_2}.$$

В силу неравенства Гельдера ($1/r_i + 1/r_i' = 1$, $i = 1, 2$) получаем

$$\int_{\tilde{S}_j} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \leq \|f_j\|_{r_1} (m_j^n - m_{j-1}^n)^{1/r_1'} \leq m_j^{n/r_1'} \|f_j\|_{r_1},$$

где $f_j = fX_{S_j}$. Но $\beta - n + n/r_2 = n(\beta/n - 1/r_1 + 1/r_2 - 1/r_1') = -n/r_1'$ по условию, поэтому

$$\|B_\beta(\mathbf{P}, f)X_{S_k}\|_{r_2} \leq m_k^{-n/r_1'} \sum_{j=-\infty}^k m_j^{n/r_1'} \|f_j\|_{r_1}.$$

В силу последней оценки, неравенства $0 < q_1 \leq q_2$ и неравенства Йенсена находим, что

$$\begin{aligned} \|B_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{MK_{q_2, r_2}^{\alpha, \lambda}} &\leq \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\alpha q_2} \left(\sum_{j=-\infty}^k \left(\frac{m_j}{m_k} \right)^{n/r_1'} \|f_j\|_{r_1} \right)^{q_2} \right)^{1/q_2} \leq \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\alpha q_1} \left(\sum_{j=-\infty}^k \left(\frac{m_j}{m_k} \right)^{n/r_1'} \|f_j\|_{r_1} \right)^{q_1} \right)^{1/q_1}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\|f_j\|_{r_1} = m_j^{-\alpha} (m_j^{\alpha q_1} \|f_j\|_{r_1}^{q_1})^{1/q_1} \leq m_j^{\lambda-\alpha} m_j^{-\lambda} \left(\sum_{i=-\infty}^j m_i^{\alpha q_1} \|f_i\|_{r_1}^{q_1} \right)^{1/q_1} \leq m_j^{\lambda-\alpha} \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}} \quad (8)$$

и $\alpha < n/r'_1 + \lambda$, то

$$\begin{aligned} \|B_\beta(\mathbf{P}, f) X_{S_k}\|_{r_2}^{r_2} &\leq \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\lambda q_1} m_k^{(\alpha-\lambda)q_1} \left(\sum_{j=-\infty}^k \left(\frac{m_j}{m_k} \right)^{n/r'_1} m_j^{\lambda-\alpha} \right)^{q_1} \right)^{1/q_1} \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}} = \\ &= \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\lambda q_1} \left(\sum_{j=-\infty}^k \left(\frac{m_j}{m_k} \right)^{\lambda+n/r'_1-\alpha} \right)^{q_1} \right)^{1/q_1} \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}} \leq \\ &\leq C_1 \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\lambda q_1} \right)^{1/q_1} \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}} \leq C_2 \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}}. \end{aligned}$$

Тем самым, утверждение (1) доказано с постоянной $C = C_2$.

(2) Используя определение оператора $H_\beta(\mathbf{P}, f)$, применяя неравенство Гельдера и равенство $\beta - n + n/r'_1 = -n/r_2$, получим

$$\begin{aligned} \|H_\beta(\mathbf{P}, f) X_{S_k}\|_{r_2}^{r_2} &= \int_{S_k} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \int_{S_j} |t|^{\beta-n} f(t) dt \right)^{r_2} dx \leq \\ &\leq m_k^n \left(\sum_{j=k}^{\infty} m_j^{\beta-n} \|f_j\|_{r_1} m_j^{n/r'_1} \right)^{r_2} = \left(\sum_{j=k}^{\infty} m_k^{n/r_2} \|f_j\|_{r_1} m_j^{-n/r_2} \right)^{r_2}. \end{aligned}$$

Применяя определение нормы в пространстве $MK_{q, r}^{\alpha, \lambda}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$, неравенство Иенсена и неравенство (8), находим

$$\begin{aligned} \|H_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{MK_{q_2, r_2}^{\alpha, \lambda}} &\leq \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\alpha q_2} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{m_k}{m_j} \right)^{n/r_2} \|f_j\|_{r_1} \right)^{q_2} \right)^{1/q_2} \leq \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\alpha q_1} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{m_k}{m_j} \right)^{n/r_2} \|f_j\|_{r_1} \right)^{q_1} \right)^{1/q_1} \leq \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\lambda q_1} m_k^{(\alpha-\lambda)q_1} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{m_k}{m_j} \right)^{n/r_2} m_j^{(\lambda-\alpha)} \right)^{q_1} \right)^{1/q_1} \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}} \leq \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\lambda q_1} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{m_k}{m_j} \right)^{n/r_2+\alpha-\lambda} \right)^{q_1} \right)^{1/q_1} \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}} \leq \\ &\leq C_3 \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} (m_s^{\lambda q_1})^{1/q_1} \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}} \leq C_4 \|f\|_{MK_{q_1, r_1}^{\alpha, \lambda}}. \end{aligned}$$

Здесь использованы неравенства (2) и условие $\alpha > -n/r_2 + \lambda$. Тем самым, утверждение (2) доказано с постоянной $C = C_4$. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 3.1 при $\lambda = 0$ вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.1. Пусть $\beta \geq 0$, $0 < q_1 \leq q_2 < \infty$, $1/r_1 - 1/r_2 = \beta/n$, $1 < r_1 < \infty$, $1/r_i + 1/r'_i = 1$, $i = 1, 2$. Тогда справедливы следующие неравенства:

- (1) $\|B_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha, q_2}} \leq C \|f\|_{K_{r_1}^{\alpha, q_1}}$, $\alpha < n/r'_1$;
- (2) $\|H_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha, q_2}} \leq C \|f\|_{K_{r_1}^{\alpha, q_1}}$, $\alpha > -n/r'_2$.

Теорема 3.2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $0 \leq \beta < n$, $\alpha > 0$, $b \in \Lambda_\alpha(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$, β и $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$ связаны равенством $\alpha + \beta + \delta/q = \gamma/p + n(1/p - 1/q)$.

- (1) Если $q(\alpha + \beta) + \delta > n(q - 1)$, то $\|B_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)\|_{q, w_\delta} \leq C \|f\|_{p, w_\gamma}$.
- (2) Если $\gamma < (\alpha + \beta)p - n$, то $\|H_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)\|_{q, w_\delta} \leq C \|f\|_{p, w_\gamma}$.

Доказательство. (1) Пусть $\mathbf{x} \in S_k$. Тогда

$$|B_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x})| = \left| |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}^{\beta-n} \int_{B_k} f(\mathbf{t})(b(\mathbf{x}) - b(\mathbf{t})) d\mathbf{t} \right| \leq m_k^{\beta-n} \sum_{j=-\infty}^k \int_{S_j} |f(\mathbf{t})| \cdot |b(\mathbf{x}) - b(\mathbf{t})| d\mathbf{t}.$$

При $\mathbf{t} \in S_k$ имеем $|\mathbf{x} \ominus \mathbf{t}|_{\mathbf{P}} < m_k$ п.в. на S_k , а при $\mathbf{t} \in S_j$, где $j < k$, верно равенство $|\mathbf{x} \ominus \mathbf{t}|_{\mathbf{P}} = m_k$. Поэтому

$$|B_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x})| \leq m_k^{\beta-n} \sum_{j=-\infty}^k m_k^\alpha \|b\|_{\Lambda_\alpha} \int_{S_j} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \leq m_k^{\alpha+\beta-n} \int_{B_k} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \|b\|_{\Lambda_\alpha}.$$

Далее видим, что

$$\|B_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)\|_{q, w_\delta}^q \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\|b\|_{\Lambda_\alpha} m_k^{\alpha+\beta-n} \int_{B_k} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \right)^q m_k^\delta d\mathbf{x} = \|b\|_{\Lambda_\alpha}^q \int_{\mathbb{R}_+^n} |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}^{q(\alpha+\beta)+\delta} (B_0(\mathbf{P}, |f|))^q d\mathbf{x}.$$

В силу ограниченности $\mathbf{P} = \{p_i\}_{i=1}^\infty$ константой N получаем

$$C_1 |\mathbf{x}|_{\mathbb{R}^n} \leq |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}} \leq C_2 |\mathbf{x}|_{\mathbb{R}^n}, \quad B_0(\mathbf{P}, |f|)(\mathbf{x}) \leq C_3 \mathfrak{B}(|f|)(N\mathbf{x}),$$

где $\mathfrak{B}(|f|)$ определен на $\mathbb{R}_+^n$ в замечании 2.1. Если $\mathbf{y} = N\mathbf{x}$, то для $g \in L_{w_\delta}^q(\mathbb{R}_+^n)$ имеем

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\mathbf{y}|^\delta |g(\mathbf{y})|^q d\mathbf{y} \right)^{1/q} = N^{(\delta+n)/q} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\mathbf{x}|^\delta |g(N\mathbf{x})|^q d\mathbf{x} \right)^{1/q}.$$

Поэтому согласно следствию 2.2 и замечанию 2.1 находим

$$\|B_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)\|_{q, w_\delta}^q \leq C_4 \|b\|_{\Lambda_\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\mathbf{x}|^{q(\alpha+\beta)+\delta} (\mathfrak{B}|f|(\mathbf{x}))^q d\mathbf{x} \right)^{1/q} \leq C_5 \|b\|_{\Lambda_\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}^\gamma |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}$$

при условии $\alpha + \beta + \delta/q = \gamma/p + n(1/p - 1/q)$ и $q(\alpha + \beta) + \delta > n(q - 1)$. Тем самым, утверждение (1) доказано с константой $C = C_5$.

(2) При $\mathbf{x} \in S_k$ имеем

$$|H_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x})| = \left| \sum_{j=k}^\infty \int_{S_j} |\mathbf{t}|_{\mathbf{P}}^{\beta-n} f(\mathbf{t})(b(\mathbf{x}) - b(\mathbf{t})) d\mathbf{t} \right| \leq \|b\|_{\Lambda_\alpha} \left| \sum_{j=k}^\infty m_j^{\beta-n} \int_{S_j} |\mathbf{x} \ominus \mathbf{t}|_{\mathbf{P}}^\alpha |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \right|.$$

Так как $j \geq k$, то $|\mathbf{x} \ominus \mathbf{t}|_{\mathbf{P}} \leq |\mathbf{t}|_{\mathbf{P}} \leq m_j$; поэтому

$$|H_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x})| \leq \|b\|_{\Lambda_\alpha} |H_0(\mathbf{P}, |f|_{w_{\alpha+\beta}})(\mathbf{x})|,$$

$$\|H_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{q,w_\delta}^q \leq \|b\|_{\Lambda_\alpha}^q \int_{\mathbb{R}_+^n} |\mathbf{x}|_P^\delta \left(H_0(\mathbf{P}, |f|w_{\alpha+\beta})(\mathbf{x}) \right)^q d\mathbf{x}.$$

Аналогично доказательству (1) имеем

$$H_0(\mathbf{P}, |f|w_{\alpha+\beta})(\mathbf{x}) \leq C_6 \mathfrak{H}(|f| \cdot |\cdot|_{\mathbb{R}^n}^{\alpha+\beta})(\mathbf{x}/N), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n,$$

где $\mathfrak{H}$ определен в замечании 2.1. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|H_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{q,w_\delta} &\leq C_7 \|b\|_{\Lambda_\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\mathbf{x}|_{\mathbb{R}^n}^\delta (\mathfrak{H})(|f| \cdot |\cdot|_{\mathbb{R}^n}^{\alpha+\beta})^q d\mathbf{x} \right)^{1/q} \\ &\leq C_8 \|b\|_{\Lambda_\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\mathbf{x}|_{\mathbb{R}^n}^{\gamma_1} |f(\mathbf{x})|^p |\mathbf{x}|_{\mathbb{R}^n}^{(\alpha+\beta)p} d\mathbf{x} \right)^{1/p} \leq C_9 \|f\|_{p,w_\gamma}, \end{aligned}$$

где $\gamma = \gamma_1 + (\alpha + \beta)p$ и γ_1 удовлетворяет условию $\gamma_1/p = \delta/q - n(1/p - 1/q)$, откуда $\gamma/p + n(1/p - 1/q) = \alpha + \beta + \delta/q$ при условии $\gamma_1 < -n$, т.е. при $\gamma < (\alpha + \beta)p - n$. Тем самым, утверждение (2) доказано с константой $C = C_9$. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волосивец С. С. Модифицированные операторы Харди и Харди—Литтлвуда и их поведение в различных пространствах // Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — 75, № 1. — С. 29–52.
2. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. — М.: Наука, 1987.
3. Голубов Б. И. О двоичных аналогах операторов Харди и Харди—Литтлвуда // Сиб. мат. ж. — 1999. — 40, № 6. — С. 1244–1252.
4. Голубов Б. И. Об ограниченности двоичных операторов Харди и Харди—Литтлвуда в двоичных пространствах H и BMO // Anal. Math. — 2000. — 26, № 4. — С. 287–298.
5. Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. — М.: ИЛ, 1948.
6. Adams D. R. Morrey Spaces. — Basel: Birkhäuser, 2015.
7. Andersen K. F., Muckenhoupt B. Weighted weak type Hardy inequalities with applications to Hilbert transforms and maximal functions // Stud. Math. — 1982. — 72, № 1. — P. 9–26.
8. Drabek P., Heinig H., Kufner A. Higher-dimensional Hardy inequality // in: General Inequalities (Bandle C., Everitt W. N., et al., eds.). — Basel: Springer, 1997. — P. 3–16.
9. Gao G., Zhong Y. Some estimates of Hardy operators and their commutators on Morrey–Herz spaces // J. Math. Ineq. — 2017. — 11, № 1. — P. 49–58.
10. Herz C. Lipschitz spaces and Bernstein’s theorem on absolutely convergent Fourier transforms // J. Math. Mech. — 1968. — 18, № 4. — P. 283–324.
11. Onneweer C. W. Generalized Lipschitz spaces and Herz spaces on certain totally disconnected groups // in: Martingale Theory in Harmonic Analysis and Banach Spaces/ Lect. Notes Math. — Berlin: Springer-Verlag, 1981. — 939. — P. 106–121.
12. Volosivets S. S. On P -adic analogs of Hardy and Hardy–Littlewood operators // East J. Approx. — 2005. — 11, № 1. — P. 57–72.

Волосивец Сергей Сергеевич
Саратовский государственный университет
E-mail: volosivetssss@mail.ru

Голубов Борис Иванович
Московский физико-технический институт (государственный университет)
E-mail: golubov@mail.mipt.ru