Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. А. Кутерин, А. А. Евтушенко, Устойчивый секвенциальный принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 171, 102–113

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-171-102-113>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:17:37

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 171 (2019). С. 102–113
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-171-102-113

УДК 517.91, 517.977

УСТОЙЧИВЫЙ СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2019 г. Ф. А. КУТЕРИН, А. А. ЕВТУШЕНКО

Аннотация. Работа посвящена выводу условий оптимальности в задаче оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства, понимаемыми как ограничения в гильбертовом пространстве. Основными результатами работы в рассматриваемой задаче оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями являются регуляризованные, устойчивые к ошибкам исходных данных, принцип Лагранжа и поточечный принцип максимума Понтрягина в итерационной форме, представляющие, в свою очередь, конструктивный способ построения минимизирующего приближенного решения в поставленной задаче.

Ключевые слова: оптимальное управление, некорректная задача, двойственная регуляризация, итеративная двойственная регуляризация.

STABLE SEQUENTIAL PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPLE IN OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH PHASE RESTRICTIONS

© 2019 F. A. KUTERIN, A. A. EVTUSHENKO

ABSTRACT. In this paper, we obtain optimality conditions in an optimal control problem with pointwise phase constraints of the equality and inequality types treated as constraints in a Hilbert space. The main results of this work are the regularized, stable under errors of source data, Lagrange principle and the pointwise Pontryagin maximum principle in the iterative form, which, in turn, yield a functional way of constructing a minimizing approximate solution to the problem considered.

Keywords and phrases: optimal control, ill-posed problem, dual regularization, iterative dual regularization.

AMS Subject Classification: 47A52, 93C15

Статья посвящена выводу условий оптимальности в задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений с поточечным фазовым ограничением типа равенства и неравенства. Задачи, совпадающие по форме своих постановок с изучаемой в данной работе, рассматривались во многих публикациях. Весьма полную библиографию, посвященную публикациям по теории принципа максимума в задачах оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений с поточечными фазовыми ограничениями-неравенствами, а также с поточечными регулярными смешанными ограничениями типа равенства и неравенства, можно найти в [1, 2]. Как правило, в этих публикациях предполагается точное задание исходных данных в рассматриваемых задачах. Тем временем, задачам условной оптимизации

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-05-01182, № 19-07-00782).

в целом и, в частности, задачам оптимального управления свойственны различные проявления неустойчивости (см. [3]).

В данной работе предлагается преодолевать неустойчивость или, более общо, некорректность указанных классических условий оптимальности на основе метода двойственной регуляризации (см. [4–8]. Основными результатами работы являются регуляризованные, устойчивые к ошибкам исходных данных, принцип Лагранжа и поточечный принцип максимума Понтрягина в итерационной форме для рассматриваемой задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями. Утверждения, сходные по форме с рассмотренными в данной работе, обсуждались ранее в [9, 10]. Отличие настоящей работы состоит в применении метода итеративной двойственной регуляризации (см. [4, 5]) при построении минимизирующего приближенного решения в поставленной задаче. Как и в [9, 10], задача оптимального управления рассматривается как задача выпуклого программирования с сильно выпуклым функционалом качества, для которой формулируется принцип Лагранжа в итерационной форме. Таким образом формулируются утверждения, которые могут быть названы принципами Лагранжа в задаче оптимального управления. Далее они расшифровываются в терминах задачи оптимального управления, в результате чего получаются устойчивые к ошибкам в исходных данных секвенциальные принципы максимума Понтрягина в итерационной форме.

1. Постановка задачи. Рассматривается выпуклая задача оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства, понимаемыми как ограничения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \equiv L_2(X)$:

$$f^\delta(u) \equiv \int_0^T \left(\langle F^\delta(t)x^\delta[u](t), x^\delta[u](t) \rangle + \langle G^\delta(t)u(t), u(t) \rangle \right) dt \rightarrow \min, \quad (P^\delta)$$

$$g_1^\delta(u)(t) = h^\delta(t), \quad g_2^\delta(u)(t) \leq 0 \quad \text{при п.в. } t \in X, u \in \mathcal{D} \subset L_2(0, T).$$

Здесь $f^\delta : L_2(0, T) \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывный сильно выпуклый функционал с постоянной сильной выпуклости κ , зависящий от δ , $F^\delta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $G^\delta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ — измеримые по Лебегу ограниченные неотрицательно и равномерно по t положительно определенные матрицы, $g_1^\delta(u)(t) \equiv \langle \varphi_1^\delta(t), x^\delta[u](t) \rangle$, $g_2^\delta(u)(t) \equiv \varphi_2^\delta(t, x^\delta[u](t))$, $\varphi_1^\delta, h^\delta \in L_2(X)$ — заданные функции, $\varphi_2^\delta : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — такая непрерывная выпуклая по x при всех $t \in X$ функция, что

$$|\varphi_2^\delta(t, x) - \varphi_2^\delta(t, y)| \leq L_M |x - y| \quad \forall x, y \in S_M^n, \quad (1)$$

где постоянная L_M не зависит от $t \in X$, $\mathcal{D} \subset L_2(0, T)$ — выпуклое замкнутое, возможно неограниченное множество, $X \subset [0, T]$, $X = \text{cl } \overset{\circ}{X}$, $x^\delta[u](t)$, $t \in [0, T]$, — решение задачи Коши

$$\dot{x} = a^\delta(t)x + b^\delta(t)u(t), \quad x(0) = x_0^\delta \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

с измеримыми по Лебегу ограниченными матрицами $a^\delta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $b^\delta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$. Верхний индекс δ в исходных данных задачи (P^δ) означает, что эти данные соответствуют либо ситуации их точного задания ($\delta = 0$), либо являются возмущенными ($\delta > 0$), т.е. задаются с ошибкой, $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое фиксированное число.

Будем считать, что выполняются следующие оценки для отклонений возмущенных исходных данных задачи

$$\begin{aligned} \|F^\delta - F^0\|_{2,(0,T)} &\leq C\delta, \quad \|G^\delta - G^0\|_{2,(0,T)} \leq C\delta, \quad \|h^\delta - h^0\|_{2,X} \leq C\delta, \\ \|\varphi_1^\delta - \varphi_1^0\|_{2,X} &\leq C\delta, \quad |\varphi_2^\delta(t, x) - \varphi_2^0(t, x)| \leq C_M\delta \quad \forall (t, x) \in X \times S_M^n, \\ \|a^\delta - a^0\|_{\infty,(0,T)} &\leq C\delta, \quad \|b^\delta - b^0\|_{\infty,(0,T)} \leq C\delta, \quad |x_0^\delta - x_0^0| \leq C\delta, \end{aligned} \quad (3)$$

где $C, C_M > 0$ не зависят от δ .

При условиях (3) можно показать, что для траекторий системы (2) справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|x^\delta[u]\|_{2,(0,T)} &\leq C_1(1 + \|u\|_{2,(0,T)}), \\ \|x^\delta[u] - x^0[u]\|_{2,(0,T)} &\leq C_1\delta(1 + \|u\|_{2,(0,T)}), \end{aligned} \quad (4)$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от $\delta \in (0, \delta_0]$, $u \in L_2(0, T)$.

Тогда на основании оценок (3) отклонения возмущенных исходных данных от точных, глобальной разрешимости задачи Коши (2) и равномерной по $\delta \in [0, \delta_0]$, $u \in \mathcal{D}$ ограниченности ее решений можно утверждать, что выполняются оценки

$$\begin{aligned} |f^\delta(u) - f^0(u)| &\leq C_2 \delta \quad \forall u \in L_2(0, T), \\ \|g_1^\delta(u) - g_1^0(u)\|_{2,X} &\leq C_2 \delta (1 + \|u\|_{2,(0,T)}) \quad \forall u \in L_2(0, T), \\ \|g_2^\delta(u) - g_2^0(u)\|_{2,X} &\leq C_2 \delta \quad \forall u \in L_2(0, T), \end{aligned} \quad (5)$$

где постоянная $C_2 > 0$ не зависит от $\delta \in (0, \delta_0]$, $u \in L_2(0, T)$.

При определенных условиях на исходные данные задачи (P^δ) ее ограничения можно, естественно, трактовать и как ограничения в $L_\infty(X)$ ($\varphi_1, h \in L_\infty(X)$) и $C(X)$ ($\varphi_1, h \in C(X)$). При этом понятия оптимальности управления в указанных частных случаях эквивалентны понятию оптимальности для случая «тех же» ограничений в $L_2(X)$.

Важнейшим понятием в статье применительно к задаче (P^0) является понятие минимизирующего приближенного решения в смысле Дж. Варги.

Определение 1.1. Минимизирующим приближенным решением в задаче (P^0) будем называть последовательность u^i , $i = 1, 2, \dots$, для которой справедливы соотношения $f^0(u^i) \leq \beta^0 + \delta^i$, $u^i \in \mathcal{D}^{0\epsilon^i}$, для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i , ϵ^i , $i = 1, 2, \dots$, где β^0 — обобщенная нижняя грань, определяемая следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta^0 &\equiv \beta_{+0}^0 \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \beta_\epsilon^0, \quad \beta_\epsilon^0 \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}^{0\epsilon}} f^0(u), \quad \beta_\epsilon^0 \equiv +\infty, \text{ если } \mathcal{D}^{0\epsilon} = \emptyset, \\ \mathcal{D}^{0\epsilon} &\equiv \left\{ u \in \mathcal{D} : \|g_1^0(u) - h^0\|_{2,X} \leq \epsilon, \min_{z \in \mathcal{H}_-} \|g_2^0(u) - z\|_{2,X} \leq \epsilon \right\}, \quad \epsilon \geq 0, \\ \mathcal{H}_- &\equiv \{ z \in \mathcal{H} : z(t) \leq 0 \text{ при п.в. } t \in X \}, \quad \mathcal{D}^{00} \equiv \mathcal{D}^0. \end{aligned}$$

В общей ситуации из включения $\mathcal{D}^{00} \subset \mathcal{D}^{0\epsilon}$ следует неравенство $\beta^0 \leq \beta_\epsilon^0$, где β_ϵ^0 — классическое значение задачи. Но в случае поставленной выше задачи (P^0) имеет место равенство $\beta^0 = \beta_\epsilon^0$.

Единственное в силу сильной выпуклости функционала f^0 решение задачи (P^0) будем обозначать $u^0 \equiv \min_{u \in \mathcal{D}^0} f^0(u)$. Очевидно, задача (P^0) заведомо разрешима, если $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$.

Введем регулярный функционал Лагранжа

$$L^\delta(u, \lambda, \mu) \equiv f^\delta(u) + \langle \lambda, g_1^\delta(u) - h^\delta \rangle + \langle \mu, g_2^\delta(u) \rangle,$$

вогнутый двойственный функционал

$$V^\delta(\lambda, \mu) \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}} L^\delta(u, \lambda, \mu), \quad \lambda \in \mathcal{H}, \quad \mu \in \mathcal{H},$$

и соответствующую двойственную задачу

$$V^\delta(\lambda, \mu) \rightarrow \sup, \quad (\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+. \quad (6)$$

В силу сильной выпуклости f^δ двойственный функционал V^δ определен и конечен для любого элемента $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$; при этом его значение $V^\delta(\lambda, \mu)$ достигается на единственном элементе $u^\delta[\lambda, \mu] \equiv \operatorname{argmin}_{u \in \mathcal{D}} L^\delta(u, \lambda, \mu)$ при $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, где $\mathcal{H}_+ \equiv \{ z \in L_2(X) : z(t) \geq 0 \text{ при п.в. } t \in X \}$.

Используя априорные оценки (3), а также вытекающие из них оценки (4) и (5), можно показать, что для любых двух пар $(\lambda^1, \mu^1), (\lambda^2, \mu^2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ справедливо неравенство

$$\|u^\delta[\lambda^1, \mu^1] - u^\delta[\lambda^2, \mu^2]\| \leq \frac{K}{\kappa} \|(\lambda^1, \mu^1) - (\lambda^2, \mu^2)\|, \quad (7)$$

где $\kappa, K > 0$ — некоторые положительные числа, не зависящие от δ .

Приведем также формулу для супердифференциала (в смысле выпуклого анализа) вогнутого функционала значений V^δ . Доказательство леммы, полностью аналогичной приводимой ниже лемме, может быть найдено в [5, лемма 2]. Для удобства введем обозначение

$$\mathfrak{F}^\delta(\lambda, \mu) \equiv \left(g_1^\delta(u^\delta[\lambda, \mu]) - h^\delta, g_2^\delta(u^\delta[\lambda, \mu]) \right).$$

Лемма 1.1. Для супердифференциала $\partial V^\delta(\lambda, \mu)$ функционала V^δ в каждой точке $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ справедливо включение

$$\mathfrak{F}^\delta(\lambda, \mu) \in \partial V^\delta(\lambda, \mu), \quad (\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+.$$

В каждой внутренней точке $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ супердифференциал функционала V^δ непрерывен и совпадает с его производной Фреше при $\delta \geq 0$

$$\partial V^\delta(\lambda, \mu) = \mathfrak{F}^\delta(\lambda, \mu).$$

На основании оценок (3), (4) и (5) могут быть доказаны неравенства

$$\|u^\delta[\lambda, \mu] - u^0[\lambda, \mu]\| \leq C\sqrt{\delta}(1 + \|(\lambda, \mu)\|), \quad (8)$$

$$\|\mathfrak{F}^\delta(\lambda, \mu) - \mathfrak{F}^0(\lambda, \mu)\| \leq C_1\sqrt{\delta}(1 + \|(\lambda, \mu)\|) \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+ \quad (9)$$

с не зависящими от δ , $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ постоянными $C, C_1 > 0$.

2. Метод двойственной регуляризации. Обозначим через $(\lambda^{\delta, \alpha}, \mu^{\delta, \alpha})$ единственное решение задачи максимизации

$$R^{\delta, \alpha}(\lambda, \mu) \equiv V^\delta(\lambda, \mu) - \alpha (\|\lambda\|^2 + \|\mu\|^2) \rightarrow \max, \quad (\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+. \quad (10)$$

Пусть выполняется условие согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0.$$

В этом случае можно утверждать, что в случае разрешимости при $\delta = 0$ двойственной задачи (6) имеет место сходимость $(\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}) \rightarrow (\lambda^0, \mu^0)$, $\delta \rightarrow 0$, где через (λ^0, μ^0) обозначено ее минимальное по норме решение.

Именно из элементов $u^\delta[\lambda, \mu]$ при $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ ниже конструируются устойчивым образом минимизирующие приближенные решения в исходной задаче (P^0) , ограничения которой понимаются в $\mathcal{H}$. Одновременно в терминах минимизирующих приближенных решений формулируются и различные версии устойчивых секвенциальных принципа Лагранжа в недифференциальной форме и принципа максимума Понтрягина, представляющие собою утверждения об устойчивой аппроксимации решений задачи точками минимума ее регулярного функционала Лагранжа или, что в данном случае одно и то же, управлениями, удовлетворяющими принципу максимума Понтрягина.

В [10] доказано (для более общего случая) следующее утверждение.

Теорема 2.1. Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, существует такой элемент $u^\delta[\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}]$, что при $\delta \rightarrow 0$ выполняются предельные соотношения

$$\begin{aligned} \alpha(\delta) \|(\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)})\| &\rightarrow 0, \quad f^0(u^\delta[\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}]) \rightarrow f^0(u^0), \\ g_1^0(u^\delta[\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}]) - h^0 &\rightarrow 0, \quad g_2^0(u^\delta[\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}]) \leq \phi(\delta), \quad \phi(\delta) \geq 0, \quad \|\phi(\delta)\| \rightarrow 0, \\ \langle (\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}), \mathfrak{F}^\delta(\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}) \rangle &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Приведем также «след» этой теоремы, получаемый при формальном занулении величины ошибки в исходных данных. При этом будем использовать обозначение $(\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}) = (\lambda^\alpha, \mu^\alpha)$.

Теорема 2.2. Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, существует такой элемент $u^0[\lambda^\alpha, \mu^\alpha]$, что

$$\begin{aligned} f^0(u^0[\lambda^\alpha, \mu^\alpha]) &\rightarrow f^0(u^0), \quad \alpha \rightarrow 0, \\ g_1^0(u^0[\lambda^\alpha, \mu^\alpha]) - h^0 &\rightarrow 0, \quad g_2^0(u^0[\lambda^\alpha, \mu^\alpha]) \leq \phi(\alpha), \quad \phi(\alpha) \geq 0, \quad \|\phi(\alpha)\| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \\ \langle (\lambda^\alpha, \mu^\alpha), \mathfrak{F}^0(\lambda^\alpha, \mu^\alpha) \rangle &\rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В силу сильной выпуклости функционала f^0 справедливо также предельное соотношение

$$\|u^0[\lambda^\alpha, \mu^\alpha] - u^0\| \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0.$$

3. Устойчивый секвенциальный принцип Лагранжа в недифференциальной форме.

Как следствие теоремы 2.1, приведем сформулированные в [10] необходимые и достаточные условия существования минимизирующего приближенного решения в задаче (P^0) , названные в [10] устойчивым секвенциальным принципом Лагранжа в недифференциальной форме в этой задаче и одновременно, так как мы имеем дело лишь с регулярной функцией Лагранжа, устойчивой секвенциальной теоремой Куна—Таккера в недифференциальной форме.

Теорема 3.1. *Для существования в задаче (P^0) минимизирующего приближенного решения, в независимости от фактов существования или несуществования решения двойственной к ней задачи, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность двойственных переменных $(\lambda^k, \mu^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \dots$, что $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, и выполнялись предельные соотношения*

$$u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] \in \mathcal{D}^{0\epsilon^k}, \quad \epsilon^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (12)$$

$$\langle (\lambda^k, \mu^k), \mathfrak{F}^{\delta^k}(\lambda^k, \mu^k) \rangle \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (13)$$

для некоторых элементов $u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$. При этом последовательность $u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$, $k = 1, 2, \dots$, является искомым минимизирующим приближенным решением, и каждая его слабая предельная точка есть решение задачи (P^0) . В качестве последовательности (λ^k, μ^k) , $k = 1, 2, \dots$ может быть взята последовательность $(\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}, \mu^{\delta^k, \alpha(\delta^k)})$, генерируемая методом двойственной регуляризации теоремы 2.1. В случае разрешимости двойственной к (P^0) задачи последовательность $(\lambda^k, \mu^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \dots$, следует считать ограниченной. Как следствие предельных соотношений (12), (13), выполняется и предельное соотношение

$$V^0(\lambda^k, \mu^k) \rightarrow \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} V^0(\lambda, \mu). \quad (14)$$

Одновременно каждая слабая предельная точка последовательности $(\lambda^k, \mu^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \dots$ (если таковая существует), является решением двойственной задачи $V^0(\lambda, \mu) \rightarrow \max, (\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$.

Замечание 3.1. Так как f^0 по условию является сильно выпуклым, то из слабой сходимости единственных в этом случае элементов $u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$ к единственному же элементу u^0 при $k \rightarrow \infty$ и числовой сходимости $f^0(u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]) \rightarrow f^0(u^0)$, $k \rightarrow \infty$, так как квадратичный функционал является субдифференцируемым, вытекает и сильная сходимость $u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$ к u^0 при $k \rightarrow \infty$. Случай задачи (P^0) с сильно выпуклым f^0 , но с точными исходными данными рассматривался в [9].

4. Метод итеративной двойственной регуляризации. Пусть последовательность $(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)$, $k = 1, 2, \dots$, конструируется по правилу

$$(\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) = \text{Pr}_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} \left((\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \beta^k \mathfrak{F}^{\delta^k}(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\beta^k \alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \right), \quad (15)$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad (\bar{\lambda}^1, \bar{\mu}^1) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+,$$

где числовые последовательности δ^k , α^k , β^k , $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \delta^k \geq 0, \quad \alpha^k > 0, \quad \beta^k > 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\delta^k + \alpha^k + \beta^k) = 0, \quad \frac{\alpha^k}{\alpha^{k+1}} \leq C_0, \\ \frac{|\alpha^{k+1} - \alpha^k|}{(\alpha^k)^3 \beta^k} \leq C, \quad \frac{\beta^k}{(\alpha^k)^3} \leq C, \quad \frac{\delta^k}{(\alpha^k)^6} \leq C, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \beta^k = +\infty. \end{aligned} \quad (16)$$

Замечание 4.1. Если для какого-то элемента $G^\delta(\lambda, \mu)$

$$\|G^\delta(\lambda, \mu) - \mathfrak{F}^0(\lambda, \mu)\| \leq \sqrt{\delta}(1 + \|(\lambda, \mu)\|), \quad (17)$$

то $G^\delta(\lambda, \mu)$ можно использовать в итерационной формуле (15) вместо $\mathfrak{F}^\delta(\lambda, \mu)$. Это можно использовать при практическом решении задач, когда точное вычисление $\mathfrak{F}^\delta(\lambda, \mu)$ проблематично,

например, по причине использования конечно-разностной аппроксимации для решения задачи минимизации функции Лагранжа.

Введем обозначение: $(\lambda^{\alpha^k}, \mu^{\alpha^k}) \equiv (\lambda^k, \mu^k)$.

Лемма 4.1. Пусть последовательность α^k удовлетворяет условиям согласования (16). Тогда для элементов последовательности (λ^k, μ^k) решений задач

$$R^{0, \alpha^k}(\lambda, \mu) \equiv V^0(\lambda, \mu) - \alpha \|(\lambda, \mu)\|^2 \rightarrow \max, \quad (\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$$

справедливо предельное соотношение

$$\|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Доказательство. Так как (λ^k, μ^k) — точка максимума задачи (10) при $\delta = 0$, $\alpha = \alpha^k$, справедливо вариационное неравенство

$$\left\langle \mathfrak{F}^0(\lambda^k, \mu^k) - 2\alpha^k(\lambda^k, \mu^k), (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle \leq 0,$$

из которого следует следующая цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \alpha^k \|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)\|^2 &\leq \\ &\leq \left\langle -\mathfrak{F}^0(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) + \mathfrak{F}^0(\lambda^k, \mu^k) + 2\alpha^k [(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)], (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle \leq \\ &\leq \left\langle -\mathfrak{F}^0(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) + 2\alpha^k(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}), (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle \leq \\ &\leq \left\langle -\mathfrak{F}^0(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) + \mathfrak{F}^0(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) + 2\alpha^k(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - \right. \\ &\quad \left. - 2\alpha^{k+1}(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}), (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle = \\ &= 2(\alpha^k - \alpha^{k+1}) \left\langle (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}), (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle \leq \\ &\leq 2|\alpha^k - \alpha^{k+1}| \|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1})\| \|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)\| = \\ &= 2 \frac{|\alpha^k - \alpha^{k+1}|}{\alpha^k} \frac{\alpha^k}{\alpha^{k+1}} \alpha^{k+1} \|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1})\| \|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)\|. \end{aligned}$$

После деления на $\alpha^k \|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)\|$ получаем

$$\|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)\| \leq 2 \frac{|\alpha^k - \alpha^{k+1}|}{(\alpha^k)^2} \frac{\alpha^k}{\alpha^{k+1}} \alpha^{k+1} \|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1})\|, \quad (19)$$

откуда с учетом предельных соотношений (11) и условий (16) выводим требуемое предельное соотношение (18). $\square$

Лемма 4.2. Пусть выполняется условия согласования (16). Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, справедливо предельное соотношение

$$\|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k)\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Доказательство. Предположим сначала, что функционал V^0 не достигает на $\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ максимума. В этом случае, очевидно, имеем $\|(\lambda^k, \mu^k)\| \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$. Введем обозначение $b_k \equiv \|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k)\|$. Можем записать

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= \|(\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) - (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1})\| \leq \\ &\leq \|(\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)\| + \|(\lambda^k, \mu^k) - (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1})\|. \end{aligned} \quad (21)$$

Оценим слагаемое $\|(\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)\|$. Из равенства (15), свойства нерастяжения расстояния при операции проектирования и очевидного равенства $(\lambda^k, \mu^k) = \text{Pr}_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+}(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)$ следует

$$\begin{aligned} & \|(\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k)\|^2 = \\ & = \left\| \text{Pr}_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} \left((\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \beta^k \mathfrak{F}^{\delta^k}(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\beta^k \alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \right) - \text{Pr}_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+}(\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 \leq \\ & \leq \left\| \left[(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \beta^k \mathfrak{F}^{\delta^k}(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\beta^k \alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \right] - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 = \\ & = \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 + 2\beta^k \left\langle \mathfrak{F}^{\delta^k}(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k), (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle + \\ & \quad + (\beta^k)^2 \left\| \mathfrak{F}^{\delta^k}(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \right\|^2. \quad (22) \end{aligned}$$

Так как $\langle \mathfrak{F}^0(\lambda^k, \mu^k) - 2\alpha^k(\lambda^k, \mu^k), (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \rangle \leq 0$, то в силу оценки (9) с учетом критерия сильной вогнутости

$$-\alpha_k \|v - u\|^2 \geq \langle \mathfrak{F}^0(u) - 2\alpha_k u - \mathfrak{F}^0(v) + 2\alpha_k v, u - v \rangle$$

имеем

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathfrak{F}^{\delta^k}(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k), (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle = \\ & = \left\langle \mathfrak{F}^0(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k), (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle - \\ & - \left\langle \mathfrak{F}^0(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - \mathfrak{F}^{\delta^k}(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k), (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle \leq \\ & \leq \left\langle \mathfrak{F}^0(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - \mathfrak{F}^0(\lambda^k, \mu^k) + 2\alpha^k(\lambda^k, \mu^k), (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\rangle + \\ & \quad + \sqrt{\delta^k} \left(1 + \|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\| \right) \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\| \leq \\ & \leq -\alpha^k \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 + \sqrt{\delta^k} \left(1 + \|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\| \right) \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|. \quad (23) \end{aligned}$$

Кроме того, имеем в силу оценки (9) и леммы 1.1

$$\begin{aligned} & \left\| \mathfrak{F}^{\delta^k}(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \right\|^2 \leq \\ & \leq \left[\left\| \mathfrak{F}^0(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \right\| + \sqrt{\delta^k} \left(1 + \|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\| \right) \right]^2 \leq \\ & \leq C \left(1 + \|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\| \right)^2. \quad (24) \end{aligned}$$

Подставляя оценки (23), (24) в (22), имеем

$$\begin{aligned} & \left\| (\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 \leq \\ & \leq \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 - 2\beta^k \alpha^k \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 + \\ & + \beta^k \sqrt{\delta^k} \left(1 + \|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\| \right) \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\| + C(\beta^k)^2 \left(1 + \|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\| \right)^2. \quad (25) \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} & 1 + \|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\| \leq 1 + \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\| + \left\| (\lambda^k, \mu^k) \right\|, \\ & \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\| \leq \frac{1}{2} \left(1 + \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 \right), \end{aligned}$$

то оценка (25) может быть переписана в виде ($C > 0$ — постоянная)

$$\begin{aligned} \left\| (\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 &\leq \\ &\leq \left(1 - 2\beta^k \alpha^k + C \left(\beta^k \sqrt{\delta^k} + (\beta^k)^2 \right) \left(1 + \|(\lambda^k, \mu^k)\| \right) \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 \right) + \\ &\quad + C(\beta^k \sqrt{\delta^k} + (\beta^k)^2) + C(\beta^k \sqrt{\delta^k} + (\beta^k)^2) \|(\lambda^k, \mu^k)\|^2 = \\ &= \left(1 - 2\beta^k \alpha^k + \alpha^k \beta^k \gamma^k \right) \times \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 + \alpha^k \beta^k \tilde{\gamma}^k, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma^k &\equiv \frac{C}{\alpha^k} \left(\sqrt{\delta^k} + \beta^k + (\sqrt{\delta^k} + \beta^k) \|(\lambda^k, \mu^k)\| \right), \\ \tilde{\gamma}^k &\equiv \frac{C}{\alpha^k} \left(\sqrt{\delta^k} + \beta^k + (\sqrt{\delta^k} + \beta^k) \|(\lambda^k, \mu^k)\|^2 \right), \end{aligned}$$

причем, в силу предельных соотношений (16),

$$\gamma^k, \tilde{\gamma}^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Подставляя оценки (19), (25) в (21), получаем

$$\begin{aligned} b_{k+1} &\leq \left((1 - 2\beta^k \alpha^k + \alpha^k \beta^k \gamma^k) \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\|^2 + \alpha^k \beta^k \tilde{\gamma}^k \right)^{1/2} + \\ &\quad + C \frac{|\alpha^k - \alpha^{k+1}|}{(\alpha^k)^2} \alpha^{k+1} \left\| (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) \right\|. \end{aligned}$$

Возводя последнее неравенство в квадрат и пользуясь неравенством

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq a^2 + b^2 + a^2 \alpha^k \beta^k + b^2 (\alpha^k \beta^k)^{-1} = (1 + \alpha^k \beta^k) (a^2 + b^2 (\alpha^k \beta^k)^{-1}),$$

имеем

$$\begin{aligned} b_{k+1}^2 &\leq (1 + \alpha^k \beta^k) (1 - 2\beta^k \alpha^k + \alpha^k \beta^k \gamma^k) b_k^2 + \\ &= (1 + \alpha^k \beta^k) \left\{ \alpha^k \beta^k \tilde{\gamma}^k + \left(C \frac{|\alpha^k - \alpha^{k+1}|}{(\alpha^k)^2} \alpha^{k+1} \left\| (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) \right\| \right)^2 (\alpha^k \beta^k)^{-1} \right\} \leq \\ &\leq b_k^2 \left(1 - \alpha^k \beta^k - 2(\alpha^k \beta^k)^2 + \alpha^k \beta^k \gamma^k (1 + \alpha^k \beta^k) \right) + \\ &\quad + (1 + \alpha^k \beta^k) \left[\alpha^k \beta^k \tilde{\gamma}^k + \alpha^k \beta^k \left(C \frac{|\alpha^k - \alpha^{k+1}|}{(\alpha^k)^3 \beta^k} \alpha^{k+1} \left\| (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) \right\| \right)^2 \right], \end{aligned}$$

откуда получаем неравенство

$$b_{k+1}^2 \leq b_k^2 (1 - \alpha^k \beta^k + \alpha^k \beta^k \mu_k) + \alpha^k \beta^k \mu_k, \quad (28)$$

где

$$\mu_k \equiv \max \left\{ 2\alpha^k \beta^k + \gamma^k (1 + \alpha^k \beta^k), (1 + \alpha^k \beta^k) \left(\tilde{\gamma}^k + \left(C \frac{|\alpha^k - \alpha^{k+1}|}{(\alpha^k)^3 \beta^k} \alpha^{k+1} \left\| (\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) \right\| \right)^2 \right) \right\}.$$

В силу условий (16) и предельных соотношений (27) величины $s_k \equiv \alpha_k \beta_k (1 - \mu_k)$, $d_k \equiv \alpha_k \beta_k \mu_k$ удовлетворяют условиям леммы 1.5.40 в [7]. Поэтому из (28) и упомянутой леммы следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - (\lambda^k, \mu^k) \right\| = 0. \quad (29)$$

В случае же разрешимости двойственной к (P^0) задачи, т.е. когда функционал V^0 достигает максимума на $\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, величины $\|(\lambda^k, \mu^k)\|$ равномерно по k ограничены и доказательство настоящей леммы может быть проведено также, как и доказательство теоремы 1 в [3, т. 2, гл. 9, § 8]. $\square$

Следствием леммы 4.2 является следующее утверждение.

Лемма 4.3. Пусть выполняется условия согласования (16). Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, справедливы предельные соотношения

$$\left\| u^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k] - u^0[\lambda^k, \mu^k] \right\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Следствием лемм 4.2 и 4.3 является теорема сходимости метода итеративной двойственной регуляризации.

Теорема 4.1. Пусть задача (P^0) разрешима и выполняются условия согласования (16). Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \alpha^k \|(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\|, \quad k \rightarrow \infty, \\ f^0(u^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k]) \rightarrow f^0(u^0), \quad \delta^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \\ g_1^0(u^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k]) - h^0 \rightarrow 0, \quad \delta^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \\ g_2^0(u^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k]) \leq \phi(\delta^k), \quad \phi(\delta^k) \rightarrow 0, \quad \delta^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

а также предельное соотношение

$$\left\| u^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k] - u^0[\lambda^k, \mu^k] \right\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

При решении практических задач в случае, когда исходные данные известны с конечной ошибкой $\delta > 0$, может быть применен следующий алгоритм решения. Пусть последовательности чисел $\delta^k, \alpha^k, \beta^k, k = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяют условиям (16). Зафиксируем следующее правило останова итерационного процесса при фиксированном конечном уровне погрешности $\delta > 0$. Пусть последовательность $(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k), k = 1, 2, \dots$, конструируется по правилу

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) = \text{Pr}_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} \left((\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \beta^k \mathfrak{F}^\delta(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) - 2\beta^k \alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \right), \\ k = 0, 1, 2, \dots, \quad (\bar{\lambda}^0, \bar{\mu}^0) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+. \end{aligned} \quad (31)$$

При каждом $\delta > 0, \delta \leq \delta^1$, итерации продолжаются до такого наибольшего номера $k = k(\delta)$, при котором выполняются неравенства $\delta^k \geq \delta, k = 1, 2, \dots, k(\delta)$.

Сформулируем теорему, применимую при решении практических задач, в которых уровень погрешности известен и фиксирован.

Теорема 4.2. Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача (существует вектор Куна—Таккера в ней или нет), справедливы предельные соотношения

$$\begin{aligned} f^0(u^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)}]) \rightarrow f^0(u^0), \\ g_1^0(u^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)}]) - h^0 \rightarrow 0, \\ g_2^0(u^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)}]) \leq \phi(\delta), \quad \phi(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \end{aligned}$$

а также предельное соотношение

$$\left\| u^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)}] - u^0 \right\| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0,$$

где $(\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)})$ — результат $k(\delta)$ итераций итерационного процесса (31). Другими словами, указанное правило останова порождает устойчивый по отношению к ошибкам исходных данных алгоритм построения минимизирующего приближенного решения в задаче (P^0) .

5. Устойчивый секвенциальный принцип Лагранжа в итерационной форме. Как следствие теоремы 4.1, сформулируем в данном разделе необходимые и достаточные условия существования минимизирующего приближенного решения в задаче (P^0) , которые можно также назвать устойчивым секвенциальным принципом Лагранжа в итерационной форме.

По форме это утверждение сходно с теоремой 3.1, отличие же состоит в способе конструирования минимизирующего приближенного решения.

Теорема 5.1. Для существования в задаче (P^0) минимизирующего приближенного решения, в независимости от фактов существования или несуществования решения двойственной к ней задачи, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность двойственных переменных $(\lambda^k, \mu^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \dots$, что $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, и выполнялись предельные соотношения

$$u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] \in \mathcal{D}^{0\epsilon^k}, \quad \epsilon^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (32)$$

$$\langle (\lambda^k, \mu^k), \mathfrak{F}^{\delta^k}(\lambda^k, \mu^k) \rangle \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (33)$$

для некоторых элементов $u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$. При этом последовательность $u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$, $k = 1, 2, \dots$, является искомым минимизирующим приближенным решением и каждая его слабая предельная точка есть решение задачи (P^0) . В качестве последовательности (λ^k, μ^k) , $k = 1, 2, \dots$, может быть взята последовательность $(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)$ (см. (15)), генерируемая методом итеративной двойственной регуляризации теоремы 4.1. В случае разрешимости двойственной к (P^0) задачи последовательность $(\lambda^k, \mu^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \dots$, будет ограниченной. Как следствие предельных соотношений (32), (33), выполняется и предельное соотношение

$$V^0(\lambda^k, \mu^k) \rightarrow \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} V^0(\lambda, \mu). \quad (34)$$

Одновременно каждая слабая предельная точка последовательности $(\lambda^k, \mu^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \dots$ (если таковая существует) является решением двойственной задачи $V^0(\lambda, \mu) \rightarrow \max$, $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$.

Замечание 5.1. В силу сильной выпуклости функционала f^0 , из слабой сходимости единственных в этом случае элементов $u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$ к единственному же элементу u^0 при $k \rightarrow \infty$ и числовой сходимости $f^0(u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]) \rightarrow f^0(u^0)$, $k \rightarrow \infty$, так как квадратичный функционал является субдифференцируемым, вытекает и сильная сходимость $u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] \rightarrow u^0$ при $k \rightarrow \infty$.

6. Устойчивый секвенциальный принцип максимума Понтрягина в итерационной форме. В данном разделе приведем устойчивый секвенциальный принцип максимума Понтрягина для задачи (P^0) , являющийся необходимым и достаточным условием на элементы минимизирующих приближенных решений. Его формулировка является одновременно и конструктивным способом построения такового минимизирующего приближенного решения. Аналогичное утверждение приведено в [10]. Отличие состоит в способе построения последовательности двойственных переменных и соответствующего ей минимизирующего приближенного решения.

В настоящем разделе наложим на функцию $\varphi_2^\delta: X \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ дополнительное условие. Будем считать, что функция $\varphi_2^\delta: X \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывная выпуклая по x при всех $t \in X$ функция с непрерывным на $X \times \mathbb{R}^n$ градиентом $\nabla_x \varphi_2^\delta$. Также будем считать, что множество $\mathcal{D}$ может быть представлено в виде $\mathcal{D} \equiv \{u \in L_2(0, T) : u(t) \in U \text{ при п.в. } t \in (0, T)\}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклый компакт.

Рассмотрим при каждом $\lambda \in \mathcal{H}$, $\mu \in \mathcal{H}_+$ задачу минимизации функционала Лагранжа

$$L^\delta(u, \lambda, \mu) \rightarrow \min, \quad u \in \mathcal{D}. \quad (35)$$

Очевидно, необходимым и достаточным условием того, что некоторое управление $u \in \mathcal{D}$ доставляет минимум в задаче (35), является выполнимость на этом управлении принципа максимума Понтрягина.

Для записи принципа максимума Понтрягина в задаче (35) введем стандартное обозначение:

$$\begin{aligned} H^\delta(t, x, u, \psi, \lambda(t), \mu(t)) &\equiv \\ &\equiv \langle \psi, a^\delta(t)x + b^\delta(t)u \rangle - \left(\langle F^\delta(t)x, x \rangle + \langle G^\delta(t)u, u \rangle \right) - \lambda(t) \left(\langle \varphi_1^\delta(t), x \rangle - h^\delta(t) \right) - \mu(t) (\varphi_2^\delta(t, x)) \end{aligned}$$

при $\lambda, \mu \in \mathcal{H}$. Здесь и ниже в случае, если функции $\lambda, \mu \in \mathcal{H} \equiv L_2(X)$ рассматриваются на всем временном интервале $[0, T]$, то полагается, что $\lambda(t) = \mu(t) = 0$ при $t \in [0, T] \setminus X$ и одновременно для этих функций, рассматриваемых на более широком интервале, сохраняется прежнее обозначение.

Лемма 6.1. Как элемент, минимизирующий непрерывный выпуклый регулярный функционал Лагранжа на множестве $\mathcal{D}$, управление $u^\delta[\lambda, \mu]$ при $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина в задаче (35), т.е. удовлетворяет при $u = u^\delta[\lambda, \mu]$ соотношению максимума при почти всех $t \in [0, T]$

$$H^\delta(t, x^\delta[u](t), u(t), \psi(t), \lambda(t), \mu(t)) = \max_{v \in U} H^\delta(t, x^\delta[u](t), v, \psi(t), \lambda(t), \mu(t)), \quad (36)$$

где $\psi(t)$, $t \in [0, T]$ — решение сопряженной задачи

$$\dot{\psi} = -\nabla_x H^\delta(t, x^\delta[u](t), u(t), \psi, \lambda(t), \mu(t)), \quad \psi(T) = 0 \quad (37)$$

при $u = u^\delta[\lambda, \mu]$. Обратно, очевидно, в силу выпуклости задачи (P^0) , любой элемент $u \in \mathcal{D}$, удовлетворяющий вместе с некоторыми $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ соотношениям (36), (37), является оптимальным в задаче (35) при фиксированных $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$.

Вследствие сильной выпуклости f^δ существует единственное управление из $\mathcal{D}$, удовлетворяющее принципу максимума Понтрягина в задаче (35) при сформулированном выше дополнительном условии непрерывной дифференцируемости функций $\varphi_{2,i}^\delta$, $i = 1, \dots, m$. Обозначим его через $u_{\max}^\delta[\lambda, \mu]$. При этом справедливо равенство $u_{\max}^\delta[\lambda, \mu] = u^\delta[\lambda, \mu]$. Будем использовать обозначение

$$\mathfrak{F}_{\max}^\delta(\lambda, \mu) \equiv \left(g_1^\delta(u_{\max}^\delta[\lambda, \mu]) - h^\delta, g_2^\delta(u_{\max}^\delta[\lambda, \mu]) \right).$$

Непосредственным следствием теоремы 5.1 и леммы 6.1 является регуляризованный принцип максимума Понтрягина в итерационной форме для задачи (P^δ) , сформулированный в следующей теореме.

Теорема 6.1. Пусть δ^k , $k = 1, 2, \dots$, — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Для того чтобы в задаче (P^0) существовало минимизирующее приближенное решение (u , следовательно, сильно сходилась к u^0), необходимо, чтобы для последовательности двойственных переменных $(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \dots$, порождаемой итерационным процессом

$$(\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) = \text{Pr}_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} \left((\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \beta^k \mathfrak{F}_{\max}^\delta(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + 2\beta^k \alpha^k(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (38)$$

с условиями согласования (16) выполнялись предельные соотношения

$$\begin{aligned} u_{\max}^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] &\in \mathcal{D}^{0\epsilon^k}, \quad \epsilon^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \\ \langle (\lambda^k, \mu^k), \mathfrak{F}_{\max}^\delta(\lambda^k, \mu^k) \rangle &\rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (39)$$

для последовательности элементов $u_{\max}^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k]$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих принципу максимума леммы 6.1. В этом случае последовательность $u_{\max}^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k]$, $k = 1, 2, \dots$, представляет собой искомое минимизирующее приближенное решение в задаче (P^0) , а также имеет место сходимость $u_{\max}^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k] \rightarrow u^0$, $k \rightarrow \infty$. Одновременно выполняется и предельное соотношение (34).

Обратно, для того чтобы в задаче (P^0) существовало минимизирующее приближенное решение, достаточно, чтобы для последовательности двойственных переменных $(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \dots$, порождаемой итерационным процессом (38) с условиями согласования (16), выполнялись предельные соотношения (39). В этом случае последовательность $u_{\max}^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k]$, $k = 1, 2, \dots$, является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче (P^0) и имеет место сходимость $u_{\max}^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k] \rightarrow u^0$, $k \rightarrow \infty$. Одновременно является справедливым и предельное соотношение (34).

Существенной особенностью регуляризованного итерационного принципа максимума Понтрягина теоремы 6.1, является то, что он предполагает, что величина δ^k , характеризующая ошибку исходных данных, стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Для практического применения при решении неустойчивых задач на основе устойчивого итерационного принципа максимума Понтрягина

теоремы 6.1, когда это условие $\delta^k \rightarrow 0$ не может быть обеспечено, теорема 6.1 снабжается регуляризирующим правилом останова итерационного процесса. Указанное правило также является устойчивым алгоритмом построения минимизирующих приближенных решений в задаче (P^0) .

Пусть последовательности чисел δ^k , α^k , β^k , $k = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяют условиям (16). Зафиксируем следующее правило останова процесса

$$(\bar{\lambda}^{k+1}, \bar{\mu}^{k+1}) = \text{Pr}_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} \left((\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \beta^k \mathfrak{F}_{\max}^\delta(\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + 2\beta^k \alpha^k (\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (40)$$

где $\bar{\lambda}^0 \in H$, при фиксированном конечном уровне погрешности $\delta > 0$, $\delta \leq \delta^1$. При каждом $\delta > 0$ итерации продолжаются до такого наибольшего номера $k = k(\delta)$, при котором выполняются неравенства $\delta^k \geq \delta$, $k = 1, 2, \dots, k(\delta)$.

В этом случае следствием теоремы 4.2 является следующее утверждение (правило останова итерационного процесса регуляризованного принципа максимума Понтрягина в итерационной форме).

Теорема 6.2. *В случае задания исходных данных с ошибкой фиксированного конечного уровня $\delta > 0$ в качестве приближенного решения задачи (P^0) может быть взят элемент $u_{\max}^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)}]$, где $(\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)})$ — результат $k(\delta)$ итераций итерационного процесса (40). В этом случае имеют место предельные соотношения*

$$u_{\max}^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)}] \rightarrow u^0, \quad V^0(\bar{\lambda}^{k(\delta)}, \bar{\mu}^{k(\delta)}) \rightarrow \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} V^0(\lambda, \mu), \quad \delta \rightarrow 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов А. В. Условия экстремума. Нормальные и вырожденные задачи. — М.: Факториал Пресс, 1997.
2. Милотин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П. Принцип максимума в оптимальном управлении. — М., 2004.
3. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. — М.: МЦНМО, 2011.
4. Сумин М. И. Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2004. — 44, № 11. — С. 2001–2019.
5. Сумин М. И. Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2007. — 47, № 4. — С. 602–625.
6. Сумин М. И. Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2014. — 54, № 1. — С. 25–49.
7. Сумин М. И. Некорректные задачи и методы их решения. — Н. Новгород: НГУ, 2009.
8. Сумин М. И. Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2011. — 51, № 9. — С. 1594–1615.
9. Сумин М. И. Параметрическая двойственная регуляризация для задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2009. — 49, № 12. — С. 2083–2102.
10. Сумин М. И. Устойчивый секвенциальный принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями // XII Всеросс. совещ. по проблемам управления (ВСПУ-2014, 16–19 июня 2014 г.). — М.: Ин-т проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2014.

Кутерин Федор Алексеевич

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

E-mail: kuterin.f@yandex.ru

Евтушенко Андрей Александрович

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород