Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Н. Крейн, Обобщение теоремы об эквивалентности координатного и алгебраического определений гладкого многообразия, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 171, 114–117

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-171-114-117>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:23:54

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 171 (2019). С. 114–117
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-171-114-117

УДК 512.552, 515.126

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КООРДИНАТНОГО И АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЙ ГЛАДКОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2019 г. М. Н. КРЕЙН

Аннотация. В работе обобщена теорема об эквивалентности координатного и алгебраического определения гладкого многообразия. При алгебраическом определении точкой называют гомоморфизм из алгебры гладких действительных функций, заданных на многообразии, в поле действительных чисел. Рассматривается обобщение для случая, когда поле действительных чисел заменяется на произвольную ассоциативную нормированную алгебру, в общем случае некоммутативную.

Ключевые слова: ассоциативная алгебра, многообразие, гомоморфизм алгебр, центральная алгебра.

GENERALIZATION OF A THEOREM ON THE EQUIVALENCE OF THE COORDINATE AND ALGEBRAIC DEFINITIONS OF A SMOOTH MANIFOLD

© 2019 M. N. KREIN

ABSTRACT. In this paper, we generalize the theorem on the equivalence of the coordinate and algebraic definitions of a smooth manifold. Within the framework of the algebraic approach, a point is considered as a homomorphism from the algebra of smooth real functions defined on a manifold into the field of real numbers. We consider a generalization for the case where the field of real numbers is replaced by an arbitrary associative normalized algebra, generally speaking, noncommutative.

Keywords and phrases: associative algebra, manifold, homomorphism of algebras, central algebra.

AMS Subject Classification: 47A99

Пусть K — нормированная алгебра, в общем случае некоммутативная, над полем k , содержащем поле действительных чисел $\mathbb{R}$, с открытым множеством обратимых элементов (например, операторная алгебра), M — действительное конечномерное многообразие, $\mathcal{F} = C_K(M)$ — алгебра непрерывных функций из M в K с поточечно определенными операциями, которая также некоммутативна, если некоммутативна K , $|\mathcal{F}|$ — множество k -гомоморфизмов из $\mathcal{F}$ в K с базой топологии $\{f^{-1}(V) \mid V \subset K \text{ открыто}, f \in |\mathcal{F}|\}$, $\theta : M \rightarrow |\mathcal{F}|$ — отображение, задаваемое формулой $[\theta(p)](f) = f(p)$.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Отображение θ инъективно.*
2. *Всякий гомоморфизм из $|\mathcal{F}|$, переводящий действительные функции в действительные элементы из K , представляется в виде суммы $\theta(p)$ для некоторого $p \in M$ и отображения β , все значения которого необратимы в K .*

3. Точка $p \in M$ определена однозначно.

Под действительными функциями здесь понимаются функции, принимающие значения в поле $\mathbb{R}$, вложенном в K .

Если в этих обозначениях вместо K и k берется поле действительных чисел, θ оказывается взаимно однозначным отображением, даже гомеоморфизмом. Это является одним из основополагающих фактов diffiety-теории (см. [?, теорема 7.2]).

Доказательство теоремы 1.

1. Инъективность отображения θ следует из того факта, что, поскольку M хаусдорфово, для различных точек $p, q \in M$ найдется функция $f \in \mathcal{F}$ с различными значениями $f(p)$ и $f(q)$, откуда $[\theta(p)](f) \neq [\theta(q)](f)$.

2. Выберем в $\mathcal{F}$ такую действительную функцию φ , что прообраз каждого ее значения компактен в M . (Условия, наложенные на алгебру K , обеспечивают включение множества действительных гладких функций в $\mathcal{F}$.) В [?, предложение п. 5.17] доказано, что такая действительная функция существует. Пусть $\alpha \in |\mathcal{F}|$, $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow K$ — некоторый гомоморфизм, $\alpha(\varphi) = \lambda \in \varphi(M) \subset \mathbb{R}$ и $L = \varphi^{-1}(\lambda)$. Предположим, что для любого $x \in L$ найдется такое $f_x \in \mathcal{F}$, что $[\alpha(f_x) - f_x(x)]$ обратимо. Тогда найдется такой элемент $c_x \in K$, что $c_x[\alpha(f_x) - f_x(x)] = 1$. Так как множество обратимых элементов открыто, то для некоторого $\varepsilon > 0$ в K существует ε -окрестность единицы, состоящая из обратимых элементов. (Тогда εn -окрестность для $n \in \mathbb{R}$ состоит из обратимых элементов.) В силу непрерывности функции f_x , а значит, и функции $c_x[\alpha(f_x) - f_x]$, в M найдется открытая окрестность U_x точки x , в которой значения последней функции лежат в указанной ε -окрестности единицы. Окрестности $\{U_x\}_{x \in L}$ образуют открытое покрытие множества L , и, в силу компактности L , из него можно выбрать конечное подпокрытие $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$. Определим функцию

$$g(x) = (\varphi(x) - \lambda)^2 + \sum_{i=1}^n \left[c_{x_i}(\alpha(f_{x_i}) - f_{x_i}(x)) \right]$$

Первое слагаемое здесь действительно, т.е. лежит в $\mathbb{R} \subset K$, и неотрицательно. Для любой точки $x \in M$ имеем

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &= \left\| [(\varphi(x) - \lambda)^2 + n] + \left\{ \sum_{i=1}^n [c_{x_i}(\alpha(f_{x_i}) - f_{x_i}(x))] - n \right\} \right\| \leq \\ &\leq [(\varphi(x) - \lambda)^2 + n] + \sum_{i=1}^n \left\| [c_{x_i}(\alpha(f_{x_i}) - f_{x_i}(x)) - 1] \right\|. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^n \left\| c_{x_i}(\alpha(f_{x_i}) - f_{x_i}(x)) - 1 \right\| \leq \varepsilon n \leq \varepsilon n_x,$$

где $n_x = (\varphi(x) - \lambda)^2 + n$, заключаем, что $g(x)$ лежит в (εn_x) -окрестности действительной положительной точки n_x , поэтому $g(x)$ обратимо при любом $x \in M$. Следовательно, на M определена функция $\frac{1}{g}$:

$$\left(\frac{1}{g} \right) (x) = [g(x)]^{-1}.$$

Для любой точки $x \in M$ имеем

$$\left(g \cdot \frac{1}{g} \right) (x) = g(x) \cdot [g(x)]^{-1} = 1,$$

т.е. $g \cdot \frac{1}{g}$ — единица алгебры $\mathcal{F}$, и

$$\alpha(g) \cdot \alpha\left(\frac{1}{g}\right) = \alpha\left(g \cdot \frac{1}{g}\right) = \alpha(1) = 1.$$

Значит, $\alpha(g)$ — обратимый элемент, потому не равен нулю. В то же время

$$\alpha(g) = \alpha \left[(\varphi - \lambda)^2 + \sum_{i=1}^n [c_{x_i}(\alpha(f_{x_i}) - f_{x_i})] \right] = [\alpha(\varphi) - \lambda]^2 + \sum_{i=1}^n \left\{ c_{x_i} [\alpha(f_{x_i}) - \alpha(f_{x_i})] \right\} = 0;$$

противоречие. Следовательно, предположение неверно, и существует такая точка $x_\alpha \in L$, что для всех $f \in \mathcal{F}$ отображение $\alpha(f) - f(x_\alpha) = \alpha(f) - [\theta(x_\alpha)](f)$ необратимо; здесь $\beta = \alpha - \theta(x_\alpha)$.

3. Пусть отображение $\alpha \in |\mathcal{F}|$ переводит действительные функции в действительные элементы алгебры $\mathcal{F}$, $\alpha = \theta(p) + \beta$, т.е. $\beta = \alpha - \theta(p)$. Так как все значения β необратимы, а среди действительных элементов необратим только нуль, то для всякой действительной функции $f \in \mathcal{F}$ имеем $\beta(f) = 0$, поэтому $\alpha(f) = \theta(p)(f) = f(p)$. Далее повторяем рассуждения доказательства п. 1, а именно: для различных точек $p, q \in M$ найдется действительная функция $f \in \mathcal{F}$ с различными значениями $f(p)$ и $f(q)$, откуда вытекает, что $[\theta(p)](f) \neq [\theta(q)](f)$.

Теорема доказана. $\square$

В п. 2 формулировки теоремы 1 на рассматриваемые гомоморфизмы накладывается условие, используемое в доказательстве и состоящее в том, что они переводят действительные функции в действительные элементы из K . Действительные функции, очевидно, принадлежат центру алгебры $\mathcal{F}$, поэтому их образ при любом гомоморфизме должен лежать также в центре алгебры K .

Алгебра линейных операторов конечномерного пространства над k является центральной. Это означает, что ее центр совпадает с полем k , т.е. с множеством операторов вида λI , где $\lambda \in k$, а I — тождественный оператор. Действительно, элементы центра по определению перестановочны со всеми элементами алгебры, значит, и с автоморфизмами, поэтому $AX = XA$ или $X = A^{-1}XA$ для всякого X , принадлежащего центру, и всякого автоморфизма A . Следовательно, матрица оператора не меняется при любом изменении базиса, что верно только для операторов вида λI .

Оказывается, аналогичное свойство верно и в гильбертовом пространстве.

Теорема 2. *Алгебра линейных ограниченных операторов гильбертова пространства является центральной.*

Доказательство. Пусть $K = B(H)$ — алгебра линейных ограниченных операторов гильбертова пространства H , X — оператор, принадлежащий ее центру.

1. Покажем, что любой вектор из H является собственным для X . Пусть $e_1 \in H$. Предположим, что $e_2 = X(e_1) \neq \lambda e_1$ для любого $\lambda \in k$; тогда e_1 и e_2 линейно независимы. Построим такой автоморфизм A , что $X(e_1) \neq (A^{-1}XA)(e_1)$. Положим $A(e_1) = e_1$, выберем $e_3 \neq \mu e_2$ и $e_3 \neq \lambda e_1$ ни для каких λ и μ из k и положим $A(e_3) = e_2$, $A(e_2) = e_3$. Векторы e_1, e_2, e_3 линейно независимы, $L = L(e_1, e_2, e_3)$ — конечномерное подпространство, имеющее в гильбертовом пространстве H имеет прямое дополнение H_1 (например, ортогональное дополнение). Пусть A_1 — какой-либо автоморфизм на H_1 . Тогда $A = A|_L \oplus A_1$. Отображение $A|_L$ задано выше на базисных элементах L , A — автоморфизм на H , L и A_1 — инвариантные подпространства для A . При этом

$$(A^{-1}XA)(e_1) = A^{-1}(X(A(e_1))) = A^{-1}(X(e_1)) = A^{-1}(e_2) = e_3 \neq e_2,$$

следовательно, $A^{-1}XA \neq X$. Значит, предположение неверно, и для любого $e_1 \in H$ найдется такое $\lambda \in k$, что $X(e_1) = \lambda e_1$.

2. Покажем, что это собственное значение единственно. Предположим, что $X(e_1) = \lambda_1 e_1$, $X(e_2) = \lambda_2 e_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда e_1 и e_2 линейно независимы, и в качестве автоморфизма A можно взять автоморфизм, переставляющий местами e_1 и e_2 и тождественный на дополнении к $L(e_1, e_2)$. Очевидно, $A^{-1} = A$. Получим

$$(A^{-1}XA)(e_1) = A^{-1}(X(A(e_1))) = A^{-1}(X(e_2)) = A^{-1}(\lambda_2 e_2) = \lambda_2 A^{-1}(e_2) = \lambda_2 e_1 \neq \lambda_1 e_1 = X(e_1),$$

т.е. $A^{-1}XA \neq X$. Следовательно предположение неверно, и $\lambda_1 = \lambda_2$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3 (следствие теорем 1 и 2). *Пусть K — алгебра линейных операторов конечномерного пространства над k или алгебра линейных ограниченных операторов гильбертова пространства, M — конечномерное многообразие. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Отображение θ инъективно.*

2. *Всякий гомоморфизм из $|\mathcal{F}|$ представляется в виде суммы $\theta(p)$ для некоторого $p \in M$ и гомоморфизма β , все значения которого необратимы в K .*
3. *Точка $p \in M$ определена однозначно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неструев Дж.* Гладкие многообразия и наблюдаемые. — М.: МЦНМО, 2000.

Крейн Мария Нехемьевна

Липецкий государственный педагогический университет

E-mail: kreyn_mara@mail.ru