Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Н. Ляхов, М. Г. Лапшина, С. А. Рощупкин, Теорема о носителе для K_γ -преобразования Радона—Киприянова, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 171, 118–124

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-171-118-124>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:29:31

ТЕОРЕМА О НОСИТЕЛЕ ДЛЯ K_γ -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА—КИПРИЯНОВА

© 2019 г. Л. Н. ЛЯХОВ, М. Г. ЛАПШИНА, С. А. РОЩУПКИН

Аннотация. Теорема о носителе для преобразования Радона получена Л. Хелгасоном. Преобразование Радона функций от групп переменных, связанных сферической симметрией, оказывается частным случаем более общего преобразования — преобразованием Радона—Киприянова K_γ . Это преобразование отвечает весовому мультииндексу $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ и совпадает с преобразованием Радона функций от многоосевой симметрии, когда все составляющие мультииндекса γ суть натуральные целые числа. В общем случае K_γ -преобразование может трактоваться как преобразование функций дробномерного аргумента. В данной работе доказана общая теорема о носителе. В частном случае, когда $\gamma = 0$, эта теорема совпадает с теоремой Хелгасона.

Ключевые слова: преобразование Радона, теорема о носителе, преобразование Радона—Киприянова.

SUPPORT THEOREM FOR THE RADON—KIPRIYANOV K_γ -TRANSFORM

© 2019 L. N. LYAKHOV, M. G. LAPSHINA, S. A. ROSHCHUPKIN

ABSTRACT. The support theorem for the Radon transform was obtained by L. Helgason. The Radon transform of functions of groups of variables related by spherical symmetry is a special case of a more general transformation, namely, the Radon—Kipriyanov transform K_γ . This transformation corresponds to a weight multi-index $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ and coincides with Radon transform if all components of the multi-index γ are natural numbers. In general, the K_γ -transformation can be interpreted as a transformation of functions of a fraction-dimensional argument. In this paper, we prove a general support theorem. In a special case where $\gamma = 0$, this theorem coincides with the Helgason theorem.

Keywords and phrases: Radon transform, support theorem, Radon—Kipriyanov transform.

AMS Subject Classification: 39A06

1. О размерности аргумента, порождаемого функцией от сферической симметрии и преобразование Радона радиальных функций. Дробный интеграл Римана—Лиувилля $(I_b^\alpha f)(x)$, $\alpha > 0$, $x < b$, при $x = 0$, $\alpha = n$ сводится к интегралу по n -мерному евклидову пространству $\mathbb{R}_n$. Если вместо площади сферы в $\mathbb{R}_n$ воспользоваться «площадью взвешенной сферы»

$$|S_1(n)|_\gamma = \int_{S_1(n)} (x^2)^{\gamma/2} dS = \frac{2 \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)},$$

то указанный интеграл Римана—Лиувилля сведется к интегралу с весом $\prod_{i=1}^n x_i^{\{\gamma_i\}}$, где мы положили $\alpha = |\gamma| = [\gamma] + \{\alpha\}$, $[\gamma] = n$ и $\{\alpha\} = \sum_1^n \{\gamma_i\} < 1$. Предел этого выражения при $\{\alpha\} \rightarrow 0$ и $\{\alpha\} \rightarrow 1$ есть интеграл от радиальной функции по евклидову пространству размерности n или $n + 1$ соответственно. Таким образом, определенный интеграл Римана—Лиувилля может трактоваться как интеграл от радиальной функции в $\mathbb{R}_{n+\{\alpha\}}$ дробной размерности $n + \{\alpha\}$.

Преобразование Радона радиальной функции. Пусть $\delta(P)$ — δ -функция, сосредоточенная на $(n - 1)$ -мерной поверхности $P(x) = 0$ в $\mathbb{R}_n$. Преобразование Радона зададим в форме

$$R[f](\xi, p) = \int_{\mathbb{R}_n} f(x) \delta(p - \langle x, \xi \rangle) dx,$$

где $\langle x, \xi \rangle = \sum_{i=1}^N x_i \xi_i$ — скалярное произведение N -мерных векторов в евклидовом пространстве точек $\mathbb{R}_N$. Если предположить, что функция f сферически симметрична, т.е. $f = f(|x|)$, то ее преобразование Радона сферическим преобразованием координат приводится к виду

$$R[f](\xi, p) = |S_1(n)| \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\infty f(x) \int_0^\pi \delta(p - r \cos \varphi) \sin^{n-2} \varphi d\varphi \rho^{n-1} d\rho,$$

где $|S_1(n)|$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}_n$. Воспользовавшись определением оператора Пуассона

$$P_\rho^{n-1} g(r) = \frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{k-1}{2})} \int_0^\pi g(r \cos \varphi) \sin^{k-2} \varphi d\varphi,$$

получим

$$R[f](\xi, p) = |S_1(n)| \int_0^\infty f(x) P_r^{n-1} \delta(p - r) \rho^{n-1} d\rho.$$

Здесь δ -функционал действует в смысле И. А. Киприянова для работы в весовых функциональных классах: $(\delta, x^\gamma f) = f(0)$ (см., например, [2, с. 18, с. 116]). Полученное интегральное выражение представляет частный случай преобразования

$$R[f](\xi, p) = |S_1(n)| \int_0^\infty f(x) P_\xi^\gamma \delta(p - x\xi) x^\gamma dx,$$

которое является одномерным преобразованием Радона—Киприянова (в общем случае это преобразование введено в [3], основные свойства доказаны в [6]). Если $\gamma = [\gamma] + \{\gamma\}$, то при $[\gamma] = n - 1$ и $\{\gamma\} \rightarrow 0$ оно стремится к преобразованию Радона радиальной функции в $\mathbb{R}_n$. Если $\{\gamma\} \rightarrow 1$, то оно стремится к преобразованию Радона радиальной функции в $\mathbb{R}_{n+1}$. Это позволяет трактовать K_γ -преобразование как преобразование радиальной функции в $\mathbb{R}_{n+\gamma}$. Но, разумеется, эта дробная размерность порождена самим преобразованием K_γ .

2. Преобразование Радона—Киприянова. Пусть N и n ($1 \leq n \leq N$) — фиксированные натуральные числа, $\mathbb{R}_N$ — евклидово пространство точек $x = (x', x'')$, где $x' \in \mathbb{R}_n$, $x'' \in \mathbb{R}_{N-n}$. В $\mathbb{R}_N$ выделим область $\mathbb{R}_N^+ = \mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_{N-n}$, где $\mathbb{R}_n^+ = \{x' \in \mathbb{R}_n : x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$ — евклидово n -полупространство. Следуя [2, с. 21], функции $f = f(x)$, заданные в $\mathbb{R}_N^+$ и допускающие по каждой переменной x_i , $i = 1, \dots, n$, четное продолжение в $\mathbb{R}_N$ с сохранением своего функционального класса, будем называть x' -четными по Киприянову (далее просто x' -четными).

Через $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ обозначим мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел. Пространство $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_N^+)$ состоит из x' -четных основных функций пространства основных функций Л. Шварца $S = S(\mathbb{R}_N)$. Далее рассматриваются только функции, принадлежащие S_{ev} .

Преобразование Радона—Киприянова (K_γ -преобразование) x' -четной функции f определено в [3, 6] выражением

$$K_\gamma[f](\xi; p) = \int_{\mathbb{R}_N^+} f(x) P_{x'}^\gamma \delta(p - \langle x, \xi \rangle) (x')^\gamma dx, \quad (x')^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i},$$

где $P_{x'}^\gamma$ — многомерный оператор Пуассона, действующий по весовым переменным $x' = (x_1, \dots, x_n)$, $n \leq N$, по формуле

$$P_{x'}^\gamma g(x', x'') = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi g(x_1 \cos \alpha_1, \dots, x_n \cos \alpha_n, x'') \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i-1} \alpha_i d\alpha_1 \dots d\alpha_n.$$

Теорема Хелгасона о носителе (см. [11, с. 117]) гласит, что если функция f достаточно быстро убывает и $R[f](\xi, p) = 0$ для всех $p > p_0$, то $f(x) = 0$ для всех $|x| > p_0$. Для преобразования Радона—Киприянова аналогичный результат был получен в диссертации [1], но только для случая одной весовой переменной $n = 1$. Для произвольного случая в доказательстве возникли трудности принципиального характера, обойти которые удалось применением результатов работ [7–9]. При этом в случае, когда все $\gamma_i = 0$, полученное в этой работе утверждение совпадает с классической теоремой Хелгасона о носителе.

Введем формулировки вспомогательных результатов.

Теорема о K_γ -преобразовании x' -радиальной функции. Весовые переменные в определении преобразования Радона—Киприянова обозначены символом x' , т.е. $x' = (x_1, \dots, x_n)$, $n \leq N$. x' -Радиальной называем функцию, определенную в $\mathbb{R}_N$ с гиперосевой сферической симметрией: $f = f(|x'|, x'')$. Пусть $\gamma = m + \{|\gamma|\}$, где $m = \lfloor |\gamma| \rfloor$ — целая часть числа $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$. Основную роль в наших рассуждениях играет следующее утверждение о возможности замены K_γ -преобразования x' -радиальной функции, определенной в $\mathbb{R}_N$, преобразованием $K_{N+m+\{\gamma\}}$, определенном в $\mathbb{R}_{N+m+1}$ содной весовой переменной, нагруженной весом $x_1^{\{|\gamma|\}}$ (см. [7]).

Теорема 1. K_γ -Преобразование с мультииндексом $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $1 \leq n \leq N$, радиальной функции $f = f(|x'|, x'') \in L_1^\gamma(\mathbb{R}_N^+)$, $|x'| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $1 \leq n \leq N$, не зависит от вектора ξ' и выражается через $(N+1)$ -мерное преобразование Радона—Киприянова с индексом размерности $\mu = |\gamma| + N - 1$ функции одной весовой переменной $\tilde{f} = f(r, x'')$ по формуле

$$K_\gamma[f](\xi; p) = K_\gamma[\tilde{f}](p, \eta) = |S_1(n)|_\gamma K_{|\gamma|+N-1}[\tilde{f}](p, \eta), \quad \eta = (\eta_1, \xi'') \in \mathbb{R}_{N-n+1},$$

где коэффициент $|S_1^+(n)|_\gamma$ — весовая площадь части сферы $S_1^+(N) = \{x \in \mathbb{R}_N^+, |x'| = 1\}$, равный

$$|S_1^+(n)|_\gamma = \int_{S_1^+(n)} \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} dS = \frac{\pi^{(N-n)/2} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad \gamma_i > 0.$$

Теорема о сферическом преобразовании обобщенного сдвига Пуассона (см. [3, 6]). Рассмотрим мультииндекс $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\gamma_i > 0$ и $m \geq 0$. Пусть $x \in R_{m+n}^+ = \{x \in R_{m+n} : x_1 > 0, \dots, x_m > 0\}$. Выделяя одну из переменных, будем писать $x = (x_i, x^i)$, полагая $x^i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{m+n})$. Смешанный обобщенный сдвиг, отвечающий этому мультииндексу γ , имеет вид

$$f \rightarrow ({}^\gamma T^y f)(x) = \prod_{i=1}^n \gamma_i T_{x_i}^{y_i} f(x', x'' - y''),$$

где каждый из одномерных обобщенных сдвигов $\gamma_i T_{x_i}^{y_i}$, $i = 1, \dots, n$, определен по формуле

$$\gamma_i T_{x_i}^{y_i} : f \rightarrow (T_{x_i}^{y_i} f)(x_i, x^i) = \frac{\Gamma(\gamma_i+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\gamma_i+\frac{1}{2})} \int_0^\pi f\left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha}, x^i\right) \sin^{\gamma_i-1} \alpha d\alpha.$$

Теорема 2. Пусть ${}^\gamma T^y$ — смешанный обобщенный сдвиг, отвечающий мультииндексу размерности γ . Для произвольных абсолютно суммируемых с весом $\prod_{j=1}^m x_i^{\gamma_i}$ радиальных функций $f = f(|x|)$ и $g = g(|x|)$ имеет место равенство

$$(f * g)_\gamma = \int_{R_{n+m}^+} f(|y|) {}^\gamma T^y g(x) \prod_{j=1}^m x_i^{\gamma_i} dy = |S_1^+(m)|_\gamma \int_0^\infty f(r) {}^\mu T^r g(r) r^\mu dr, \quad \mu = m + n + |\gamma| - 1,$$

где $S_1^+(m)$ — поверхность части единичной сферы $|x'| = 1$, определенной неравенствами $x_i > 0$, $\dots$, $x_m >$, и

$$|S_1(m)|_\gamma = \int_{S_1^+(m)} \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} dS = \frac{\pi^{n/2} \prod_{i=1}^m \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m+n+|\gamma|+1}{2}\right)}.$$

Из этой теоремы следует, что K_γ -преобразование Радона—Киприянова радиальной функции есть снова преобразование Радона—Киприянова, размерность которого увеличилась на размерность сферически симметричной части евклидова пространства, отвечающей данной радиальной функции.

Лемма 1. Пусть интегрируемая x' -четная функция f такова, что функция $|x|^k f(x)$ ограничена для всех натуральных k . Предположим, что при этом для всех $R > r_0$, $x \geq 0$, выполняется равенство

$$M[f](x', x'') = \int_{S_1^+(0)} T_x^{R\Theta} f(x', x'') (y')^{\gamma-1} dS(\Theta) = 0, \quad (1)$$

где $S_1^+(0)$ — единичная полуокружность в $\mathbb{R}_n$ с центром в начале координат. Тогда $f(x) = 0$ для всех $|x| > r_0$.

Доказательство. Упрощенный вариант этой леммы содержится в [10]. Переменные x'' можем считать фиксированными, поэтому далее эти переменные не записываем.

Через $\{|x| < R\}_n^+$ и $\{|x| > R\}_n^+$ обозначим указанные в скобках множества, принадлежащие n -полупространству. Очевидно, что

$$\int_{\{|x| < R\}_n^+} (T^x f)(y) y^\gamma dy = \left(\int_{\mathbb{R}_n^+} - \int_{\{|x| > R\}_n^+} \right) (T^x f)(y) y^\gamma dy.$$

Известно, что при интегрировании по $\mathbb{R}_n^+$ обобщенный сдвиг Пуассона является самосопряженным (см. [4]). Поэтому

$$\int_{\{|x| < R\}_n^+} (T^x f)(y) y^\gamma dy = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(y) y^\gamma dy - \int_{\{|x| > R\}_n^+} (T^x f)(y) y^\gamma dy.$$

Здесь последний интеграл запишем в сферических переменных $x = r\theta$. Это приведет к представлению через сферический интеграл:

$$\int_{\{|x| > R\}_n^+} (T^x f)(y) y^\gamma dy = C(\gamma) \int_R^\infty r^{n+|\gamma|-1} \int_{S_1^+(n)} T^{r\Theta} f(x) \prod_{i=1}^n \Theta_i^{\gamma_i} dS(\Theta).$$

Если $|y| = R > 1$, то по условию леммы сферический интеграл равен нулю, и мы получим

$$\int_{\{|x| < R\}_n^+} (T^x f)(y) y^\gamma dy = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(y) y^\gamma dy.$$

Рассмотрим левую часть этого равенства. Учитывая действия сдвига Пуассона, по каждой паре переменных (x_i, α_i) введем антиполярные координаты

$$\begin{cases} z_{2i-1} = y_i \cos \alpha_i, \\ z_{2i} = y_i \sin \alpha_i \end{cases} \quad 0 < \alpha_i < \pi, \quad \begin{cases} z_1 \in (-R, R), \\ z_2 \in (0, R). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\{|x| < R\}^+} (T^x f)(y) y^\gamma dy = \\ = C(\gamma) \int_{\{|x| > R\}_{2n}^+} f \left(\sqrt{(z_1 - x_1)^2 + z_2^2}, \dots, \sqrt{(z_{2n-1} - x_n)^2 + z_{2n}^2} \right) \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i - 1} dz. \end{aligned}$$

Для сокращения записи положим

$$f \left(\sqrt{(z_1 - x_1)^2 + z_2^2}, \dots, \sqrt{(z_{2n-1} - x_n)^2 + z_{2n}^2} \right) = \tilde{f}(z_1, z_2).$$

Следовательно,

$$C(\gamma) \int_{B_R} \tilde{f}(z_1 - x, z_2) z_2^{\gamma-1} dz = \int_0^\infty f(y) y^\gamma dy.$$

Здесь правая часть не зависит от x . Дифференцируя по одной из переменных x_i , получим

$$\int_{\{|x| < R\}_n^+} \tilde{f}'_{x_i}(z_1 - x, z_2) z_2^{\gamma-1} dz = 0$$

или

$$\int_{B_R} \tilde{f}'_{z_{2i-1}}(z_1 - x, z_2) z_2^{\gamma-1} dz = 0.$$

Применим формулу Грина интегрирования по частям в $\mathbb{R}_{2n}$. В результате

$$\int_{\{|x| < R\}_n^+} \tilde{f}'_{z_1}(z_1 + x, z_2) z_2^{\gamma-1} dz = \int_{S_R(0)} \tilde{f}_{z_1}(z_1 - x, z_2) z_2^{\gamma-1} \cos(\bar{\nu}, z_{2i-1}) d\Gamma.$$

Здесь вектор внешней нормали $\bar{\nu}$ к окружности с центром в начале координат совпадает с радиус-вектором точки z . Поэтому $\cos(\bar{\nu}, z_{2i-1}) = (z_{2i-1})/R$. Следовательно,

$$\int_{B_R} \tilde{f}(z_1 + x, z_2) z_2^\gamma dz = \int_{S_R(0)} \tilde{f}(z_1 - x, z_2) z_2^{\gamma-1} \frac{z_{2i-1}}{R} d\Gamma,$$

и мы имеем равенство

$$\int_{S_R(0)} \tilde{f}(z_1 - x, z_2) z_2^{\gamma-1} z_{2i-1} d\Gamma = 0.$$

При этом

$$\int_{S_R(0)} \tilde{f}(z_1 - x, z_2) (z_{2i-1} - x) z_2^{\gamma-1} d\Gamma = 0.$$

Начало координат удобно перенести в точку $z_1 = x, z_2 = 0$; тогда получим равенство

$$\int_{S_R(x,0)} \tilde{f}(z_1, z_2) z_{2i-1} z_2^{\gamma-1} d\Gamma = 0.$$

Отсюда следует, что равенство (1) выполняется для функции

$$\tilde{f}_1(z_1, z_2) = z_1 f_1 \left(\sqrt{(z_1 - x)^2 + z_2^2} \right).$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получим

$$\int_{S_R(x,0)} \tilde{f}(z_1, z_2) z_1^2 z_2^{\gamma-1} d\Gamma = 0.$$

Следовательно, для произвольного многочлена $P_m(z_1)$ порядка m имеем равенство

$$\int_{S_R(x,0)} \tilde{f}(z_1, z_2) P_m(z_1) z_2^{\gamma-1} d\Gamma = 0.$$

Переменную z_1 примем за параметр кривой S_R : $z_2 = \sqrt{R^2 - z_1^2}$. Тогда получим

$$\int_{-R < |z_1| < R} \tilde{f} \left(z_1, \sqrt{R^2 - z_1^2} \right) P(z_1) R (R^2 - z_1^2)^{(\gamma-2)/2} dz_1 = 0.$$

Для произвольного многочлена $p_m(z_1)$ такое равенство возможно лишь при условии, что

$$\tilde{f} \left(z_1, \sqrt{R^2 - z_1^2} \right) = 0.$$

Поскольку точка $(z_1, \sqrt{R^2 - z_1^2})$ принадлежит окружности $z_1^2 + z_2^2 = R^2$ при $R > 1$, а

$$\tilde{f} \left(z_1, \sqrt{R^2 - z_1^2} \right) = f \left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2} \right) = f(y),$$

получаем утверждение леммы: $f(y) = 0$ для всех $|y| > 1$. Доказательство закончено. $\square$

3. Теорема о носителе для K_γ -преобразования.

Теорема 3. Пусть число $\gamma > 0$ функция $f \in C_{ev}(E_N^+)$ удовлетворяет следующим условиям:

- (1) для любого целого $k > 0$ функция $|x|^k f(x)$ ограничена;
- (2) существует такая постоянная $A > 0$, что

$$K_\gamma[f](\xi; p) = 0, \quad p > A.$$

Тогда

$$f(x) = 0, \quad |x| > A.$$

Доказательство. Исходим из того, что это утверждение справедливо для случая, когда весовая переменная единственна, т.е. когда $n = 1$. Вначале рассмотрим x' -радиальную функцию $f = f(|x'|, x'')$, и $x' \in \mathbb{R}_n^+$, $n > 1$. При этом, согласно теореме 1, имеет место равенство

$$\begin{aligned} K_\gamma[f_\Theta(|x'|, x'')](\xi, p) &= |S_1(n)| K_{\gamma+N-1}[f_\Theta(r, x'')](\eta'', p) = \\ &= |S_1(n)| \int_{\mathbb{R}_\mu^+} f_\Theta(r, y) P_{y_1}^{\gamma+n-1} \delta(p - \langle y, \eta \rangle) y_1^{|\gamma|+n-1} dr dx'', \end{aligned} \quad (2)$$

где введены следующие обозначения:

$$y = (r, x''), \quad \eta = (\eta_1, \xi'') \in \mathbb{R}_{N-n+1}, \quad |\eta| = 1,$$

а оператор Пуассона нового порядка $\mu = n + |\gamma| - 1$ действует только по переменной r . Отметим, что для функции f выполняется первое условие теоремы 3: $|y|^k f_{\Theta(y)}$ — ограниченная функция в $\mathbb{R}_{N-n+1}^+$. Из равенства (2) следует, что если $K_\gamma[f](\xi, p) = 0$ для всех $p > A$, то и

$$K_{\gamma+n-1}[f_\Theta](\eta, p) = 0 \quad \text{для всех } p > A.$$

Для функции f справедлива теорема о носителе (теорема 3 при $n = 1$). Это значит, что $f(y) = f(r, x'') = 0$ для всех $\{y : |y| > A\}$.

Рассмотрим общий случай $f = f(x)$, $x = (x', x'') \in \mathbb{R}_N^+$. По части переменных x' введем весовое сферическое среднее, порожденное сдвигом Пуассона:

$$M[f](r, x'') = \int_{S_1^+(n)} (T_{y'}^x f)(y', y'') (y')^\gamma dS(y).$$

К функции $M[f](r, x'')$ применима теорема, поскольку она является x' -радиальной (зависит от $(|x'|, x'')$, $r = |x'|$). Таким образом, если $K_{M+|\gamma|-1}M[f](p; \xi) = 0$ при $\sqrt{r^2 + |x''|^2} > A$, то и $M[f](r, x'') = 0$. Теперь справедливость теоремы 3 с очевидностью вытекает из леммы 1. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гоц Е. Г. Формулы обращения преобразования Киприянова—Радона и аналоги теоремы типа Планшереля и теоремы о носителе/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Воронеж: ВГУ, 2006.
2. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.
3. Киприянов И. А., Ляхов Л. Н. О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона// Докл. РАН. — 1998. — 360, № 2. — С. 157–160.
4. Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье// Усп. мат. наук. — 1951. — 6, № 2 (42). — С. 102–143.
5. Ляхов Л. Н. Обращение преобразования Киприянова—Радона// Докл. РАН. — 2004. — 399, № 5. — С. 597–600.
6. Ляхов Л. Н. Преобразование Киприянова—Радона// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2005. — 248. — С. 153–163.
7. Ляхов Л. Н. Преобразование Радона—Киприянова обобщенного сферического среднего значения функции// Мат. заметки. — 2016. — 100, № 1. — С. 118–132.
8. Ляхов Л. Н., Лапшина М. Г. Обращение интегральных операций с весовой плоской волной// Пробл. мат. анализ. — 2016. — 84. — С. 113–122.
9. Ляхов Л. Н., Рощупкин С. А., Санина Е. Л. Сферическое преобразование обобщенного сдвига Пуассона и некоторые свойства весовых лебеговых классов функций// Пробл. мат. анализ. — 2017. — № 88. — С. 87–95.
10. Санина Е. Л., Рощупкин С. А. О носителе функции с нулевым весовым интегралом по окружности от обобщенного сдвига Пуассона// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — № 4. — С. 181–185.
11. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. — М.: Мир, 1987.

Ляхов Лев Николаевич
Воронежский государственный университет
E-mail: levnllya@mail.ru

Лапшина Марина Геннадьевна
Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского
E-mail: marina.lapsh@yandex.ru

Рощупкин Сергей Александрович
Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина
E-mail: roshupkinsa@mail.ru