Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Валовик, В. Ю. Курсеева, Многопараметрические задачи на собственные значения и их приложения в электродинамике, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 172, 9–29

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-172-9-29>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 09:40:03

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 172 (2019). С. 9–29
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-9-29

УДК 517.927.4, 517.988.57

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

© 2019 г. Д. В. ВАЛОВИК, В. Ю. КУРСЕЕВА

Аннотация. Рассмотрена нелинейная n -параметрическая задача на собственные значения, называемая задачей P . Помимо n спектральных параметров, задача P зависит от n^2 числовых параметров, при нулевых значениях которых она распадается на n линейных задач P_i^0 , $i = \overline{1, n}$. Задаче P можно поставить в соответствие n других нелинейных задач P_i , которые, в том числе, имеют решения, не связанные с решениями задач P_i^0 . В работе предложено рассматривать задачи P_i в качестве «невозмущенных». На основе свойств собственных значений задач P_i доказано существование собственных значений задачи P , часть из которых не связана с решениями задач P_i^0 .

Ключевые слова: нелинейная задача типа Штурма—Лиувилля, многопараметрическая задача на собственные значения, метод возмущений, метод интегральных дисперсионных уравнений.

MULTIPARAMETER EIGENVALUE PROBLEMS AND THEIR APPLICATIONS IN ELECTRODYNAMICS

© 2019 D. V. VALOVIK, V. YU. KURSEVA

ABSTRACT. A nonlinear n -parametric eigenvalue problem called the problem P is considered. In addition to n spectral parameters, the problem P depends on n^2 numerical parameters; for zero values of these parameters, the problem splits into n linear problems P_i^0 , $i = \overline{1, n}$. To the problem P , one can assign n nonlinear problems P_i , which, in particular, have solutions that are not related to the solutions of the problems P_i^0 . The problems P_i are treated in this work as “nonperturbed” problems. Using the properties of eigenvalues of the problems P_i , we prove the existence of eigenvalues of the problem P ; some of these eigenvalues are not related to solutions of the problems P_i^0 .

Keywords and phrases: nonlinear Sturm–Liouville-type problem, multiparameter eigenvalue problem, perturbation method, method of integral dispersion equations.

AMS Subject Classification: 47H14, 35P30, 35Q61

1. Постановка задачи и вводные замечания. Рассмотрим классический вариант метода возмущений (см. [9]). Пусть $R(\alpha)$ — нелинейная задача, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ — вектор числовых параметров. Ее можно записать в операторном виде: $\mathcal{R}(u; \lambda, \alpha) = 0$, где $\mathcal{R}$ — некоторая нелинейная по u оператор-функция, λ — еще один вектор параметров (например, спектральных). Предположим, что существует решение $u \equiv u_0(x; \lambda)$ задачи $R(0)$, где $0 = (0, \dots, 0)$. Как правило, задача $R(0)$ линейная. При достаточно широких предположениях относительно $\mathcal{R}$ можно доказать, что, как только величина $|\alpha|$ достаточно мала, задача $R(\alpha)$ имеет решение $u \equiv u_\alpha(x; \lambda)$ и $u_\alpha(x; \lambda) \rightarrow u_0(x; \lambda)$ при $|\alpha| \rightarrow 0$. Этот подход реализован, например, в [22, 25].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-71-10015).

Предположим, что задача $R(\alpha')$, где $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_l, 0, \dots, 0)$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_l \neq 0$, остается нелинейной, но является в некотором смысле более простой, чем задача $R(\alpha)$. Допустим, что разрешимость задачи $R(\alpha')$ может быть установлена, и пусть $u \equiv u_{\alpha'}(x; \lambda)$ — ее решение. Тогда, при определенных условиях на $\mathcal{R}$, можно доказать, что если достаточно мала величина $|\alpha - \alpha'|$, то разрешима будет и задача $R(\alpha)$ и

$$u_{\alpha}(x; \lambda) \rightarrow u_{\alpha'}(x; \lambda) \quad \text{при } |\alpha - \alpha'| \rightarrow 0.$$

Обсуждаемый подход может оказаться полезным при выполнении следующих условий:

- (i) найдется такой вектор α' , что $R(\alpha')$, будучи более простой нелинейной задачей, может быть исследована каким-либо методом;
- (ii) решения задачи $R(\alpha')$ существуют не только для «малых» $|\alpha'|$;
- (iii) задача $R(\alpha')$ имеет решения, не связанные с решениями задачи $R(0)$.

Очевидно, что в случаях (ii), (iii) рассмотрение задачи $R(0)$ в качестве «невозмущенной» даст скудную информацию о решениях задачи $R(\alpha)$. Более того, задача $R(0)$ может не иметь решений.

В электродинамике нелинейных волноведущих структур возникают задачи, для которых справедливы ситуации (i)–(iii). Например, задачи, зависящие от скалярного параметра α и удовлетворяющие условиям (ii), (iii), изучались в [16, 24, 29]. В [27] введен широкий класс задач, зависящих от (векторного) параметра α , к которым применим изложенный выше подход.

Всюду ниже индексы i, j принимают значения $1, 2, \dots, n$. Пусть $\varepsilon_{l,i}, \varepsilon_{s,i}, A_i - 3n$ положительных постоянных и $\varepsilon_{l,i} > \varepsilon_{s,i} > 0$, $\alpha_{ij} - n^2$ неотрицательных постоянных, $\lambda_i - n$ положительных параметров. Пусть $I = (0, h)$, $\bar{I} = [0, h]$, где h — положительная постоянная.

Будем считать λ вектором, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, а α, α' и 0 — квадратными $(n \times n)$ -матрицами; при этом $\alpha = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\alpha' = \{\alpha'_{ij}\}_{i,j=1}^n$, где $\alpha'_{ii} = \alpha_{ii} > 0$ и $\alpha'_{ij} = 0$ при $i \neq j$, а 0 является нулевой $(n \times n)$ -матрицей.

Определим множества $\Lambda_i = (\varepsilon_{s,i}, +\infty)$, $\Lambda_i^* = (\varepsilon_{s,i}, \lambda_i^*)$, где λ_i^* — достаточно большие положительные постоянные. Выбор λ_i^* будет ясен из следствия 2.1 и теорем 2.4, 2.6. Считаем, что $\alpha_{ij} \in A_{ij}^*$, где $A_{ij}^* = (0, \alpha_{ii}^*)$. При этом α_{ii}^* — произвольные, но фиксированные положительные постоянные, а $\alpha_{ij}^*, i \neq j$, — положительные постоянные, которые зависят от α_{ii}^* и λ_i^* . Выбор α_{ij}^* при $i \neq j$ будет ясен из утверждения 2.4 и теорем 2.4, 2.6.

Обозначения $\prod_l C_l$ и $C_1 \times \dots \times C_k$ используются для определения (конечного) прямого произведения множеств C_l . Мы будем использовать произведения

$$\Lambda^* = \prod_i \Lambda_i^*, \quad \mathbf{A}^* = \prod_{i,j} A_{ij}^*.$$

Запись $\lambda \in \Lambda^*$ и $\alpha \in \mathbf{A}^*$ означает, что $\lambda_i \in \Lambda_i^*$ и $\alpha_{ij} \in A_{ij}^*$ соответственно. Как обычно $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

Рассмотрим систему n уравнений

$$\begin{cases} u_1'' = -(\varepsilon_{l,1} - \lambda_1)u_1 - (\alpha_{11}u_1^2 + \dots + \alpha_{1n}u_n^2)u_1, \\ \dots, \\ u_n'' = -(\varepsilon_{l,n} - \lambda_n)u_n - (\alpha_{n1}u_1^2 + \dots + \alpha_{nn}u_n^2)u_n, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $(\cdot)' \equiv d/dx$, $(x, \lambda, \alpha) \in \bar{I} \times \Lambda^* \times \mathbf{A}^*$. Решения системы (1.1) обозначим $u_i, u_i(x)$ или $u_i(x; \lambda, \alpha)$.

Задача $P = P(\alpha)$ заключается в нахождении тех значений вектора λ , для которых существует набор функций

$$u_1 \equiv u_1(x; \lambda, \alpha), \quad \dots, \quad u_n \equiv u_n(x; \lambda, \alpha), \quad (1.2)$$

удовлетворяющих системе (1.1) и краевым условиям

$$u_i(0) = A_i \neq 0, \quad \kappa_{s,i}u_i(0) - u_i'(0) = 0, \quad (1.3)$$

$$u_i(h) = 0, \quad (1.4)$$

где $\kappa_{s,i} = \sqrt{\lambda_i - \varepsilon_{s,i}} > 0$, и таких, что

$$u_1, \dots, u_n \in C^2(\bar{I}). \quad (1.5)$$

Величины $\kappa_{s,i}$ положительны (см. раздел 4); отсюда следует, что $\lambda_i > \varepsilon_{s,i}$.

Определение 1.1. Вектор $\lambda \in \Lambda^*$, для которого существует набор функций (1.2), удовлетворяющих (1.1), (1.3)–(1.5), называется *векторным собственным значением*, а отвечающая ему функция $u = (u_1, \dots, u_n)$ — *собственной функцией* задачи $P(\alpha)$.

Задача $P(\alpha')$ распадается на n независимых нелинейных задач, обозначаемых P_i и удовлетворяющих условиям (ii), (iii).

Рассмотрим уравнение

$$v_i'' = -(\varepsilon_{l,i} - \lambda_i)v_i - \alpha_{ii}v_i^3, \quad (1.6)$$

где $(\cdot)' \equiv d/dx$, $(x, \lambda_i, \alpha_{ii}) \in \bar{I} \times \Lambda_i \times \mathbb{R}_+$. Решения уравнения (1.6) обозначим v_i , $v_i(x)$ или $v_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii})$.

Задача P_i заключается в нахождении тех значений параметра λ_i , для которых существует функция

$$v_i \equiv v_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii}), \quad (1.7)$$

удовлетворяющая уравнению (1.6) и краевым условиям

$$v_i(0) = A_i \neq 0, \quad \kappa_{s,i}v_i(0) - v_i'(0) = 0, \quad (1.8)$$

$$v_i(h) = 0 \quad (1.9)$$

и такая, что

$$v_i \in C^2(\bar{I}). \quad (1.10)$$

Определение 1.2. Число $\lambda_i \in \Lambda_i$, для которого существует функция (1.7), удовлетворяющая (1.6), (1.8)–(1.10), называется *собственным значением*, а отвечающее ему решение v_i — *собственной функцией* задачи P_i .

В связи с введенными определениями важным является следующее замечание.

Замечание 1.1. Определение 1.2 является неклассическим аналогом известного определения характеристического числа линейной оператор-функции, нелинейно зависящей от спектрального параметра [6]. Определение 1.1 является многомерным обобщением определения 1.2.

Подчеркнем, что всюду ниже, когда речь идет о (векторных) собственных значениях, имеются в виду (векторные) собственные значения, введенные в определениях 1.1 и 1.2. Другими словами, приводимые ниже утверждения и теоремы не относятся к понятию собственного значения в общепотребительном смысле.

Задача $P(0)$, где $0 = (0, 0, \dots, 0)$, распадается на n (независимых) линейных задач, обозначаемых P_i^0 . Задача P_i^0 заключается в нахождении тех значений параметра λ_i , для которых существуют нетривиальное классическое решение $w_i \equiv w_i(x; \lambda_i)$ уравнения $w_i'' = -(\varepsilon_{l,i} - \lambda_i)w_i$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\kappa_{s,i}w_i(0; \lambda_i) - w_i'(0; \lambda_i) = 0, \quad w_i(h; \lambda_i) = 0.$$

Широко известные подходы нелинейного анализа, такие как вариационный метод [2, 15] и методы теории ветвления решений [3, 7], не применимы для исследования задач $P(\alpha)$ и P_i (см. также комментарии в работе [5]).

2. Результаты. Обозначим через $\bar{\lambda}_{k_1 \dots k_n} = (\bar{\lambda}_{1,k_1}, \dots, \bar{\lambda}_{n,k_n})$ векторные собственные значения задачи $P(\alpha)$ и через $\hat{\lambda}_{i,k'_i}$ и $\tilde{\lambda}_{i,k'_i}$ — собственные значения задач P_i и P_i^0 соответственно, где $k_1, \dots, k_n, k'_i$ — неотрицательные целочисленные индексы; считаем, что $\bar{\lambda}_{i,k_i}$, $\hat{\lambda}_{i,k'_i}$ и $\tilde{\lambda}_{i,k'_i}$ расположены в порядке возрастания. В некоторых случаях приведенные выше обозначения будут использоваться без индексов.

2.1. Задача P_i^0 . Начнем со следующего простого факта.

Утверждение 2.1. *Существует такое число $h_{\min} > 0$, что для любого $h > h_{\min}$ задача P_i^0 имеет конечное число (не меньше одного) простых (кратности 1) собственных значений $\tilde{\lambda}_{i,0}, \dots, \tilde{\lambda}_{i,k-1}$ и $\tilde{\lambda}_{i,k} \in (\varepsilon_{s,i}, \varepsilon_{l,i})$. Если $\varepsilon_{l,i} \leq \varepsilon_{s,i}$, задача $P_{0,i}$ (положительных) решений не имеет.*

Утверждение 2.1 можно получить исследуя уравнение

$$\kappa_{s,i} \sin(\kappa_{l,i} h) + \kappa_{l,i} \cos(\kappa_{l,i} h) = 0, \quad (2.1)$$

где $\kappa_{l,i} = \sqrt{\varepsilon_{l,i} - \lambda_i} > 0$. Уравнение (2.1) получается подстановкой точного решения уравнения задачи P_i^0 в отвечающие этой задаче краевые условия. Точное значение $h_{\min}$ также может быть найдено из (2.1).

Используя в качестве «невозмущенной» линейную задачу P_i^0 , можно доказать, что при достаточно малых α_{ii} в некоторой окрестности всякого собственного значения $\tilde{\lambda}_{i,k}$ задачи P_i^0 будет лежать собственное значение $\hat{\lambda}_{i,k}$ задачи P_i (см., например, [22]), а в окрестности набора $(\tilde{\lambda}_{1,k_1}, \dots, \tilde{\lambda}_{n,k_n})$ — собственное значение $\bar{\lambda}_{k_1, \dots, k_n}$ задачи $P(\alpha)$ (см. [25, 27]). Очевидно, что при $\varepsilon_{l,i} \leq \varepsilon_{s,i}$ такой подход неприменим для нахождения решений задач P_i и $P(\alpha)$, поскольку задача P_i^0 не имеет (положительных) решений.

2.2. Задача P_i . Учитывая условие (1.8), первый интеграл уравнения (1.6) имеет вид

$$v_i^2 = C_i - (\varepsilon_{l,i} - \lambda_i) v_i^2 - \frac{1}{2} \alpha_{ii} v_i^4, \quad (2.2)$$

где $C_i = A_i^2 (\frac{1}{2} \alpha_{ii} A_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \varepsilon_{s,i}) > 0$.

Пусть $v_i \equiv v_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii})$ — решение задачи Коши (1.6), (1.8), определенное глобально на $\bar{I}$. Это предположение, доказанное ниже, позволяет провести промежуточные выкладки, которые проливают свет на идею метода, разработанного в данной статье.

Рассмотрим функции

$$\theta_i = v_i^2, \quad \mu_i = v_i' / v_i, \quad (2.3)$$

где v_i — определенное выше решение задачи Коши. Функция $\theta_i \equiv \theta_i(x)$ определена и непрерывна при $x \in \bar{I}$; функция $\mu_i \equiv \mu_i(x)$ определена и непрерывна там, где v_i не обращается в нуль. Функции θ_i и μ_i зависят от λ_i, α_{ii} , но для сокращения обозначений мы часто не будем явно это указывать. Ясно, что функция v_i не может обращаться в какой-либо точке в нуль вместе со своей производной.

В силу (1.6) функции $\theta_i(x)$ и $\mu_i(x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \theta_i' = 2\theta_i \mu_i, \\ \mu_i' = -(\mu_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \alpha_{ii} \theta_i). \end{cases} \quad (2.4)$$

Учитывая (1.8) и (2.2), первый интеграл системы (2.4) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \alpha_{ii} \theta_i^2 + (\mu_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i) \theta_i = C_i. \quad (2.5)$$

Приравнивая правую часть второго уравнения (2.4) к нулю и используя (2.5), находим $\alpha_{ii} \theta_i^2 = -2C_i$. Поскольку $\alpha_{ii}, C_i > 0$, то полученное равенство не может быть верным. Это противоречие доказывает, что $\mu_i' < 0$ для всех $\lambda_i \in \Lambda_i$.

Учитывая (2.5), перепишем второе уравнение системы (2.4) в виде

$$\mu_i' = -\chi_i(\mu_i; \lambda_i), \quad (2.6)$$

где $\chi_i(\mu_i; \lambda_i) = \mu_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \alpha_{ii} \theta_i > 0$, а $\theta_i \equiv \theta_i(\mu_i; \lambda_i)$ можно найти из (2.5). Выражая θ_i из (2.5), принимая во внимание тот факт, что $\theta_i = v_i^2 \geq 0$, и подставляя найденное выражение во второе уравнение (2.4), получаем

$$\chi_i(\mu_i; \lambda_i) = ((\mu_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i)^2 + 2\alpha_{ii} C_i)^{1/2} > 0,$$

где $\min \chi_i(\mu_i; \lambda_i) = \sqrt{2\alpha_{ii} C_i}$.

Пусть v_i имеет $m'_i \geq 0$ нулей $x'_{i,r} \in I$, где $r = \overline{0, m'_i}$. Если $m'_i = 0$, то v_i не обращается в нуль при $x \in I$. Ясно, что если $v_i \not\equiv 0$, то $v'_i(x'_{i,k}) \neq 0$. Для сокращения обозначений мы используем индекс r , а не r'_i ; v_i и v_j при $i \neq j$ могут иметь разное число нулей.

Определим интервалы

$$I'_{i,0} = [0, x'_{i,1}), \quad I'_{i,r} = (x'_{i,r}, x'_{i,r+1}), \quad I'_{i,m'_i} = (x'_{i,m'_i}, h), \quad (2.7)$$

где $r = \overline{1, m'_i - 1}$; если $m'_i = 0$, то $I'_{i,0} = I$.

Из неравенства $\mu'_i < 0$ и условий (1.8)–(1.9) следуют формулы

$$\lim_{x \rightarrow +0} \theta_i(x) = A_i^2, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \mu_i(x) = \kappa_{s,i}, \quad (2.8)$$

$$\lim_{x \rightarrow x'_{i,r}} \theta_i(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x'_{i,r} \pm 0} \mu_i(x) = \pm \infty, \quad r = \overline{1, m'_i}, \quad (2.9)$$

$$\lim_{x \rightarrow h-0} \theta_i(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow h-0} \mu_i(x) = -\infty. \quad (2.10)$$

Интегрируя уравнение (2.6) на каждом из интервалов $I'_{i,r}$ и используя (2.8)–(2.9), получаем следующее утверждение.

Утверждение 2.2. *Задача Коши (1.6), (1.8) глобально однозначно разрешима при $x \in \bar{I}$, а ее (классическое) решение $v_i \equiv v_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii})$ гладко зависит от точки $(x, \lambda_i, \alpha_{ii}) \in \bar{I} \times \Lambda_i \times \mathbb{R}_+$; при этом справедлива формула*

$$\int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} + (m'_i - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} + \int_{\mu_i(h)}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} = h, \quad (2.11)$$

где $\mu_i(h)$ не задано.

Формула (2.11) при условии (2.10) дает уравнение, для которого имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1 (об эквивалентности). *Число $\hat{\lambda}_i$ является решением задачи P_i , если и только если существует такое целое число $m'_i = \hat{m}_i \geq 0$, что $\lambda_i = \hat{\lambda}_i$ при $m'_i = \hat{m}_i$ является решением уравнения*

$$\Phi_i(\lambda_i; m'_i) \equiv \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} + m'_i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} = h \quad (2.12)$$

при $m'_i = \hat{m}_i$; соответствующая собственная функция $v_i \equiv v_i(x; \hat{\lambda}_i, \alpha_{ii})$ имеет $\hat{m}_i$ (простых) нулей

$$x'_{i,r} = \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\chi_i(s; \hat{\lambda}_i)} + (r - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \hat{\lambda}_i)} \quad \text{при } r = \overline{1, \hat{m}_i}.$$

Замечание 2.1. Учитывая вид уравнения (2.12) и принимая во внимание теорему 2.1, уравнение $\Phi_i(\lambda_i; m'_i) = h$ естественно назвать *интегральным характеристическим уравнением*, а функцию $\Phi_i(\lambda_i; m'_i) - h$ — *интегральной характеристической функцией* задачи P_i .

Теорема 2.1 позволяет ввести следующее понятие.

Определение 2.1. Если $\lambda_i = \hat{\lambda}_i$ — решение уравнения (2.12) кратности p_i , то $\hat{\lambda}_i$ — собственное значение задачи P_i той же кратности.

Введем обозначение

$$T_i(\lambda_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \alpha_{ii}\theta_i(s)}, \quad (2.13)$$

где $\theta_i(s)$ определяется из (2.5) при $\mu_i = s$, $\chi_i(s; \lambda_i)$ определено в (2.6).

Для функции $\Phi_i(\lambda_i; m'_i)$ справедливы неравенства

$$m' T_i(\lambda_i) < \Phi_i(\lambda_i; m'_i) < (m' + 1) T_i(\lambda_i). \quad (2.14)$$

Неравенства (2.14) позволяют свести изучение разрешимости задачи P_i к изучению поведения $T_i(\lambda_i)$ при больших λ_i . В связи с неравенствами (2.14) полезным оказывается следующее утверждение.

Утверждение 2.3. *Функция $T_i(\lambda_i)$ является положительной и непрерывно зависит от $(\lambda_i, \alpha_{ii}) \in \Lambda_i \times \mathbb{R}_+$; при больших λ_i справедлива формула*

$$T_i(\lambda_i) = 2\lambda_i^{-1/2} \ln \lambda_i + O(\lambda_i^{1/2}). \quad (2.15)$$

Разрешимость задачи P_i устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.2. *Существует такое целое $m'_i \geq 0$, что для каждого целого $m \geq m'_i$ уравнение (2.12) имеет по крайней мере одно (положительное) решение $\hat{\lambda}_i = \hat{\lambda}_{i,m}$, где $\hat{\lambda}_{i,m} \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow +\infty$, и, следовательно, задача P_i имеет бесконечно много (положительных) собственных значений $\hat{\lambda}_{i,m}$ с точкой накопления на бесконечности. Кроме того,*

- (1) *если задача P_i^0 имеет p (положительных) решений $(\varepsilon_{s,i} <) \tilde{\lambda}_{i,0} < \tilde{\lambda}_{i,1} < \dots < \tilde{\lambda}_{i,p-1} (< \varepsilon_{l,i})$, то существует такая постоянная $\alpha''_{ii} > 0$, что для любого (положительного) $\alpha_{ii} = \alpha'_{ii} < \alpha''_{ii}$ справедливо*

$$\hat{\lambda}_{i,m} \in (\varepsilon_{s,i}, \varepsilon_{l,i}) \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha'_{ii} \rightarrow +0} \hat{\lambda}_{i,m} = \tilde{\lambda}_{i,m} \quad \text{при } m = \overline{0, p-1},$$

где $\tilde{\lambda}_{i,0}, \dots, \tilde{\lambda}_{i,p-1}$ — первые p решений задачи P_i при $\alpha_{ii} = \alpha'_{ii}$;

- (2) *если $m \geq p$, то $\lim_{\alpha_{ii} \rightarrow +0} \hat{\lambda}_{i,m} = +\infty$;*
 (3) *для больших λ_i и произвольного фиксированного $\Delta_i > 0$ имеет место асимптотическое неравенство*

$$(1 - \Delta_i) \lambda_i(m) < \hat{\lambda}_{i,m} < (1 + \Delta_i) \lambda_i(m + 1),$$

где $\lambda_i(m) = g^{-1}(h/2m)$, g^{-1} — функция, обратная к $g(t) = t^{-1/2} \ln t$;

- (4) $\max_{x \in (0, h)} |v_i(x; \hat{\lambda}_{i,m}, \alpha_{ii})| = O(\hat{\lambda}_{i,m}^{1/2})$ при $m \rightarrow \infty$.

Пункт (2) теоремы 2.2 показывает, что в задаче P_i существуют собственные значения, которые не связаны с решениями (линейной) задачи P_i^0 даже при $\alpha_{ii} \rightarrow +0$, и таких собственных значений бесконечное число.

Итак, каждая задача P_i имеет неограниченную последовательность $\{\hat{\lambda}_{i,m}\}_{m=m'_i}^\infty$ собственных значений. Используя утверждение 2.3 и теорему 2.2, получаем следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Последовательность $\{\hat{\lambda}_{i,m}\}_{m=m'_i}^\infty$ имеет подпоследовательность $\{\hat{\lambda}_{i,m_r}\}_{r=r'_i}^\infty$, где $\lim_{m_r \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_{i,m_r} = \infty$, обладающую следующими свойствами:*

- (1) *для любого m_r значение $\lambda_i = \hat{\lambda}_{i,m_r}$ удовлетворяет (2.12) при $m'_i = m_r$;*
 (2) *для любого m_r существует интервал $U_{i,m_r} = (\hat{\lambda}_{i,m_r} - \delta_{i,m_r}, \hat{\lambda}_{i,m_r} + \delta_{i,m_r})$, где $\delta_{i,m_r} > 0$ — постоянная, не содержащий других элементов последовательности $\{\hat{\lambda}_{i,m_r}\}_{r=r'_i}^\infty$ и такой, что функция $h - \Phi_i(\lambda_i; m_r)$ принимает значения разных знаков на разных концах интервала U_{i,m_r} .*

2.3. Задача P . Далее понадобится «интегральная» теорема непрерывности [11]. Следуя [11], рассмотрим нормальную систему уравнений

$$u'_i = f_i(x, u_1, \dots, u_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.16)$$

правые части которой зависят от параметров $\gamma_1, \dots, \gamma_l$. Система (2.16) может быть записана в векторной форме

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (2.17)$$

Будем предполагать, что правые части системы (2.16) определены и непрерывны вместе с их частными производными $\partial f_j(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma})/\partial u_i$ в некоторой области $\tilde{\Gamma}$ пространства $\tilde{R}$ переменных $x, u_1, \dots, u_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l$.

Теорема 2.3 (Л. С. Понтрягин [11]). Пусть $(x_0, \mathbf{u}_0, \boldsymbol{\gamma}_0)$ — некоторая точка области $\tilde{\Gamma}$ и $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ — решение уравнения (2.17), удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{\varphi}(x_0, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{u}_0$. Если решение $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma}_0)$ определено при $x \in \bar{I}$, то существует такое число $\gamma_0 > 0$, что при $|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0| < \gamma_0$ решение $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ определено на том же отрезке $\bar{I}$, а функция $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ непрерывна по совокупности переменных $x, \boldsymbol{\gamma}$ при $x \in \bar{I}$ и $|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0| < \gamma_0$.

Кроме того, $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma}) \rightarrow \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma}^*)$ равномерно по $x \in \bar{I}$ при $\boldsymbol{\gamma} \rightarrow \boldsymbol{\gamma}^*$, как только $|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}^*| < \gamma_0$.

Замечание 2.2. Теорема 2.3 сформулирована в [11] без дополнительного утверждения о равномерности стремления $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ к $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma}^*)$. Однако этот факт следует из доказательства, данного в [11].

Из утверждения 2.2 и теоремы 2.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.4. Существуют такие $\alpha_{ij}^* > 0$, что при $0 < \alpha_{ij} < \alpha_{ij}^*$ ($i \neq j$) задача Коши (1.1), (1.3) глобально однозначно разрешима при $x \in \bar{I}$, а ее (классическое) решение

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), \quad (2.18)$$

где $u_i \equiv u_i(x; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha})$, гладко зависит от точки $(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \in \bar{I} \times \boldsymbol{\Lambda}^* \times \boldsymbol{\Lambda}^*$. Кроме того, $u_i \rightarrow v_i$ равномерно по $x \in \bar{I}$ при $\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \boldsymbol{\alpha}'$, где $v_i \equiv v_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii})$ — решение задачи Коши (1.6), (1.8).

Далее считаем, что $(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \in \bar{I} \times \boldsymbol{\Lambda}^* \times \boldsymbol{\Lambda}^*$, где $\lambda_i^*, \alpha_{ii}^* > 0$ — фиксированные значения, при этом α_{ii}^* не обязательно малы, а α_{ij}^* при $i \neq j$, выбраны по $\lambda_i^*, \alpha_{ii}^*$ в смысле теоремы 2.4.

Предположим, что функции u_i , определенные формулами (2.18), имеют по $m_i \geq 0$ нулей $x_{i,r} \in I$ соответственно, где $r = \overline{0, m_i}$. Если $m_i = 0$, то u_i не обращается в нуль при $x \in I$. Ясно, что если $u_i \neq 0$, то $u_i'(x_{i,k_i}) \neq 0$. Здесь так же, как и в случае с однопараметрических задач (задачи P_i , см. с. 13) для сокращения обозначений мы используем индекс r , а не r_i ; u_i и u_j при $i \neq j$ могут иметь разное число нулей (и, конечно, индекс r не совпадает с одноименным индексом, введенным для функций v_i).

Определим интервалы

$$I_{i,0} = [0, x_{i,1}), \quad I_{i,r} = (x_{i,r}, x_{i,r+1}), \quad I_{i,m_i} = (x_{i,m_i}, h), \quad (2.19)$$

где $r = \overline{1, m_i - 1}$; если $m_i = 0$, то $I_{i,0} = I$.

Построим функции

$$\tau_i = u_i^2, \quad \eta_i = u_i'/u_i, \quad (2.20)$$

где u_i являются компонентами решения (2.18). Очевидно, функции $\tau_i \equiv \tau_i(x)$ определены и непрерывны при $x \in \bar{I}$; каждая из функций $\eta_i \equiv \eta_i(x)$ определена и непрерывна при $x \in I_{i,r}$, $r = \overline{0, m_i}$. Мы не указываем явно зависимость τ_i и η_i от $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}$ для сокращения обозначений.

В силу (1.1) функции $\tau_i(x)$ и $\eta_i(x)$ удовлетворяют системе из $2n$ уравнений

$$\begin{cases} \tau_i' = 2\tau_i\eta_i, \\ \eta_i' = - \left(\eta_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\tau_j \right), \end{cases} \quad (2.21)$$

где правые части определены там, где определены η_i .

Используя теорему 2.4, получаем следующий факт.

Рис. 1. Функция $\eta_i(x; \lambda)$ и отображение $g_{i,r}$.

Утверждение 2.4. Пусть функция $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, где $u_i \equiv u_i(x; \lambda, \alpha)$, определена формулой (2.18). Тогда существуют такие постоянные $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^0 > 0$ при $i \neq j$ и δ_i , что

$$\eta_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \tau_j \geq \sqrt{2\alpha_{ii} C_i} - \delta_i > 0 \quad (2.22)$$

для всех $(x, \lambda, \alpha) \in \mathbf{x}_i \times \Lambda^* \times \mathbf{A}^0$, соответственно, где левые части выражений (2.22) определены в (2.21), $\mathbf{x}_i = \bigcup_{r=0}^{m_i} I_{i,r}$, $\mathbf{A}^0 = \prod_{ij} A_{ij}^0$ при $A_{ii}^0 = A_{ii}^*$, $A_{ij}^0 = (0, \alpha_{ij}^0)$ при $i \neq j$, и значения δ_i могут быть выбраны так, что $|\delta_i|$ будут меньше чем любая (фиксированная) постоянная $\delta > 0$ как только величина $|\alpha - \alpha'|$ будет достаточно мала; C_i определены в (2.2).

Далее считаем, что параметры α_{ij}^* в A_{ij} при $i \neq j$ и δ_i выбраны так, что $0 < \alpha_{ij}^* \leq \alpha_{ij}^0$, а $|\delta_i| \leq \delta$, где $\delta > 0$ — фиксированное достаточно малое число.

Из утверждения 2.4 следует, что $\eta_i' < 0$ при всех $(x, \lambda, \alpha) \in \mathbf{x}_i \times \Lambda^* \times \mathbf{A}^*$. Это значит, что η_i монотонно убывает от $\kappa_{s,i}$ до $-\infty$ при $x \in I_{i,0}$, от $+\infty$ до $-\infty$ при $x \in I_{i,r}$, где $k = \overline{1, m_i}$. Другими словами, возникают естественные непрерывные биекции

$$g_{i,0} : (-\infty, \kappa_{s,i}) \rightarrow I_{i,0} : \eta_i \mapsto x, \\ g_{i,r} : (-\infty, +\infty) \rightarrow I_{i,r} : \eta_i \mapsto x, \quad \text{где } r = \overline{1, m_i},$$

при $i = \overline{1, n}$. Эти биекции позволяют определить (непрерывные) функции $\tau_i(x)$, где $x \equiv g_{i,r}(\eta_i)$, на каждом интервале вида $I_{i,r}$ (см. рис 1). Подчеркнем, что каждая из функций $\tau_i(g_{i,r}(\eta_i))$ определена для всех $r = \overline{0, m_i}$. Проведенные построения позволяют придать смысл выражениям

$$T(\lambda; I_{i,0}) = \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{s^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \tau_j(g_{i,0}(s))}, \quad (2.23)$$

$$T(\lambda; I_{i,r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \tau_j(g_{i,r}(s))}, \quad r = \overline{1, m_i}. \quad (2.24)$$

Принимая во внимание проведенные рассуждения, можно видеть, что аналогичные непрерывные биекции $g'_{i,r}$ могут быть построены с помощью второго уравнения в (2.4) и функций μ_i .

Теорема 2.5 (об эквивалентности). Вектор $\bar{\lambda} \in \Lambda^*$ является векторным собственным значением задачи $P(\alpha)$, если и только если существуют такие целые числа $m_i = \bar{m}_i \geq 0$, что $\lambda = \bar{\lambda}$ при $m_i = \bar{m}_i$ является решением системы уравнений

$$\sum_{r=0}^{m_i} T(\lambda; I_{i,r}) = h; \quad (2.25)$$

при этом компонента $u_i \equiv u_i(x; \bar{\lambda}, \alpha)$ собственной функции $u = (u_1, \dots, u_n)$ имеет $\bar{m}_i$ (простых) нулей $x_{i,r} = \sum_{k=0}^{r-1} T(\lambda; I_{i,k})$ на I , где $r = \overline{1, \bar{m}_i}$.

В связи с теоремой 2.5 можно ввести понятия (векторного) интегрального характеристического уравнения и (векторной) интегральной характеристической функции задачи $P(\alpha)$, аналогично тому как это сделано для задачи P_i , см. замечание 2.1 на стр. 13.

Теорема 2.5 позволяет ввести следующее определение.

Определение 2.2. Если вектор $\lambda = \bar{\lambda}$ является решением системы уравнений (2.25) кратности p , то $\bar{\lambda}$ — векторное собственное задачи $P(\alpha)$ той же кратности.

Используя теорему 2.4 и введенные выше биекции $g_{i,r}$, получаем следующий факт.

Следствие 2.2. Если $\lambda \in \Lambda^*$ и $\alpha \rightarrow \alpha'$, то

$$\sum_{r=0}^{m_i} T(\lambda; I_{i,r}) \rightarrow \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\chi(s; \lambda_i)} + m_i T_i(\lambda_i). \quad (2.26)$$

Вычитая из левой и правой частей уравнений (2.25) левую часть формулы (2.12) при $m'_i = m_i$, получаем систему уравнений

$$\sum_{r=0}^{m_i} T(\lambda; I_{i,r}) - \Phi_i(\lambda_i; m_i) = h - \Phi_i(\lambda_i; m_i). \quad (2.27)$$

Можно показать, что левые части (2.27) достаточно малы, как только величина $|\alpha - \alpha'|$ достаточно мала. Нули правых частей (2.27) — собственные значения задач P_i , удовлетворяющие следствию 2.1 (их имеется бесконечное число). Но тогда для каждого такого собственного значения найдется такой содержащий его интервал, что отвечающая этому собственному значению правая часть в (2.27) принимает значения разных знаков на противоположных концах этого интервала. Из этого рассуждения вытекает следующая основная теорема.

Теорема 2.6. Пусть каждая из задач P_i имеет m_i собственных значений $\hat{\lambda}_{i,1}, \dots, \hat{\lambda}_{i,m_i} \in \Lambda_i^* \subset \Lambda_i$, удовлетворяющих следствию 2.1. Тогда найдутся такие положительные постоянные α_{ij}^* при $i \neq j$, что для любых $0 < \alpha_{ij} < \alpha_{ij}^*$ ($i \neq j$) задача $P(\alpha)$ имеет по крайней мере $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$ векторных собственных значений $\bar{\lambda}_{k_1, k_2, \dots, k_n} = (\bar{\lambda}_{1, k_1}, \bar{\lambda}_{2, k_2}, \dots, \bar{\lambda}_{n, k_n})$, где $k_i = \overline{1, m_i}$; при этом каждое $\bar{\lambda}_{k_1, k_2, \dots, k_n} \in U_{1, k_1} \times \dots \times U_{n, k_n}$, где $\hat{\lambda}_{i, k_i} \in U_{i, k_i}$.

Следствие 2.3. Если хотя бы одно из собственных значений $\hat{\lambda}_{1, k_1}, \dots, \hat{\lambda}_{n, k_n}$ обладает свойством (2) теоремы 2.2, $(\hat{\lambda}_{1, k_1}, \dots, \hat{\lambda}_{n, k_n}) \in \Lambda^*$ и все $\hat{\lambda}_{1, k_1}, \dots, \hat{\lambda}_{n, k_n}$ выбраны в соответствии со следствием 2.1, то при достаточно малой величине $|\alpha - \alpha'|$ в окрестности $(\hat{\lambda}_{1, k_1}, \dots, \hat{\lambda}_{n, k_n})$ найдется по крайней мере одно векторное собственное значение $\bar{\lambda}$ задачи $P(\alpha)$, и это векторное собственное значение не вырождается в набор собственных значений задач P_i^0 при $|\alpha - \alpha'| \rightarrow 0$.

Замечание 2.3. Числа λ_i^* выбираются достаточно большими, чтобы каждый интервал $(\varepsilon_{l,i}, \lambda_i^*)$ содержал собственное значение $\hat{\lambda}_{i,k}$ задачи P_i , удовлетворяющее следствию 2.1; числа $\alpha_{ii}^* > 0$ могут быть выбраны без каких-либо дополнительных условий. Интервал $(\varepsilon_{l,i}, \lambda_i^*)$ не содержит решений задач P_i^0 . После того как зафиксированы параметры λ_i^* и α_{ii}^* , в соответствии с теоремой 2.4 и утверждением 2.4 фиксируются (достаточно малые) параметры α_{ij}^* при $i \neq j$.

Поскольку числа λ_i^* в Λ_i заданы произвольно, а значит, могут быть выбраны достаточно большими, то теорема 2.2 утверждает существование векторных собственных значений $\bar{\lambda}_{k_1, \dots, k_n} = (\bar{\lambda}_{1, k_1}, \dots, \bar{\lambda}_{n, k_n})$ задачи $P(\alpha)$ в том числе в области, в которой отсутствуют собственные значения задач P_i^0 . Насколько известно, подобный результат в многопараметрических задачах рассмотренного в статье типа не был известен ранее. Теорема 2.6 также дает существование тех собственных значений $\bar{\lambda}_{k_1, \dots, k_n}$, которые являются возмущениями наборов решений $(\tilde{\lambda}_{1, k_1}, \dots, \tilde{\lambda}_{n, k_n})$ линейных задач P_i^0 . Аналогичный результат в некоторых нелинейных задачах ранее был получен с помощью интегральных уравнений (см. [25, 27, 30] и приведенную там библиографию).

Теорема 2.6 утверждает существование лишь конечного числа векторных собственных значений задачи $P(\alpha)$. Учитывая, что каждая из задач P_i имеет бесконечное число собственных значений, можно предположить, что задача $P(\alpha)$ также имеет бесконечное число решений. Доказательство этого результата хотя бы для малых α_{ij}^* явилось бы следующим существенным продвижением. Очевидное препятствие к получению такого результата — отсутствие глобальной однозначной разрешимости задачи Коши (1.1), (1.3) при $(x, \lambda, \alpha) \in \bar{I} \times \Lambda \times \mathbb{R}_+^{n^2}$ или $(x, \lambda, \alpha) \in \bar{I} \times \Lambda \times \mathbf{A}^*$. Еще одним препятствием является неограниченный рост тах собственных функций v_i при $\hat{\lambda}_i \rightarrow +\infty$ (см. п. (4) теоремы 2.2). Ограниченность v_i существенно используется при доказательстве следствия 2.2. Вероятно, что последнее затруднение можно преодолеть, используя подходящую «нормировку» собственных функций, как это сделано при доказательстве утверждения 2.1 в [29].

3. Доказательства.

Доказательство утверждения 2.2. Введем переменные $\bar{v}_i = v_i / \sqrt{\lambda_i}$; тогда из (2.2) следует, что $\bar{v}_i^2$ ограничены для всех $\lambda_i \in \Lambda_i$, $\bar{v}_i'^2$ ограничены для конечных λ_i и $\bar{v}_i'^2 = \lambda_i / 2\alpha_{ii} + O(1)$ для больших λ_i . Из указанной ограниченности и проведенного ниже анализа следует результат о глобальной однозначной разрешимости.

Из формул (2.8)–(2.10) известно поведение μ_i в окрестностях концевых точек каждого из интервалов $I'_{i,r}$. Пусть

$$\begin{aligned} \mu_{i,0}^+ &= \mu_i(0+0) = \kappa_{s,i}, & \mu_{i,r}^- &= \mu_i(x'_{i,r} - 0) = -\infty, \\ \mu_{i,m'_i+1}^- &= \mu_i(h-0) = \mu_i(h), & \mu_{i,r}^+ &= \mu_i(x'_{i,r} + 0) = +\infty, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $r = \overline{1, m'_i}$, обозначают предельные значения функции μ_i в упомянутых концевых точках. Мы намеренно используем $\mu_i(h)$, а не $-\infty$, чтобы подчеркнуть, что значение $\mu_i(h)$ в этом доказательстве не задано.

Будем интегрировать уравнение (2.6) на каждом интервале $I'_{i,r}$:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\mu_i(x)}^{\mu_{i,1}^-} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} = x + c'_{i,0}, & x \in I'_{i,0}; \\ & - \int_{\mu_{i,r}^+}^{\mu_i(x)} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} = x + c'_{i,r}, & x \in I'_{i,r}, \quad r = \overline{1, m'_i - 1}; \\ & - \int_{\mu_{i,m'_i}^+}^{\mu_i(x)} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} = x + c'_{i,m'_i}, & x \in I'_{i,m'_i}. \end{aligned} \right. \quad (3.2)$$

Подставляя $x = 0+0$, $x = x'_{i,r+1} - 0$, $x = h-0$ соответственно в первую, вторую и третью строки (3.2), получаем $c'_{i,0}$, $c'_{i,r}$ и c'_{i,m'_i} , где $r = \overline{1, m'_i - 1}$. Используя найденные $c'_{i,r}$ в (3.2), подставляя $x = x'_{i,1} - 0$, $x = x'_{i,k} + 0$, $x = x'_{i,m'_i} + 0$ соответственно в первую, вторую, третью строки

предыдущей системы, заменяя $\mu_{i,k}^\pm$ в (3.2) в соответствии с (3.1), получаем

$$\begin{cases} 0 < x'_{i,1} = \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)}, \\ 0 < x'_{i,r+1} - x'_{i,r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)}, \quad r = \overline{1, m'_i - 1}; \\ 0 < h - x'_{i,m'_i} = \int_{\mu_i(h)}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Подробно эта процедура представлена в [26].

Поскольку левые части в (3.3) конечны, то таковы же и правые части. Отсюда следует сходимость всех несобственных интегралов в правых частях.

Суммируя все члены в (3.3), находим

$$\begin{aligned} x'_{i,1} + x'_{i,2} - x'_{i,1} + x'_{i,3} - x'_{i,2} + \dots + x'_{i,m'_i} - x'_{i,m'_i-1} + h - x'_{i,m'_i} = \\ = \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} + (m'_i - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} + \int_{\mu_i(h)}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)}. \end{aligned}$$

Формула (2.11) следует из полученного соотношения.

Проведенные выкладки позволяют утверждать, что решение $v_i \equiv v_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii})$ задачи Коши (1.6), (1.8) существует и определено глобально при $x \in \bar{\mathbb{I}}$. Единственность этого решения и его гладкость по $(x, \lambda_i, \alpha_{ii}) \in \bar{\mathbb{I}} \times \Lambda_i \times \mathbb{R}_+$ следует из гладкости правой части уравнения (1.6) по v_i, λ_i и α_{ii} (см. [11]). $\square$

Доказательство утверждения 2.1. Так как $v_i(h) = 0$, а функция μ_i убывает, то, как легко видеть, $\lim_{x \rightarrow h-0} \mu_i(x) = -\infty$. Теперь уравнение (2.12) получается из формулы (2.11) при условии (2.10).

Тот факт, что всякое решение (собственное значение) задачи P_i удовлетворяет уравнению (2.12) с некоторым $m'_i = \hat{m}_i$, следует из выкладок, проведенных при доказательстве утверждения 2.2. Докажем, что всякое (положительное) решение уравнения (2.12) является собственным значением задачи P_i . Пусть $\lambda_i = \hat{\lambda}_i$ — решение (2.12) при $m'_i = \hat{m}_i$. Рассмотрим задачу Коши (1.6), (1.8) при $\lambda_i = \hat{\lambda}_i$. Из утверждения 2.2 получаем, что решение $v_i \equiv v_i(x; \hat{\lambda}_i, \alpha_{ii})$ указанной задачи Коши существует, единственно и определено глобально при $x \in \bar{\mathbb{I}}$.

Используя решение v_i , построим функции $\theta_i = v_i^2$ и $\mu_i = v'_i/v_i$. Ясно, что $\theta_i(0) = A_i^2$ и $\mu_i(0) = \kappa_{s,i}$. На этом шаге мы не утверждаем, что условие $\lim_{x \rightarrow h-0} \mu_i(x; \hat{\lambda}_i) = -\infty$ выполняется. Положим для определенности $\mu_i(h) = v'_i(h)/v_i(h) = a > -\infty$. С помощью найденных θ_i и μ_i построим выражение, аналогичное (2.12); получаем

$$\int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\chi_i(s; \hat{\lambda}_i)} + (\hat{m}_i - 1)T_i(\hat{\lambda}_i) + \int_a^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \hat{\lambda}_i)} = h. \quad (3.4)$$

В силу единственности решения задачи Коши (1.6), (1.8) подынтегральное выражение в (3.4) совпадает с аналогичным в (2.12). В то же время $\lambda_i = \hat{\lambda}_i$ удовлетворяет (2.12) при $m'_i = \hat{m}_i$. Вычитая (2.12) из (3.4), получаем

$$\int_a^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \hat{\lambda}_i)} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \hat{\lambda}_i)} = - \int_{-\infty}^a \frac{ds}{\chi_i(s; \hat{\lambda}_i)} = 0. \quad (3.5)$$

В силу очевидной оценки

$$\int_{-\infty}^a \frac{ds}{\chi_i(s; \widehat{\lambda}_i)} > 0$$

получаем, что (3.5) справедливо только если $a = -\infty$, но тогда $\widehat{\lambda}_i$ — собственное значение.

Формула для нулей $x'_{i,k}$ собственной функции v_i следует из формул (3.3). $\square$

Доказательство утверждения 2.3. Из (2.6) и (2.13) следует, что функция $T_i(\lambda_i)$ положительна и непрерывно зависит от $(\lambda_i, \alpha_{ii}) \in \Lambda_i \times \mathbb{R}_+$.

Неравенства

$$2\lambda_i^{1/2} \ln \lambda_i + O(\lambda_i^{1/2}) \leq T_i(\lambda_i) \leq 2\sqrt{2}\lambda_i^{1/2} \ln \lambda_i + O(\lambda_i^{1/2})$$

следуют из очевидных оценок

$$T_i^* \leq T_i(\lambda_i) \leq \sqrt{2}T_i^*, \quad (3.6)$$

где

$$T_i^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{|s^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i| + \sqrt{2\alpha_{ii}C_i}}$$

(см. [24]). $\square$

Доказательство теоремы 2.2. Ниже представлено сокращенное доказательство; полные выкладки проведены в [24].

Из (2.15) следует, что $\lim_{\lambda_i \rightarrow +\infty} T_i = 0$. Это означает, что существует такое целое число $m'_i \geq 0$, что для каждого целого $m \geq m'_i$ уравнение (2.12) имеет по крайней мере одно положительное решение $\lambda_i = \widehat{\lambda}_{i,m}$. Таким образом, существует бесконечное число положительных решений.

Пусть $\lambda_i \in [\varepsilon_{s,i} + \delta, \varepsilon_{l,i} - \delta]$, где $\delta > 0$ — достаточно малая величина. Переходя к пределу $\alpha_{ii} \rightarrow +0$ в (2.12), получаем уравнение

$$\widetilde{\Phi}_i(\lambda_i; m'_i) \equiv \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\widetilde{\chi}_i(s; \lambda_i)} + m'_i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\widetilde{\chi}_i(s; \lambda_i)} = h,$$

где $\widetilde{\chi}_i(s; \lambda_i) = s^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i$. Вычислив интегралы и преобразуя, получаем уравнение (2.1), где можно взять $\lambda_i \in (\varepsilon_{s,i}, \varepsilon_{l,i})$. Указанный предельный переход дает связь между решениями задач P_i и P_i^0 .

Свойство (2) следует из (3.6).

Двустороннее асимптотическое неравенство вытекает из (2.12), (2.14) и (2.15).

Если собственная функция v_i имеет два или более нулей внутри $\bar{I}$, тогда она имеет (локальный) экстремум $v_{i,\text{ext}}$ внутри I . Пусть этот экстремум достигается при $x = x^*$, то есть $v'_i(x^*) = 0$. Используя (2.2) в указанной точке, можно получить биквадратное уравнение относительно $v_{i,\text{ext}}$. Решив это уравнение и положив λ_i достаточно большой величиной, получаем пункт (4) теоремы. $\square$

Доказательство теоремы 2.4. Утверждение теоремы 2.4 является прямым следствием применения теоремы 2.3 к задаче Коши (1.1), (1.3) при дополнительном предположении о глобальной однозначной разрешимости задач Коши (1.6), (1.8) при $(x, \lambda_i, \alpha_{ii}) \in \bar{I} \times \Lambda_i \times A$. Справедливость этого дополнительного предположения гарантируется утверждением 2.2. Гладкость решения задачи Коши (1.1), (1.3) по $(x, \lambda, \alpha) \in \bar{I} \times \Lambda^* \times A^*$ следует из гладкости правых частей системы (1.1) по u_i , λ_i и α_{ij} (см. [21]). $\square$

Доказательство утверждения 2.4. Из теоремы 2.4 следует, что если $\lambda \in \Lambda^*$ и $\alpha \rightarrow \alpha'$, то

$$u_i(x; \lambda, \alpha) \rightarrow v_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii}), \quad u'_i(x; \lambda, \alpha) \rightarrow v'_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii}) \quad (3.7)$$

равномерно по x при $x \in \bar{I}$, где $u_i(x; \lambda_i, \alpha)$ — решение задачи Коши (1.1), (1.3), а $v_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii})$ — решение задачи Коши (1.6), (1.8).

Строго говоря, необходимо отдельно доказывать равномерное стремление u'_i к v'_i по x при $x \in \bar{I}$ и $\alpha \rightarrow \alpha'$. Но этот факт следует из глобальной однозначной разрешимости задачи Коши (1.1), (1.3) и гладкости правых частей уравнений (1.1) по u_i .

Из формул (3.7) следует если $\lambda \in \Lambda^*$ и $\alpha \rightarrow \alpha'$, то

$$\tau_i(x; \lambda, \alpha) \rightarrow \theta_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii}) \quad (3.8)$$

равномерно по x при $x \in \bar{I}$; здесь $\tau_i(x; \lambda, \alpha)$ и $\theta_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii})$ определены формулами (2.20) и (2.3) соответственно.

При x , лежащем достаточно близко к любому из концов интервала $I_{i,r}$, неравенства (2.22), очевидно, выполняются. Действительно, величина λ_i ограничена, а все остальные слагаемые в указанных формулах положительны, при этом величины $\eta_i^2(x)$ достаточно велики. Таким образом, остается доказать справедливость неравенств (2.22) только на некоторых замкнутых множествах $\bar{I}_{i,r}$, каждое из которых лежит строго внутри интервала $I_{i,r}$.

Итак, на каждом множестве $\bar{I}_{i,r}$ соответствующая функция $\eta_i(x)$ ограничена и непрерывна. Введем аналогичным образом замкнутые множества $\bar{I}'_{i,r}$, лежащие строго внутри $\bar{I}_{i,r}$ (см. формулы (2.7)). На каждом множестве $\bar{I}'_{i,r}$ соответствующая функция $\mu_i(x)$ ограничена и непрерывна.

Пусть

$$x'_i = \left(\bigcup_{r=0}^{m_i} \bar{I}_{i,r} \right) \cap \left(\bigcup_{r=0}^{m'_i} \bar{I}'_{i,r} \right).$$

Таким образом, функции $\eta_i(x)$ и $\mu_i(x)$ определены и ограничены на (замкнутом) множестве x'_i . Но тогда в силу формул (3.7) получаем

$$\eta_i(x; \lambda, \alpha) \rightarrow \mu_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii}) \quad (3.9)$$

равномерно по x при $x \in x'_i$, как только $\lambda \in \Lambda^*$ и $\alpha \rightarrow \alpha'$.

В силу формул (3.8) и (3.9) получаем, что

$$\eta_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \tau_j \rightarrow \mu_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \alpha_{ii} \theta_i$$

при $\alpha \rightarrow \alpha'$ равномерно по x при $(x, \lambda) \in x'_i \times \Lambda^*$.

Из формул (2.4), (2.6) следует, что $\mu_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \alpha_{ii} \theta_i \geq \sqrt{2\alpha_{ii} C_i}$ при $x \in x_i$. Тогда, в силу теоремы 2.4, можно выбрать такие положительные числа α_{ij}^0 , $i \neq j$, что неравенства (2.22) будут выполняться при $(x, \lambda, \alpha) \in x'_i \times \Lambda^* \times \Lambda^*$. При этом α_{ij} ($i \neq j$) выбраны так, что если $x \in x_i \setminus x'_i$, то неравенства (2.22) выполняются. Как и выше, считаем, что $\alpha_{ij}^* \leq \alpha_{ij}^0$ при $i \neq j$.

Из проведенных рассуждений следует, что δ_i можно выбрать так, что $|\delta_i|$ меньше любого фиксированного $\delta > 0$, при условии, что величина $|\alpha - \alpha'|$ достаточно мала.

Объединяя полученные результаты, заключаем, что неравенства (2.22) выполняются при $(x, \lambda, \alpha) \in x_i \times \Lambda^* \times \Lambda^*$. $\square$

Доказательство утверждения 2.5. Из теоремы 2.4 следует, что задача Коши (1.1), (1.3) глобально однозначно разрешима при $(x, \lambda, \alpha) \in \bar{I} \times \Lambda^* \times \Lambda^*$. Пусть ее решение определено формулами (2.18); при этом $A_i \neq 0$, и тогда все $u_i \neq 0$.

Из утверждения 2.4 следует, что функция $\eta_i(x) = u'_i(x)/u_i(x)$ монотонно убывает на каждом из интервалов $I_{i,r}$, $r = \overline{0, m_i}$ (см. формулу (2.19)). Отметим, что поскольку $u_i \neq 0$, то $u'_i(x_{i,r}) \neq 0$ для всех $r = \overline{0, m_i}$.

Тогда в окрестностях концевых точек каждого из интервалов $I_{i,r}$ получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \tau_i(x) &= A_i^2, & \eta_{i,0} &= \lim_{x \rightarrow +0} \eta_i(x) = \kappa_{s,i}, \\ \lim_{x \rightarrow x_{i,r}} \tau_i(x) &= 0, & \eta_{i,r}^\pm &= \lim_{x \rightarrow x_{i,r} \pm 0} \eta_i(x) = \pm\infty, \end{aligned}$$

где $r = \overline{1, m_i + 1}$.

В п. 2.3 были введены (непрерывные) взаимно однозначные отображения $g_{i,r}$, которые позволяют определять функции $\tau_i(x)$ при $x \equiv g_{i,r}(\eta_i)$ на каждом интервале $I_{i,r}$. Тогда можно определить функции

$$\varsigma_{i,r}(\eta_i; \boldsymbol{\lambda}) = \eta_i^2 + \varepsilon_{l,i} - \lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \tau_j(g_{i,r}(\eta_i)), \quad (3.10)$$

которые отвечают правым частям уравнений (2.21). Индекс r отвечает интервалу $I_{i,r}$, на котором рассматривается выражение $\varsigma_{i,r}(\eta_i; \boldsymbol{\lambda})$.

Интегрируя уравнение $\eta'_i = \varsigma_{i,r}(\eta_i; \boldsymbol{\lambda})$ на каждом интервале $I_{i,r}$, получаем

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_{\eta_i(x)}^{\eta_{i,1}^-} \frac{ds}{\varsigma_{i,0}(s; \boldsymbol{\lambda})} = x + c_{i,0}, & x \in I_{i,0}; \\ - \int_{\eta_{i,r}^+}^{\eta_i(x)} \frac{ds}{\varsigma_{i,r}(s; \boldsymbol{\lambda})} = x + c_{i,r}, & x \in I_{i,r}, \quad r = \overline{1, m_i - 1}; \\ - \int_{\eta_{i,m_i}^+}^{\eta_i(x)} \frac{ds}{\varsigma_{i,m_i}(s; \boldsymbol{\lambda})} = x + c_{i,m_i}, & x \in I_{i,m_i}. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Подставляя $x = 0 + 0$, $x = x_{i,r+1} - 0$, $x = h - 0$ соответственно в первую, вторую и третью строки (3.11), определяем $c_{i,r}$. Подставляя найденные $c_{i,r}$ в (3.11), а затем подставляя $x = x_{i,1} - 0$, $x = x_{i,r} + 0$, $x = x_{i,m_i} + 0$ соответственно в первую, вторую, третью строки полученной системы и заменяя $\eta_{i,0}$, $\eta_{i,r}^\pm$ и η_{i,m_i+1} на $\kappa_{s,i}$, $\pm\infty$ и $-\infty$ соответственно, получаем

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 < x_{i,1} = \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\varsigma_{i,0}(s; \boldsymbol{\lambda})}, \\ 0 < x_{i,r+1} - x_{i,r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\varsigma_{i,r}(s; \boldsymbol{\lambda})}, & r = \overline{1, m_i - 1}; \\ 0 < h - x_{i,m_i} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\varsigma_{i,m_i}(s; \boldsymbol{\lambda})}. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Формулы (3.12) дают расстояния между двумя соседними нулями u_i . Поскольку левые части в (3.12) конечны, то таковы же и правые части. Отсюда следует сходимость всех несобственных интегралов в правых частях.

Суммируя все члены в (3.12), находим

$$x_{i,1} + x_{i,2} - x_{i,1} + x_{i,3} - x_{i,2} + \dots + x_{i,m_i} - x_{i,m_i-1} + h - x_{i,m_i} = \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\varsigma_{i,0}(s; \boldsymbol{\lambda})} + \sum_{r=1}^{m_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\varsigma_{i,r}(s; \boldsymbol{\lambda})}.$$

Из полученной формулы с учетом обозначений (2.23)–(2.24) следует (2.25).

Из проведенного рассуждения следует, что всякое решение (векторное собственное значение) задачи $P(\boldsymbol{\alpha})$ удовлетворяет системе уравнений (2.25) с некоторыми $m_i = \tilde{m}_i$.

Докажем, что всякое решение (2.25) является векторным собственным значением задачи $P(\boldsymbol{\alpha})$. Пусть $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — решение (2.25) при $m_i = \tilde{m}_i$. Рассмотрим задачу Коши (1.1), (1.3). Принимая во внимание теорему 2.4, получаем, что решение $u_i \equiv u_i(x; \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\alpha})$ указанной задачи Коши существует, единственно и определено глобально при $x \in \bar{I}$, где $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbf{A}^* \times \mathbf{A}^*$. Используя это решение, построим функции $\tau_i = u_i^2$ и $\eta_i = u'_i/u_i$. Ясно, что $\tau_i(0) = A_i^2$ и $\eta_i(0) = \kappa_{s,i}$. Пока

мы не утверждаем, что условие $\lim_{x \rightarrow h-0} \eta_i(x; \bar{\lambda}) = -\infty$ выполняется. Пусть для определенности $\tau_i(h) = u'_i(h)/u_i(h) = a > -\infty$. С помощью найденных τ_i и η_i построим выражение, аналогичное одному из выражений (2.25); получаем

$$\int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\varsigma_{i,0}(s; \bar{\lambda})} + \sum_{r=1}^{\bar{m}_i-1} T(\bar{\lambda}; I_{i,r}) + \int_a^{+\infty} \frac{ds}{\varsigma_{i,\bar{m}_i}(s; \bar{\lambda})} = h. \quad (3.13)$$

В силу единственности решения задачи Коши (1.1), (1.3) подынтегральные выражения в (3.13) совпадают с соответственными выражениями в (2.25). В тоже время $\lambda = \bar{\lambda}$ удовлетворяет (2.25). Вычитая соответствующую строку (2.25) из (3.13), получаем

$$\int_a^{+\infty} \frac{ds}{\varsigma_{i,\bar{m}_i}(s; \bar{\lambda})} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\varsigma_{i,\bar{m}_i}(s; \bar{\lambda})} = - \int_{-\infty}^a \frac{ds}{\varsigma_{i,\bar{m}_i}(s; \bar{\lambda})} = 0. \quad (3.14)$$

Это означает, что (3.14) выполняется тогда и только тогда, когда $a = -\infty$. Следовательно, $\bar{\lambda}$ — векторное собственное значение задачи $P(\alpha)$. $\square$

Доказательство следствия 2.2. Рассмотрим разность

$$d_i = \sum_{r=0}^{m_i} T(\lambda; I_{i,r}) - \Phi_i(\lambda_i; m_i) = \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\varsigma_{i,0}(s; \lambda)} - \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} + \sum_{r=1}^{m_i} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\varsigma_{i,r}(s; \lambda)} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)} \right), \quad (3.15)$$

где функции $\chi_i(s; \lambda_i)$ и $\varsigma_{i,r}(s; \lambda)$ определены в (2.6) и (3.10) соответственно.

Выпишем отдельно одно из слагаемых в правой части получившегося выражения (3.15); например, при $i = i'$ и $r = r'$ получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\varsigma_{i',r'}(s; \lambda)} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_{i'}(s; \lambda_{i'})} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_{i'i'}(\theta_{i'}(x') - \tau_{i'}(x)) - \sum' \alpha_{i'j} \tau_j(x)}{\varsigma_{i',r'}(s; \lambda) \chi_{i'}(s; \lambda_{i'})} ds, \quad (3.16)$$

где $x \equiv g_{i',r'}(s)$, $x' \equiv g'_{i',r'}(s)$, $\sum' = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i'}}^n$; здесь $g'_{i',r'}(s)$ строятся с помощью функций μ_i так же, как и функции $g_{i,r}(s)$.

Так как $u_i \rightarrow v_i$ и $u'_i \rightarrow v'_i$ равномерно по x при $x \in \bar{I}$ и $\lambda \in \Lambda^*$, $\alpha \rightarrow \alpha'$, то $g_{i,r}(s) \rightarrow g'_{i,r}(s)$ при $\alpha \rightarrow \alpha'$. Следовательно, разность $\theta_{i'}(x') - \tau_{i'}(x)$ стремится к нулю равномерно по x при $x \in \bar{I}$ и $\lambda \in \Lambda^*$, $\alpha \rightarrow \alpha'$; функции $\tau_j(x)$ при $j \neq i'$ ограничены для всех $(x, \lambda, \alpha) \in \bar{I} \times \Lambda^* \times \mathbf{A}^*$. Так как $\alpha \rightarrow \alpha'$, то $\alpha_{ij} \rightarrow 0$ при $i \neq j$. Это означает, что величины $\sum' \alpha_{i'j} \tau_j(x)$ могут быть сделаны сколь угодно малыми, как только величина $\alpha_{i'j}$ достаточно мала при $j \neq i'$. Тогда из (3.16) получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_{i'i'}(\theta_{i'}(x') - \tau_{i'}(x)) - \sum' \alpha_{i'j} \tau_j(x)}{\varsigma_{i',r'}(s; \lambda) \chi_{i'}(s; \lambda_{i'})} ds \right| &\leq \frac{M}{\sqrt{2\alpha_{i'i'} C_{i'}} - \delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\chi_{i'}(s; \lambda_{i'})} = \\ &= \frac{M}{\sqrt{2\alpha_{i'i'} C_{i'}} - \delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2 + \varepsilon_{l,i'} - \lambda_{i'})^2 + 2\alpha_{i'i'} C_{i'}}}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где M и δ — некоторые величины, зависящие от λ, α . Из проведенных рассуждений следует, что $M \rightarrow 0$, когда $\alpha \rightarrow \alpha'$; из утверждения 2.4 следует, что δ можно выбрать сколько угодно малой при $\alpha \rightarrow \alpha'$. Оставшийся в (3.17) интеграл сходится (см. доказательство теоремы 2.2). Таким образом, разность (3.16) стремится к нулю при $\alpha \rightarrow \alpha'$. Поскольку проведенные выкладки

справедливы для каждого из слагаемых в (3.15) и для всех значений i , то получаем, что $d_i \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \alpha'$.

Точно так же можно доказать, что разность

$$\int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\varsigma_{i,0}(s; \lambda)} - \int_{-\infty}^{\kappa_{s,i}} \frac{ds}{\chi_i(s; \lambda_i)}$$

стремится к нулю при $\alpha \rightarrow \alpha'$ для всех i . $\square$

Доказательство теоремы 2.6. В силу следствия 2.2 получаем, что для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\epsilon' > 0$, что левые части формул (2.27) по абсолютному значению будут меньше ϵ , как только $|\alpha - \alpha'| < \epsilon'$.

Нули правых частей формул (2.27) являются собственными значениями задач P_i . Из теоремы 2.2 известно, что каждая из задач P_i имеет бесконечное число (положительных) собственных значений $\hat{\lambda}_{i,m}$ с точкой накопления на бесконечности. Среди собственных значений $\hat{\lambda}_{i,m}$ существует бесконечно много собственных значений $\hat{\lambda}_{i,m_r}$, удовлетворяющих следствию 2.1.

Зафиксируем интервалы $\Lambda_i^* = (\epsilon_{s,i}, \lambda_i^*)$, где значения λ_i^* выбираются достаточно большими, чтобы интервал $(\epsilon_{l,i}, \lambda_i^*)$ заведомо содержал собственные значения $\hat{\lambda}_{i,m_r}$, определенные в следствии 2.1. Отсюда следует, что для всякого простого собственного значения $\hat{\lambda}_{i,m_r} \in \Lambda_i^*$ найдется такой содержащий его интервал U_{i,m_r} , что правая часть формулы в (2.27), отвечающей $\hat{\lambda}_{i,m_r}$, принимает значения разных знаков на противоположных концах этого интервала. Поскольку левые части могут быть сделаны как угодно малыми, а правые части не зависят от α_{ij} при $i \neq j$, непрерывны по λ_i и меняют знак при переходе через $\hat{\lambda}_{i,m_r}$, то при достаточно малых α_{ij} при $i \neq j$ в указанных интервалах найдутся числа $\tilde{\lambda}_{i,m_r}$, удовлетворяющие системе (2.25). $\square$

4. Приложения. Пусть $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ — слой, заполненный диэлектриком с нелинейной зависимостью диэлектрической проницаемости от внешнего электромагнитного поля и помещенный в декартову систему координат $Oxyz$. На границе $x = h$ расположен бесконечно тонкий абсолютно проводящий экран. Полупространство $x < 0$ заполнено немагнитной средой с постоянной диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon_s \geq \epsilon_0 > 0$, где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$, где μ_0 — магнитная проницаемость вакуума.

В соответствии с [27] введем многочастотное поле

$$\mathbf{E}_\omega = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}_j e^{-i\omega_j t}, \quad \mathbf{H}_\omega = \sum_{j=1}^n \mathbf{H}_j e^{-i\omega_j t}, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{E}_j = \mathbf{E}_j^+ + i\mathbf{E}_j^-$, $\mathbf{H}_j = \mathbf{H}_j^+ + i\mathbf{H}_j^-$ — комплексные амплитуды (см. [19]). Действительное поле $\tilde{\mathbf{E}}_\omega$, $\tilde{\mathbf{H}}_\omega$ имеет вид $\tilde{\mathbf{E}}_\omega(x, y, z, t) = \text{Re } \mathbf{E}_\omega$, $\tilde{\mathbf{H}}_\omega(x, y, z, t) = \text{Re } \mathbf{H}_\omega$, ω_j — частоты, характеризующие волну.

Предполагается, что диэлектрическая проницаемость слоя ϵ_l слоя Σ является диагональным тензором, зависящим от поля по закону Керра, т.е.

$$\epsilon_l(\tilde{\mathbf{E}}_\omega) \equiv \begin{pmatrix} \epsilon_x + f_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y + f_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z + f_z \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

где $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ — такие вещественные положительные константы, что

$$\min\{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z\} > \epsilon_s > 0, \quad f_r \equiv \sum_{j=1}^n (\beta_{x,j,r} |(\mathbf{E}_j, \mathbf{e}_x)|^2 + \beta_{y,j,r} |(\mathbf{E}_j, \mathbf{e}_y)|^2 + \beta_{z,j,r} |(\mathbf{E}_j, \mathbf{e}_z)|^2);$$

здесь $\beta_{r,j,r'}$ — вещественные постоянные, $(\cdot, \cdot)$ — евклидово скалярное произведение, $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор в направлении r , $r, r' \in \{x, y, z\}$. Диэлектрическая проницаемость вида (4.2) имеет важное значение с точки зрения приложений (см. [14, 16–20, 23, 24, 28, 31]).

Подставляя (4.1) в уравнения Максвелла и учитывая, что оператор rot является линейным, получаем, что $\mathbf{E}_k, \mathbf{H}_k$ удовлетворяют следующим (связанным) уравнениям:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n e^{-i\omega_j t} \text{rot } \mathbf{H}_j = -i\epsilon \sum_{j=1}^n \omega_j \mathbf{E}_j e^{-i\omega_j t}, \\ \sum_{j=1}^n e^{-i\omega_j t} \text{rot } \mathbf{E}_j = i\mu \sum_{j=1}^n \omega_j \mathbf{H}_j e^{-i\omega_j t}, \end{cases} \quad (4.3)$$

где i — мнимая единица. Поскольку полученная система должна быть выполнена для всех t , то отсюда следует система, состоящая из $2n$ (связанных) уравнений

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H}_j = -i\epsilon\omega_j \mathbf{E}_j, \\ \text{rot } \mathbf{E}_j = i\mu\omega_j \mathbf{H}_j, \end{cases} \quad (4.4)$$

где $j = \overline{1, n}$.

Таким образом, $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$ удовлетворяют уравнениям (4.4) и затухают как $O(|x|^{-1})$ при $x \rightarrow -\infty$; касательные компоненты полей $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$ непрерывны на границе $x = 0$, а касательные компоненты электрических полей $\mathbf{E}_j$ обращаются в нуль на границе $x = h$; кроме того, поля $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$ имеют заданные значения на границе $x = 0$.

Теперь рассмотрим конфигурацию поля (4.1), которая приводит к задаче, изученной в разделе 2. Считаем, что поля $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_j &= (0, e_y^{(j)}, 0)^\top e^{i\gamma_j z}, & \mathbf{H}_j &= (h_x^{(j)}, 0, h_z^{(j)})^\top e^{i\gamma_j z} & \text{для } 1 \leq j \leq j', \\ \mathbf{E}_j &= (0, 0, e_z^{(j)})^\top e^{i\gamma_j y}, & \mathbf{H}_j &= (h_x^{(j)}, h_y^{(j)}, 0)^\top e^{i\gamma_j y} & \text{для } j' \leq j \leq n, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где компоненты $e_y^{(j)}, e_z^{(j)}, h_x^{(j)}, h_y^{(j)}, h_z^{(j)}$ зависят только от пространственной переменной x (эти величины как решения уравнений Максвелла также зависят от других параметров задачи), а γ_j — неизвестные вещественные постоянные. Другими словами, мы рассматриваем сумму ТЕ-полей, распространяющихся в направлениях Oz и Oy соответственно.

Подставляя (4.5) в (4.4) и используя обозначение $u_j := e_y^{(j)}$ при $j = \overline{1, j'}$ и $u_j := e_z^{(j)}$ при $j = \overline{j'+1, n}$, после простых преобразований получаем систему

$$\begin{cases} u_1'' = -(\mu\omega_1^2\epsilon - \lambda_1)u_1, \\ \dots\dots\dots, \\ u_{j'}'' = -(\mu\omega_{j'}^2\epsilon - \lambda_{j'})u_{j'}, \\ u_{j'+1}'' = -(\mu\omega_{j'+1}^2\epsilon - \lambda_{j'+1})u_{j'+1}, \\ \dots\dots\dots, \\ u_n'' = -(\mu\omega_n^2\epsilon - \lambda_n)u_n, \end{cases} \quad (4.6)$$

где $\lambda_j = \mu\omega_j^2\gamma_j^2 > 0$ и

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_s, & x < 0, \\ \epsilon_l, & 0 \leq x \leq h. \end{cases} \quad (4.7)$$

В соответствии с условием затухания на бесконечности решения системы (4.6) в полупространстве $x < 0$ имеют вид

$$u_j(x) = A_j e^{\kappa_{s,j} x} \quad \text{при } x < 0, \quad (4.8)$$

где A_j — вещественная постоянная (без потери общности можем считать, что $A_j > 0$) и $\kappa_{s,j} = \sqrt{\lambda_j - \epsilon_{s,j}} > 0$, где $\epsilon_{s,j} = \mu\omega_j^2\epsilon_s$.

Рис. 2. (а) $\alpha_{11} = 0.06$, $\alpha_{22} = 0.04$ и $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$; здесь $\hat{\lambda}_{1,0} \approx 1,898$, $\hat{\lambda}_{1,1} \approx 3,243$, $\hat{\lambda}_{1,2} \approx 3,692$ и $\hat{\lambda}_{2,0} \approx 1,838$, $\hat{\lambda}_{2,1} \approx 3,321$, $\hat{\lambda}_{2,2} \approx 4,642$, $\hat{\lambda}_{2,3} \approx 5,404$; (б) $\alpha_{11} = 0,03$, $\alpha_{22} = 0,02$ и $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$; здесь $\hat{\lambda}_{1,0} \approx 1,856$, $\hat{\lambda}_{1,1} \approx 2,874$, $\hat{\lambda}_{1,2} \approx 4,648$ и $\hat{\lambda}_{2,0} \approx 1,829$, $\hat{\lambda}_{2,1} \approx 3,284$, $\hat{\lambda}_{2,2} \approx 4,351$, $\hat{\lambda}_{2,3} \approx 6,299$.

(см. [2, 15]) не подходят для исследования задачи P , поскольку для их применения естественное дополнительное условие является условием типа $\|u\| = \text{const}$.

5. Численные результаты. В этом разделе рассмотрим случай $n = 2$, который, с одной стороны, является простейшим нетривиальным многомерным случаем, а с другой стороны, его можно достаточно хорошо проиллюстрировать.

При расчетах использованы следующие значения параметров: $n = 2$, $\varepsilon_{l,1} = 3$, $\varepsilon_{l,2} = 4,5$, $\varepsilon_{s,1} = 1$, $\varepsilon_{s,2} = 1,5$, $A_1 = A_2 = 1$, $h = 5$.

Несмотря на то, что решения задач P_1^0 , P_2^0 и P_1 , P_2 являются скалярными собственными значениями, будем рассматривать их как пары $\tilde{\lambda}_{k,k'} = (\tilde{\lambda}_{i,k}, \tilde{\lambda}_{j,k'})$ и $\hat{\lambda}_{k,k'} = (\hat{\lambda}_{i,k}, \hat{\lambda}_{j,k'})$, где $i, j = \{1, 2\}$ и k, k' являются неотрицательными целочисленными индексами. Такие пары представлены как точки на плоскости $O\lambda_1\lambda_2$.

На каждом графике ниже пары $\tilde{\lambda}_{k,k'} = (\tilde{\lambda}_{i,k}, \tilde{\lambda}_{j,k'})$, соответствующие решениям задач P_1^0 , P_2^0 , могут существовать только внутри прямоугольника с (красной) пунктирной границей (см. утверждение 2.1).

На рис. ?? пары собственных значений $\tilde{\lambda}_{k,k'} = (\tilde{\lambda}_{i,k}, \tilde{\lambda}_{j,k'})$ задач P_1^0 , P_2^0 представлены (красными) кружками; пары собственных значений $\hat{\lambda}_{k,k'} = (\hat{\lambda}_{i,k}, \hat{\lambda}_{j,k'})$ задач P_1 , P_2 представлены (зелеными) ромбами. На рис. 3 векторные собственные значения $\lambda_{k,k'} = (\lambda_{i,k}, \lambda_{j,k'})$ задач $P(\alpha)$ представлены (синими) звездочками.

Для выбранных параметров в задачах P_1^0 и P_2^0 существуют 2 и 3 собственных значения соответственно. Это означает, что имеется 6 пар: $\tilde{\lambda}_{k,k'} = (\tilde{\lambda}_{i,k}, \tilde{\lambda}_{j,k'})$, где $\tilde{\lambda}_{1,0} \approx 1,827$, $\tilde{\lambda}_{1,1} \approx 2,692$ и $\tilde{\lambda}_{2,0} \approx 1,821$, $\tilde{\lambda}_{2,1} \approx 3,251$, $\tilde{\lambda}_{2,2} \approx 4,189$.

Для сравнения на рис. 2 собственные значения задач P_1 , P_2 изображены точками (парами) вместе с парами собственных значений задач P_1^0 , P_2^0 . Каждая из задач P_1 , P_2 имеет бесконечное число положительных собственных значений; здесь представлены только несколько первых собственных значений в каждом случае.

Можно видеть, что рис. 2(а) и 2(б) согласуются с п. (1) теоремы 2.2. Действительно, уменьшая α_{11} и α_{22} , можно видеть, что существует хотя бы одна пара $\hat{\lambda}_{k,k'} = (\hat{\lambda}_{i,k}, \hat{\lambda}_{j,k'})$ в окрестности каждой пары $\tilde{\lambda}_{k,k'} = (\tilde{\lambda}_{i,k}, \tilde{\lambda}_{j,k'})$ и, следовательно, существует хотя бы одно собственное значение $\hat{\lambda}_{i,k}$ в окрестности каждого собственного значения $\tilde{\lambda}_{i,k}$ при достаточно малых α_{ii} .

Рис. 3. (а) $\alpha_{11} = 0,06$, $\alpha_{22} = 0,04$, $\alpha_{12} = 0,005$, $\alpha_{21} = 0,006$; здесь $\bar{\lambda}_{00} \approx (1,895, 1,862)$, $\bar{\lambda}_{01} \approx (1,916, 3,338)$, $\bar{\lambda}_{02} \approx (1,938, 4,653)$, $\bar{\lambda}_{03} \approx (1,955, 5,397)$, $\bar{\lambda}_{10} \approx (3,253, 1,886)$, $\bar{\lambda}_{11} \approx (3,253, 3,368)$, $\bar{\lambda}_{20} \approx (3,688, 1,912)$, $\bar{\lambda}_{21} \approx (3,707, 3,368)$; (б) $\alpha_{11} = 0,03$, $\alpha_{22} = 0,02$, $\alpha_{12} = 0,002$, $\alpha_{21} = 0,003$; здесь $\bar{\lambda}_{00} \approx (1,856, 1,835)$, $\bar{\lambda}_{01} \approx (1,856, 3,293)$, $\bar{\lambda}_{02} \approx (1,876, 4,346)$, $\bar{\lambda}_{03} \approx (1,918, 6,277)$, $\bar{\lambda}_{10} \approx (2,878, 1,856)$, $\bar{\lambda}_{11} \approx (2,884, 3,308)$, $\bar{\lambda}_{12} \approx (2,902, 4,369)$, $\bar{\lambda}_{13} \approx (3,154, 6,348)$, $\bar{\lambda}_{20} \approx (4,658, 1,922)$, $\bar{\lambda}_{21} \approx (4,661, 3,349)$, $\bar{\lambda}_{22} \approx (4,631, 4,581)$, $\bar{\lambda}_{23} \approx (4,449, 6,325)$.

Рисунки 3(а) и 3(б) согласуются с теоремой 2.6. Действительно, можно видеть, что в окрестности каждой пары $\bar{\lambda}_{k,k'} = (\bar{\lambda}_{i,k}, \bar{\lambda}_{j,k'})$ при достаточно малых α_{12} и α_{21} существует хотя бы одна пара $\hat{\lambda}_{k,k'} = (\hat{\lambda}_{i,k}, \hat{\lambda}_{j,k'})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. — М.: Мир, 1984.
2. Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. — М.: ГИТТЛ, 1956.
3. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.
4. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1988.
5. Валовик Д. В. О нелинейной задаче на собственные значения, связанной с теорией распространения электромагнитных волн // Диффер. уравн. — 2018. — 54, № 2. — С. 168–179.
6. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.
7. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1956.
8. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
9. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: ГИТТЛ, 1956.
10. Осмоловский В. Г. Нелинейная задача Штурма—Лиувилля. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003.
11. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: ГИФМЛ, 1961.
12. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. — М.: ИЛ, 1962.
13. Шен И. Р. Принципы нелинейной оптики. — М.: Наука, 1989.
14. Akhmediev N. N., Ankevich A. Solitons, Nonlinear Pulses and Beams. — London: Chapman and Hall, 1997.
15. Ambrosetti A., Rabinowitz P. H. Dual variational methods in critical point theory and applications // J. Funct. Anal. — 1973. — 14, № 4. — P. 349–381.
16. Boardman A. D., Egan P., Lederer F., Langbein U., Mihalache D. Third-Order Nonlinear Electromagnetic TE and TM Guided Waves. — Amsterdam–London–New York–Tokyo: Elsevier, 1991.

17. Boardman A. D., Twardowski T. Theory of nonlinear interaction between te and tm waves// J. Opt. Soc. Am. B. — 1988. — 5, № 2. — P. 523–528.
18. Boardman A. D., Twardowski T. Transverse-electric and transverse-magnetic waves in nonlinear isotropic waveguides// Phys. Rev. A. — 1989. — 39, № 5. — P. 2481–2492.
19. Eleonskii P. N., Ogan'es'yants L. G., Silin V. P. Cylindrical nonlinear waveguides// Sov. Phys. JETP. — 1972. — 35, № 1. — P. 44–47.
20. Eleonskii P. N., Ogan'es'yants L. G., Silin V. P. Structure of three-component vector fields in self-focusing waveguides// Sov. Phys. JETP. — 1973. — 36, № 2. — P. 282–285.
21. Pontryagin L. S. Ordinary Differential Equations. — Pergamon Press, 1962.
22. Schürmann H. W., Smirnov Yu. G., Shestopalov Yu. V. Propagation of te-waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides// Phys. Rev. E. — 2005. — 71, № 1. — 016614.
23. Skryabin D. V., Biancalana F., Bird D. M., Benabid F. Effective kerr nonlinearity and two-color solitons in photonic band-gap fibers filled with a raman active gas// Phys. Rev. Lett. — 2004. — 93, № 14. — 143907.
24. Smirnov Yu. G., Valovik D. V. Guided electromagnetic waves propagating in a plane dielectric waveguide with nonlinear permittivity// Phys. Rev. A. — 2015. — 91, № 1. — 013840.
25. Smirnov Yu. G., Valovik D. V. Problem of nonlinear coupled electromagnetic TE-TE wave propagation// J. Math. Phys. — 2013. — 54, № 8. — 083502.
26. Valovik D. V. Integral dispersion equation method to solve a nonlinear boundary eigenvalue problem// Nonlin. Anal. Real World Appl. — 2014. — 20, № 12. — P. 52–58.
27. Valovik D. V. Nonlinear multi-frequency electromagnetic wave propagation phenomena// J. Optics. — 2017. — 19, № 11. — 115502.
28. Valovik D. V. Novel propagation regimes for te waves guided by a waveguide filled with Kerr medium// J. Nonlin. Opt. Phys. Mater. — 2016. — 25, № 4. — 1650051.
29. Valovik D. V. On the existence of infinitely many nonperturbative solutions in a transmission eigenvalue problem for nonlinear Helmholtz equation with polynomial nonlinearity// Appl. Math. Model. — 2018. — 53. — P. 296–309.
30. Valovik D. V. On the problem of nonlinear coupled electromagnetic TE-TM wave propagation// J. Math. Phys. — 2013. — 54, № 4. — 042902.
31. Xie P., Zhang Z. Q. Multifrequency gap solitons in nonlinear photonic crystals// Phys. Rev. Lett. — 2003. — 91, № 21. — 213904.

Валовик Дмитрий Викторович
Пензенский государственный университет
E-mail: dvalovik@mail.ru

Курсеева Валерия Юрьевна
Пензенский государственный университет
E-mail: lynxbax@mail.ru