Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Д. Копачевский, Е. В. Сёмкина, О малых движениях гидросистем, содержащих вязкоупругую жидкость, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 172, 48–90

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-172-48-90>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:02:00

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 172 (2019). С. 48–90
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-48-90

УДК 517.958

О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ГИДРОСИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ ВЯЗКОУПРУГУЮ ЖИДКОСТЬ

© 2019 г. Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ, Е. В. СЕМКИНА

Аннотация. Работа посвящена изучению двух задач, описывающих малые движения частично диссипативных гидросистем. Первая проблема касается малых движений гидросистемы, состоящей из вязкоупругой жидкости и баротропного газа, находящегося над жидкостью, вторая — малых движений гидросистемы «вязкоупругая жидкость—идеальная жидкость—идеальная жидкость», заполняющих неподвижный сосуд. При помощи операторного подхода, разработанного в предыдущих работах авторов, обе задачи приведены к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в некотором гильбертовом пространстве и доказана теорема о корректной разрешимости проблемы на произвольном конечном отрезке времени.

Ключевые слова: гидродинамическая система, идеальная жидкость, вязкоупругая жидкость, баротропный газ, ортопроектор, задача Коши.

ON SMALL MOTIONS OF HYDRAULIC SYSTEMS CONTAINING A VISCOELASTIC FLUID

© 2019 N. D. KOPACHEVSKY, E. V. SYOMKINA

ABSTRACT. This paper is devoted to the study of two problems describing small motions of partially dissipative hydraulic systems. The first problem concerns small motions of a hydraulic system consisting of a viscoelastic fluid and a barotropic gas located above the fluid; the second concerns small motions of the hydraulic system “viscoelastic fluid–ideal fluid–ideal fluid” filling a static vessel. Using the operator approach developed in previous works of the authors, both problems are reduced to the Cauchy problem for a differential-operator equation in a Hilbert space and a theorem on the solvability of the problem on an arbitrary finite time interval is proved.

Keywords and phrases: hydrodynamic system, ideal fluid, viscoelastic fluid, barotropic gas, orthoprojector, Cauchy problem.

AMS Subject Classification: 76D05, 35Q30, 39A14, 39B42

Введение. Одними из первых работ, связанных с применением методов функционального анализа к исследованию проблемы малых движений и нормальных колебаний вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде, являются работы А. И. Милославского (см. [16–18, 25, 26]). В них для обобщенной модели Олдройта ($m \geq 1$) применен операторный подход, развивающий построения, проведенные ранее С. Г. Крейном и его учениками (см. [3, 13, 14]) применительно к задаче о малых колебаниях вязкой жидкости в частично заполненном сосуде. Исследования А. И. Милославского отражены, в частности, в монографии [23, гл. 8]. Случай полного заполнения сосуда вязкоупругой жидкостью рассмотрен в [2], а также в [23, п. 7.1]. Наконец, вариант, когда нижняя жидкость — обычная вязкая, а верхняя — идеальная сжимаемая жидкость, т.е. газ, изучен Б. М. Вронским и Н. Д. Копачевским (см. [4, 5, 24]).

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10125).

Данная работа посвящена исследованию операторными методами начально-краевых задач о малых движениях составных гидросистем, содержащих вязкоупругую жидкость. Так, в разделе 1 предполагается, что жидкость занимает в состоянии покоя нижнюю часть сосуда, а газ находится над ней. В процессе малых колебаний такой гидросистемы учитывается действие гравитационного поля с постоянным ускорением, а также малого поля внешних сил, наложенных на это поле.

Изложим кратко содержание раздела 1. В п. 1.1 дается математическая постановка начально-краевой задачи о малых движениях гидросистемы. Затем выводится закон баланса полной энергии гидросистемы для классического решения задачи. Это дает возможность в п. 1.2 осуществить выбор функциональных гильбертовых пространств и их подпространств, в которых естественно проводить исследование задачи. Далее в п. 1.3 проводится применение метода ортогонального проектирования на выбранные подпространства и изучение на его основе свойств операторов вспомогательных краевых задач, действующих в выбранных подпространствах. Затем в п. 1.4 осуществляется преобразование операторными методами уравнений движения вязкоупругой жидкости, а также кинематического условия на границе раздела «жидкость—газ» и уравнения движения газа. В п. 1.5 исходная начально-краевая задача переформулируется в векторно-матричной форме в виде задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка в ортогональной сумме пространств. При этом изучаются свойства возникших операторных матриц, являющихся операторными коэффициентами уравнения. Далее в п. 1.6 с использованием формы модели Олдройта вязкоупругой жидкости проводится дальнейшее видоизменение задачи и ее переформулировка в виде задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения в расширенном гильбертовом пространстве. Выясняется, что основной оператор задачи (операторная матрица) является аккретивным и может быть расширен путем его замыкания до максимального аккретивного оператора. Это дает возможность в п. 1.7 использовать теорию сжимающих полугрупп операторов, действующих в гильбертовом пространстве, и на этой основе доказать теорему существования сильного (по времени) решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка, к исследованию которого была приведена исходная начально-краевая задача. В п. 1.8, являющимся последним в разделе, дана постановка задачи о нормальных (собственных) колебаниях гидросистемы и сформулирована соответствующая спектральная задача для оператор-функции (операторного пучка), обобщающей как известный пучок С. Г. Крейна (вязкая жидкость в частично заполненном сосуде), так и операторный пучок, отвечающий проблеме нормальных колебаний вязкоупругой жидкости в полностью заполненном сосуде.

По этой же схеме проводится изложение в разделе 2, где изучается задача о малых движениях системы из трех тяжелых несмешивающихся однородных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд. При этом нижняя жидкость считается вязкоупругой, а остальные две идеальными. Отметим, что случай, когда сосуд полностью заполнен системой из двух жидкостей, одна из которых является вязкоупругой, а другая идеальной, рассмотрен в [11], а вариант, когда неподвижный сосуд заполнен системой из двух вязкоупругих жидкостей, изучен в [9].

1. О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ГИДРОСИСТЕМЫ «ВЯЗКОУПРУГАЯ ЖИДКОСТЬ—БАРОТРОПНЫЙ ГАЗ»

1.1. Математическая постановка задачи. Будем считать, что неподвижный сосуд $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ заполнен двумя средами: вязкоупругой жидкостью (обобщенная модель Олдройта, см. [16, 20]) и баротропным газом. В этой модели связь между тензором вязких напряжений и удвоенным тензором скоростей деформаций в вязкоупругой жидкости описывается не простейшим законом Гука, а линейным дифференциальным соотношением, где фигурируют производные порядка $m \geq 1$ по времени как тензора вязких напряжений, так и тензора скоростей деформаций. Эта гидросистема находится в поле сил тяжести, и в состоянии покоя граница Γ раздела жидкости и газа горизонтальна, т.е. расположена перпендикулярно действию гравитационного поля. При этом жидкость занимает область Ω_1 , ограниченную твердой стенкой S_1 и поверхностью Γ , а газ

Рис. 1

находится выше жидкости и ограничен твердой стенкой S_2 и снизу равновесной поверхностью Γ (см. рис. 1).

Выберем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, чтобы ее начало было на Γ , а ось Ox_3 была направлена вертикально вверх. Тогда ускорение силы тяжести есть $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3$, $g > 0$.

В состоянии покоя давление в жидкости $P_{1,0}(x)$ изменяется по закону Архимеда:

$$P_{1,0} = P_{1,0}(0) - \rho_1 g x_3,$$

где $\rho_1 = \text{const} > 0$ — плотность жидкости, а $P_{1,0}(0)$ — давление на границе Γ . Далее, газ называют баротропным, если его давление $P_2(t, x)$ связано с полем плотности $\tilde{\rho}_2$ соотношением

$$P_2(t, x) = a^2 \tilde{\rho}_2(t, x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_2, \quad (1.1.1)$$

a^2 — квадрат скорости звука. В состоянии покоя имеем связь

$$P_{2,0}(x) = a^2 \rho_{2,0}(x), \quad \nabla P_{2,0} = -g \rho_{2,0}(x) \mathbf{e}_3, \quad (1.1.2)$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \rho_{2,0} = \rho_{2,0}(x_3) &= \rho_{2,0}(0) \exp\left(-\frac{g x_3}{a^2}\right), \quad \rho_{2,0}(0) > 0, \\ P_{2,0} = P_{2,0}(x_3) &= P_{2,0}(0) + a^2 \rho_{2,0}(0) \exp\left(-\frac{g x_3}{a^2}\right), \quad P_{2,0} = P_{1,0}(0). \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Рассмотрим малые движения гидросистемы, близкие к состоянию покоя. В качестве искомым функций, описывающих движение системы, будем рассматривать: для жидкости — малое поле скоростей $\mathbf{u}(t, x)$, $x \in \Omega_1$, и функцию вертикального отклонения границы раздела жидкости и газа $x_3 = \zeta(t, \hat{x})$, $\hat{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma$; для газа соответственно считаем искомыми отклонение $p_2(t, x)$ давления от равновесного (1.1.2), (1.1.3), поле скоростей в газе $\mathbf{u}_2(t, x)$, а также отклонение $\rho_2(t, x)$ поля плотности от равновесного поля (1.1.3).

Заметим еще, что жидкость считаем вязкоупругой, подчиненной обобщенной модели Олдройта, когда напряжения в ней определяется не полем $\mathbf{u}_1(t, x)$, а полем

$$\mathbf{v}_1(t, x) = \mathbf{u}_1(t, x) + \sum_{k=1}^m \alpha_k \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} \mathbf{u}_1(s, x) ds =: I_{01}(t) \mathbf{u}_1, \quad (1.1.4)$$

где $\alpha_k \geq 0$, $\beta_k > 0$, $k = \overline{1, m}$ (см. [16, 20]), — коэффициенты вязкоупругости. При $\alpha_k = 0$, $k = \overline{1, m}$, получаем, в частности, модель обычной вязкой несжимаемой жидкости, а при $k = 1$ — модель Олдройта.

Выпишем теперь полную постановку начально-краевой задачи о малых движениях рассматриваемой гидросистемы.

Линеаризованные уравнения Навье—Стокса имеют вид

$$\rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} - \mu_1 \Delta \mathbf{v}_1 + \nabla p_1 = \rho_1 \mathbf{f}_1(t, x), \quad \text{div } \mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad (1.1.5)$$

где $\mu_1 > 0$ — коэффициент динамической вязкости, а $\mathbf{f}_1(t, x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3$. Линеаризованные уравнения движения газа и уравнение неразрывности таковы:

$$\rho_{2,0} \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + \nabla p_2 + \rho_2 g \mathbf{e}_3 = \rho_{2,0} \mathbf{f}_2, \quad p_2 = a^2 \rho_2, \quad (1.1.6)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{2,0} \mathbf{u}_2) = 0 \quad \text{в } \Omega_2, \quad (1.1.7)$$

где $\mathbf{f}_2(t, x)$ — заданное малое поле внешних сил в газе.

Выпишем теперь краевые условия в исследуемой проблеме. Для вязкой жидкости — это условия прилипания на твердой стенке:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \quad \text{на } S_1, \quad (1.1.8)$$

а для газа — условие непротекания:

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } S_2, \quad (1.1.9)$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S_2 . Далее, на границе раздела Γ должны выполняться кинематические условия

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad (1.1.10)$$

а также динамические условия

$$\begin{aligned} \mu_1 \tau_{j3}(\mathbf{v}_1) &= 0, \quad j = 1, 2, \quad \tau_{jk}(\mathbf{v}_1) := \frac{\partial v_{1,j}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{1,k}}{\partial x_j}, \\ [-p_1 + \mu_1 \tau_{33}(\mathbf{v}_1)] - [-p_2] &= -g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\zeta. \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Кроме того, должно выполняться линеаризованное условие сохранения объема жидкости:

$$\int_{\Gamma} \zeta \, d\Gamma = 0. \quad (1.1.12)$$

Наконец, в начальный момент времени $t = 0$ следует задать начальные условия для полей скоростей, а также для отклонения границы раздела и поля давлений в газе:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k(0, x) &= \mathbf{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \\ p_2(0, x) &= p_2^0(x), \quad x \in \Omega_2, \quad \zeta(0, x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma. \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

Таким образом, начально-краевая задача о малых совместных движениях вязкоупругой жидкости и баротропного газа, заполняющих неподвижный сосуд Ω , состоит в нахождении искомых функций из уравнений движения (1.1.5)–(1.1.7), краевых условий (1.1.8), (1.1.9), кинематических условий (1.1.10), динамических условий (1.1.11), условий сохранения объема (1.1.12) и начальных условий (1.1.13).

Будем считать, что задача (1.1.5)–(1.1.13) имеет классическое решение, т.е. все слагаемые в уравнениях, краевых и начальных условиях являются непрерывными функциями своих переменных. Для вывода закона баланса полной энергии гидросистемы воспользуемся следующими тождествами.

Первое тождество следует из (1.1.1)–(1.1.3):

$$\nabla p_2 + \rho_2 g \mathbf{e}_3 = a^2 \rho_{2,0} \nabla(\rho_{2,0}^{-1} \rho_2) = \rho_{2,0} \nabla(\rho_{2,0}^{-1} p_2). \quad (1.1.14)$$

Второе тождество — это формула Грина для соленоидальных векторных полей, удовлетворяющих условию прилипания на твердой стенке:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \mathbf{u}_1 \cdot (-\mu_1 \Delta \mathbf{v}_1 + \nabla p_1) \, d\Omega_1 &= \mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - \int_{\Gamma} \left(\sum_{j,k=1}^3 u_{1j} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_k}) [\tau_{jk}(\mathbf{v}_1) - p_1 \delta_{jk}] \right) d\Gamma, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_1 &= \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \text{на } S_1; \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

здесь

$$E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) := \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \sum_{j,k=1}^3 |\tau_{jk}(\mathbf{u}_1)|^2 d\Omega_1,$$

а $E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$ — соответствующее полуторалинейное выражение. Величина $\mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$ равна скорости диссипации энергии в вязкоупругой жидкости, занимающей область Ω_1 .

Из уравнения (1.1.5) получаем соотношение

$$\rho_1 \int_{\Omega_1} \mathbf{u}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} d\Omega_1 + \int_{\Omega_1} \mathbf{u}_1 \cdot (-\mu_1 \Delta \mathbf{v}_1 + \nabla p_1) d\Omega_1 = \rho_1 \int_{\Omega_1} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{f}_1 d\Omega_1. \quad (1.1.16)$$

Из (1.1.6) с учетом (1.1.14) имеем

$$\int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \mathbf{u}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} d\Omega_2 + \int_{\Omega_2} \mathbf{u}_2 \cdot (\rho_{2,0} \nabla (\rho_{2,0}^{-1} p_2)) d\Omega_2 = \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{f}_2 d\Omega_2. \quad (1.1.17)$$

Второе слагаемое слева в (1.1.16) с учетом (1.1.15) и граничных условий (1.1.10), (1.1.11), а также уравнения (1.1.7), преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \mathbf{u}_1 \cdot (-\mu_1 \Delta \mathbf{v}_1 + \nabla p_1) d\Omega_1 &= \mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - \int_{\Gamma} \left(\sum_{j,k=1}^3 u_{1j} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_k}) [\tau_{jk}(\mathbf{v}_1) - p_1 \delta_{jk}] \right) d\Gamma = \\ &= \mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - \int_{\Gamma} u_{1,3} p_2 d\Gamma + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \int_{\Gamma} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{e}_3) \zeta d\Gamma = \\ &= \mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - \int_{\Gamma} u_{1,3} p_2 d\Gamma + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \int_{\Gamma} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{e}_3) \zeta d\Gamma = \\ &= \mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \int_{\Gamma} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \zeta d\Gamma + \int_{\Gamma} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}) p_2 d\Gamma = \\ &= \mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - \frac{1}{2} g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{e}_3) p_2 d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Второе слагаемое слева в (1.1.17) преобразуется с учетом (1.1.7), (1.1.10) и связи $p_2 = a^2 \rho_2$ так:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \mathbf{u}_2 \cdot (\rho_{2,0} \nabla (\rho_{2,0}^{-1} p_2)) d\Omega_2 &= \int_{\Omega_2} \operatorname{div}(p_2 \mathbf{u}_2) d\Omega_2 - \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1} p_2 \operatorname{div}(\rho_{2,0} \mathbf{u}_2) d\Omega_2 = \\ &= - \int_{\Gamma} p_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_3 d\Gamma + a^{-2} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1} p_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} d\Omega_2 = - \int_{\Gamma} p_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_1 d\Gamma + a^{-2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1} |p_2|^2 d\Omega_2. \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

Складывая левые и правые части (1.1.16) и (1.1.17) и учитывая (1.1.18), (1.1.19), приходим к тождеству

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \rho_1 \int_{\Omega_1} |\mathbf{u}_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x) |\mathbf{u}_2|^2 d\Omega_2 \right\} + \\ + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ a^{-2} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1}(x) |p_2|^2 d\Omega_2 + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \int_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma \right\} = \\ = -\mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + \rho_1 \int_{\Omega_1} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{f}_1 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{f}_2 d\Omega_2, \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

которое является законом баланса полной энергии исследуемой гидросистемы, записанным в дифференциальной форме. Здесь слева в фигурных скобках стоит удвоенная кинетическая энергия (первое слагаемое), отвечающая полю скоростей в жидкости и газе, а второе слагаемое — это потенциальная энергия, отвечающая отклонению ζ границы раздела Γ и изменению плотности в баротропном газе ($p_2 = a^2 \rho_2$) в процессе малых колебаний. Справа в (1.1.20) стоит мощность сил, действующих на систему: это внутренние вязкоупругие силы (первое слагаемое) и внешние силы в областях Ω_1, Ω_2 (остальные слагаемые).

1.2. Выбор функциональных пространств. Из формулы (1.1.20) следует, что для описания движения гидросистемы следует привлечь к рассмотрению такие функциональные гильбертовы пространства, для которых поля скоростей и давлений должны приводить в любой момент времени к конечной кинетической и потенциальной энергиям системы, а также к конечной скорости диссипации энергии.

Перейдем к подробному рассмотрению этого вопроса и введем соответствующие пространства и их подпространства.

1.2.1. Прежде всего введем (комплексное) гильбертово пространство $L_2(\Omega_1)$ векторных полей $\{\mathbf{u}_1(x)\}$, $x \in \Omega_1$, с квадратом нормы

$$\|\mathbf{u}_1\|_{L_2(\Omega_1)}^2 := \int_{\Omega_1} |\mathbf{u}_1(x)|^2 d\Omega_1$$

и соответствующим скалярным произведением. Как известно (см. [10, 22]), пространство $L_2(\Omega_1)$ имеет ортогональное разложение

$$L_2(\Omega_1) = J_0(\Omega_1) \oplus G_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus G_{0,\Gamma}(\Omega_1), \quad (1.2.1)$$

$$J_0(\Omega_1) := \left\{ \mathbf{w}_1 \in L_2(\Omega_1) : \operatorname{div} \mathbf{w}_1 = 0 \text{ в } \Omega_1, \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \text{ на } \partial\Omega_1 \right\}, \quad (1.2.2)$$

$$G_{h,S_1}(\Omega_1) := \left\{ \mathbf{v}_1 = \nabla \Phi_1 \in L_2(\Omega_1) : \Delta \Phi_1 = 0 \text{ в } \Omega_1, \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_1} = 0 \text{ на } S_1, \int_{\Gamma} \Phi_1 d\Gamma = 0 \right\}, \quad (1.2.3)$$

$$G_{0,\Gamma}(\Omega_1) := \left\{ \nabla \varphi_1 \in L_2(\Omega_1) : \varphi_1 = 0 \text{ на } \Gamma \right\}. \quad (1.2.4)$$

Здесь $\mathbf{n}_1$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega_1$, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_3$ на Γ , а операции div и $\partial/\partial n_1$ понимают в смысле обобщенных функций (распределений).

Будем считать, что части S_1 и Γ границы $\partial\Omega_1$ области Ω_1 являются липшицевыми, причем контур $\partial S_1 = \partial\Gamma$ также липшицев (см. [1, 19]). Тогда для функций из

$$H_{\Gamma}^1(\Omega_1) := \left\{ \Phi(x) \in H^1(\Omega_1) : \int_{\Gamma} \Phi d\Gamma = 0 \right\}, \quad \|\Phi\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega_1)}^2 := \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi|^2 d\Omega_1,$$

имеет место обобщенная формула Грина для оператора Лапласа (см. [8]):

$$(\Psi, \Phi)_{H_{\Gamma}^1(\Omega_1)} := \int_{\Omega_1} \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi d\Omega_1 = \langle \Psi, -\Delta \Phi \rangle_{L_2(\Omega_1)} + \left\langle \gamma \Psi, \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \right\rangle_{L_2,\Gamma} \quad \forall \Psi, \Phi \in H_{\Gamma}^1(\Omega_1). \quad (1.2.5)$$

Здесь $L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_{\Gamma}\}$ — подпространство пространства $L_2(\Gamma)$, ортогональное единичной функции $1_{\Gamma} := 1|_{\Gamma}$,

$$\begin{aligned} -\Delta \Phi &\in (H_{\Gamma}^1(\Omega_1))^*, \quad H_{\Gamma}^1(\Omega_1) \hookrightarrow L_2(\Omega_1) \hookrightarrow (H_{\Gamma}^1(\Omega_1))^*, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} &\in (H_{\Gamma}^{1/2})^*, \quad H_{\Gamma}^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma} \hookrightarrow L_{2,\Gamma} \hookrightarrow (H_{\Gamma}^{1/2})^*, \quad \mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

$\gamma : \mathcal{L}(H_{\Gamma}(\Omega_1); H_{\Gamma}^{1/2})$, $\gamma \Psi := \Psi|_{\Gamma}$ — оператор следа на Γ . Угловыми скобками в (1.2.5) обозначаются значения соответствующих функционалов, отвечающих оснащениям в (1.2.6).

Отметим, что в силу постановки задачи (см. (1.1.5), (1.1.8), (1.1.10)) поле скоростей $\mathbf{u}_1(t, x)$ должно принадлежать при любом $t \geq 0$ подпространству $\mathbf{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, а поле градиентов давлений — подпространству $\mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1)$.

1.2.2. Введем теперь пространство $\mathbf{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0})$ с квадратом нормы

$$\|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0})}^2 := \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x) |\mathbf{u}_2|^2 d\Omega_2,$$

отвечающее полю скоростей в газе. Его ортогональное разложение, которое далее понадобится, таково:

$$\mathbf{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) = \mathbf{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0}) \oplus \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}), \quad (1.2.7)$$

где

$$\mathbf{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0}) := \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) : \operatorname{div}(\rho_{2,0} \mathbf{v}) = 0 \text{ в } \Omega_2, \rho_{2,0} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \text{ на } \partial\Omega_2 \right\}, \quad (1.2.8)$$

$$\mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) := \left\{ \nabla \varphi_2 \in \mathbf{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) : \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \varphi_2 d\Omega_2 = 0 \right\} = \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \oplus \mathbf{G}_{h,S_2}(\Omega_2; \rho_{2,0}), \quad (1.2.9)$$

$$\mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2; \rho_{2,0}) := \left\{ \nabla \psi_2 \in \mathbf{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) : \psi_2 = 0 \text{ на } \Gamma \right\}, \quad (1.2.10)$$

$$\mathbf{G}_{h,S_2}(\Omega_2; \rho_{2,0}) := \left\{ \nabla \Phi_2 \in \mathbf{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) : \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_2) = 0 \text{ в } \Omega_2, \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_2} = 0 \text{ на } S_2 \right\}. \quad (1.2.11)$$

Из (1.1.6), (1.1.7), (1.1.9) следует, что поле скоростей $\mathbf{u}_2(t, x)$, $x \in \Omega_2$, для газа следует считать (при любом $t \geq 0$) элементом подпространства $\mathbf{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0}) \oplus \mathbf{G}_{h,S_2}(\Omega_2; \rho_{2,0})$.

1.2.3. Для поля давлений $p_2(t, x)$ в газе введем, опираясь на (1.1.20), гильбертово пространство

$$L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1}) := \left\{ p_2 : \|p_2\|_{L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1})}^2 := \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1}(x) |p_2|^2 d\Omega_2 < \infty \right\}$$

с нормой, эквивалентной норме $L_2(\Omega_2)$.

1.2.4. Далее, для конечности потенциальной энергии системы, отвечающей отклонению ζ движущейся границы раздела между жидкостью и газом, введем уже встретившееся выше (см. (1.2.6)) подпространство

$$L_{2,\Gamma} := \left\{ \zeta \in L_2(\Gamma) : \|\zeta\|_{L_{2,\Gamma}}^2 := \int_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma < \infty, \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0 \right\}$$

пространства $L_2(\Gamma)$.

1.2.5. Наконец, для конечности скорости диссипации энергии в вязкоупругой жидкости (снова см. (1.1.20)) введем пространство вектор-функций $\mathbf{H}^1(\Omega_1)$ и его подпространство

$$\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1) := \left\{ \mathbf{u}_1 \in \mathbf{H}^1(\Omega_1) : E_1(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_1) < \infty, \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \text{ на } S_1, \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 \text{ в } \Omega_1 \right\}.$$

Отметим, что норма в $\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$ эквивалентна стандартной норме пространства $\mathbf{H}^1(\Omega_1)$ при условии прилипания $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ на S_1 , так как в этом случае имеет место неравенство Корна (см. [13])

$$\|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)}^2 := E_1(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_1) \geq c \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_1)}^2 := c \sum_{k=1}^3 \|u_{1,k}\|_{H^1(\Omega_1)}^2, \quad c > 0. \quad (1.2.12)$$

Таким образом, далее в исследуемой проблеме искомые векторные и скалярные поля будем считать функциями переменной t со значениями в соответствующих введенных выше пространствах и подпространствах.

1.3. Применение метода ортогонального проектирования для уравнений движения газа. Введем согласно разложениям (1.2.7)–(1.2.9), ортопроекторы

$$P_{0,2} : L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) \rightarrow J_0(\Omega_2; \rho_{2,0}), \quad P_{G,2} : L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) \rightarrow G(\Omega_2; \rho_{2,0})$$

и перепишем уравнения движения газа (1.1.6), (1.1.7) с учетом (1.1.14) в виде

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \nabla(\rho_{2,0}^{-1} p_2) = f_2, \quad a^{-2} \frac{\partial p_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{2,0} u_2) = 0. \quad (1.3.1)$$

Будем теперь считать, что поле скоростей в газе имеет вид

$$u_2 = w_2 + \nabla \Phi_2, \quad w_2 \in J_0(\Omega_2; \rho_{2,0}), \quad \nabla \Phi_2 \in G(\Omega_2; \rho_{2,0})$$

(см. п. 1.2.2). Применяя ортопроекторы $P_{0,2}$ и $P_{G,2}$ к левой и правой частям первого уравнения (1.3.1), получим два соотношения

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = P_{0,2} f_2, \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi_2 + \nabla(\rho_{2,0}^{-1} p_2) = P_{G,2} f_2 =: \nabla F_2. \quad (1.3.2)$$

Далее, в силу (1.2.8) второе уравнение (1.3.1) приобретает вид

$$a^{-2} \frac{\partial p_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_2) = 0. \quad (1.3.3)$$

Заметим теперь, что первое уравнение (1.3.2) тривиально разрешимо, если задано начальное условие $w_2(0, x) = P_{0,2} u_2^0(x)$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать связи для p_2 и Φ_2 , исходя из второго соотношения (1.3.2), уравнения (1.3.3) и с учетом краевых и начальных условий. В частности, из (1.1.9), определения (1.2.8) подпространства $J_0(\Omega_2; \rho_{2,0})$ и из кинематического условия (1.1.10) имеем

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial e_3} = -u_1 \cdot e_3 = -\frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \text{на } \Gamma, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_2.$$

Отсюда получаем краевую задачу, описывающую связь функций Φ_2 и p_2 :

$$\begin{aligned} -\Delta_0 \Phi_2 &:= -\rho_{2,0}^{-1} \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_2) = a^{-2} \rho_{2,0}^{-1} \frac{\partial p_2}{\partial t} =: f \quad \text{в } \Omega_2, \\ \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } S_2, \quad \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = -\rho_{2,0}(0) u_1 \cdot e_3 =: \varphi \quad \text{на } \Gamma. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Будем исследовать задачу (1.3.4), используя теорию обобщенных и слабых решений краевых задач в негладких (липпшицевых) областях. Заметим, что однородная задача (1.3.4), т.е. отвечающая случаю $f = 0$, $\varphi = 0$, имеет нетривиальное решение $\Phi_2 = c_2 = \text{const}$. Поэтому решение задачи (1.3.4) можно представить в виде

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} + c_2,$$

где Φ_{21} и Φ_{22} — решения задач при однородном краевом условии и однородном уравнении соответственно:

$$-\Delta_0 \Phi_{21} = f \quad \text{в } \Omega_2, \quad \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \partial \Omega_2, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{21} d\Omega_2 = 0, \quad (1.3.5)$$

$$-\Delta_0 \Phi_{22} = 0 \quad \text{в } \Omega_2, \quad \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_2, \quad \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} = \varphi \quad \text{на } \Gamma, \quad \int_{\Gamma} \Phi_{22} d\Gamma = 0, \quad (1.3.6)$$

а $c_2 = \text{const}$.

При изучении этих задач понадобится обобщенная формула Грина, аналогичная формуле (1.2.5), применительно к оператору Δ_0 из (1.3.4). Отметим сначала, что необходимым условием разрешимости задачи (1.3.5) является условие

$$(f, 1_{\Omega_2})_{L_2(\Omega_2; \rho_{2,0})} := \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} f d\Omega_2 = 0. \quad (1.3.7)$$

Обозначим соответствующее подпространство функций через $L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$. Введем теперь пространство $H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ с квадратом нормы

$$\|\Phi\|_{H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})}^2 := \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi|^2 d\Omega_2 + \left| \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi d\Omega_2 \right|^2,$$

эквивалентной норме $H^1(\Omega_2)$, и его подпространство $H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, состоящее из элементов, которые удовлетворяют условию (1.3.7), т.е.

$$\int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi d\Omega_2 = 0. \quad (1.3.8)$$

Нетрудно видеть, что $(H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}); L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}})$ — гильбертова пара пространств, причем пространство $H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ компактно вложено в $L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$. Для элементов Ψ_2, Φ_2 из $H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ имеет место обобщенная формула Грина

$$\begin{aligned} (\Psi_2, \Phi_2)_{H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})} &= \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla \Psi_2 \cdot \nabla \Phi_2 d\Omega_2 = \\ &= \langle \Psi_2, -\Delta_0 \Phi_2 \rangle_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + \left\langle \gamma_{S_2} \Psi_2, \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right\rangle_{L_2(S_2)} + \left\langle \gamma_{\Gamma} \Phi_2, \rho_{2,0} \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} \right\rangle_{L_2(\Gamma)}, \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

где γ_{S_2} и γ_{Γ} — операторы следа на S_2 и Γ , а угловыми скобками обозначены значения соответствующих функционалов.

Уточним некоторые факты, связанные с формулой (1.3.9) (см. [8]). Она справедлива для тех элементов из $H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, которые обладают следующими свойствами: для этих элементов производные по нормали на S_2 и Γ обладают тем свойством, что они продолжимы нулем с S_2 и Γ соответственно на оставшуюся часть границы $\partial\Omega_2$ в классе функций из $H^{-1/2}(\partial\Omega_2)$. Соответствующую совокупность элементов из $H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ обозначим через $\check{H}_{\Omega_2}^1$, так что формула (1.3.9) справедлива для элементов из $\check{H}_{\Omega_2}^1$. При этом класс таких продолжимых нулем производных по нормали обозначается через $\check{H}^{-1/2}(S_2)$ и $\check{H}^{-1/2}(\Gamma)$ соответственно, причем эти подпространства являются сопряженными к $H^{1/2}(S_2)$ и $H^{1/2}(\Gamma)$ (см. [8, 19, 27]).

Опираясь на формулу Грина (1.3.9), определим слабое решение задачи (1.3.5) как элемент Φ_{21} из $H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, для которого выполнено тождество

$$(\Psi_2, \Phi_{21})_{H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})} = \langle \Psi_2, f \rangle_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} \quad \forall \Psi_2 \in H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}). \quad (1.3.10)$$

Из теории пар гильбертовых пространств следует, что задача (1.3.5) имеет слабое решение тогда и только тогда, когда

$$f \in (H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}))^* \supset L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}.$$

При $f \in L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ эта задача имеет обобщенное решение, определяемое тождеством

$$(\Psi_2, \Phi_{21})_{H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})} = (\Psi_2, f)_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} \quad \forall \Psi_2 \in H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}). \quad (1.3.11)$$

Оба решения задач (1.3.10), (1.3.11) выражаются одной формулой:

$$\Phi_{21} = A_2^{-1} f,$$

где A_2 — оператор гильбертовой пары $(H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}); L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}})$; при этом $\Phi_{21} \in \mathcal{D}(A_2^{1/2}) = H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ для слабого решения и $\Phi_{21} \in \mathcal{D}(A_2) \subset \mathcal{D}(A_2^{1/2})$ для обобщенного решения.

Таким образом, при $f \in L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ задача (1.3.5) равносильна соотношению

$$A_2 \Phi_{21} = f = a^{-2} \rho_{2,0}^{-1} \frac{\partial p_2}{\partial t}, \quad (1.3.12)$$

где

$$0 \ll A_2 = A_2^* : \mathcal{D}(A_2) \rightarrow L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}, \quad A_2^{-1} \in \mathfrak{S}_{\infty}(L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}).$$

Перейдем теперь к рассмотрению задачи (1.3.6). Опираясь на формулу Грина (1.3.9), заметим сначала, что необходимым условием разрешимости этой задачи является условие

$$\langle 1_\Gamma, \varphi \rangle_{L_2(\Gamma)} = 0. \quad (1.3.13)$$

Если $\varphi \in L_2(\Gamma)$, то получаем условие

$$\int_{\Gamma} \varphi \, d\Gamma = 0,$$

т.е. условие ортогональности в $L_2(\Gamma)$ заданной функции φ к единичной функции 1_Γ , определенной на Γ . В связи с этим введем в $H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ норму

$$\|\Phi\|_{H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})}^2 := \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi|^2 \, d\Omega_2 + \left| \int_{\Gamma} \Phi \, d\Gamma \right|^2,$$

эквивалентную стандартной норме пространства $H^1(\Omega_2)$, и подпространство $H_\Gamma^1(\Omega_2, \rho_{2,0})$ функций, для которых

$$\int_{\Gamma} \Phi \, d\Gamma = 0.$$

Снова опираясь на формулу Грина (1.3.9), определим слабое решение задачи (1.3.6) как элемент из Φ_{22} из $H_\Gamma^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, для которого выполнено тождество

$$(\Psi_2, \Phi_{22})_{H_{\Omega_2}^1(\Omega_2, \rho_{2,0})} = \langle \gamma_2 \Psi_2, \varphi \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \Psi_2 \in H_\Gamma^1(\Omega_2; \rho_{2,0}), \quad (1.3.14)$$

где $\gamma_2 \Psi_2 := \Psi|_\Gamma$. Из (1.3.6) следует, что для слабого решения функция φ должна быть продолжима нулем в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega_2)$, т.е. необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (1.3.6) является условие

$$\varphi \in \tilde{H}_\Gamma^{-1/2} = (H_\Gamma^{1/2})^*, \quad H_\Gamma^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}.$$

Тогда эта задача имеет единственное слабое решение

$$\Phi_{22} =: V\varphi = V(-\rho_{2,0}(0)\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{e}_3) = V\left(-\rho_{2,0}(0)\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right), \quad V \in \mathcal{L}(\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_{\Gamma,h}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})), \quad (1.3.15)$$

где

$$H_{\Gamma,h}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}) = \left\{ \Phi_{22} \in H_\Gamma^1(\Omega_2; \rho_{2,0}) : -\Delta_0 \Phi_{22} = 0 \text{ в } \Omega_2, \right. \\ \left. \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} = 0 \text{ на } S_2, \int_{\Gamma} \rho_{2,0}(0) \Phi_{22} \, d\Gamma = 0 \right\} \subset H_\Gamma^1(\Omega_2; \rho_{2,0}). \quad (1.3.16)$$

Заметим теперь, что для области Ω_2 с липшицевой границей $\partial\Omega_2$, разбитой на липшицевы куски S_2 и Γ , имеет место теорема Гальярдо (см. [21]), согласно которой оператор следа γ_2 обладает свойством

$$\gamma_2 \in \mathcal{L}(H_\Gamma^1(\Omega_2; \rho_{2,0}); H_\Gamma^{1/2}). \quad (1.3.17)$$

Отсюда получаем следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Операторы*

$$V : \tilde{H}_\Gamma^{-1/2} \rightarrow H_{\Gamma,h}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}) \subset H_\Gamma^1(\Omega_2; \rho_{2,0}), \quad \gamma_2 : H_\Gamma^1(\Omega_2; \rho_{2,0}) \rightarrow \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$$

являются взаимно сопряженными (ограниченными) операторами: $V = \gamma_2^*$.

Доказательство следует из тождества (1.3.14) и определения оператора V :

$$(\Psi_2, V\varphi)_{H^1_\Gamma(\Omega_2; \rho_{2,0})} = \langle \gamma_2 \Psi_2, \varphi \rangle_{L_2(\Gamma)}. \quad \square$$

Итогом рассмотрения задачи (1.3.4) и вспомогательных задач (1.3.5), (1.3.6) является такой вывод: задача (1.3.4) имеет решение в пространстве $H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, которое выражается формулой

$$\Phi_2|_{\Omega_2} = \Phi_{21} + \Phi_{22} + c_2 = A_2^{-1} \left(a^{-2} \rho_{2,0}^{-1} \frac{\partial p_2}{\partial t} \right) + V \left(-\rho_{2,0}(0) \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) + c_2, \quad (1.3.18)$$

где c_2 — произвольная функция t .

1.4. Преобразования операторными методами уравнений движения жидкости. Преобразуем теперь уравнения движения жидкости (1.1.5) в области Ω_1 с учетом граничных условий (1.1.8), (1.1.11). Опираясь на ортогональные разложения (1.2.1)–(1.2.4), будем считать при каждом t поле $\mathbf{u}_1(t, x)$ элементом подпространства $\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1) \subset \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, а ∇p_1 — элементом подпространства $\mathbf{G}(\Omega_1) = \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$. Введем далее ортопроектор

$$P_{0,S_1} : \mathbf{L}_2(\Omega_1) \rightarrow \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$$

и подействуем им на обе части уравнения (1.1.5). Будем иметь соотношения

$$\rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} - \mu_1 P_{0,S_1} \Delta \mathbf{v}_1 + \nabla \tilde{p}_1 = \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1, \quad \nabla \tilde{p}_1 := P_{0,S_1} \nabla p_1, \quad (1.4.1)$$

$$\Delta \tilde{p}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_1, \quad \int_{\Gamma} \tilde{p}_1 d\Gamma = 0, \quad (1.4.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \text{на } S_1, \quad \mu_1 \tau_{j3}(\mathbf{v}_1) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \text{на } \Gamma, \\ [-\tilde{p}_1 \mu_1 \tau_{33}(\mathbf{v}_1)] - [-p_2] = -g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\zeta \quad \text{на } \Gamma. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Здесь уже учтено, что в силу (1.2.4) имеем $p_1 = \tilde{p}_1$ на Γ .

Представим теперь поле $\nabla \tilde{p}_1$ в виде

$$\nabla \tilde{p}_1 = \nabla p_{11} + \nabla p_{12}, \quad \nabla p_{1l} \in \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \quad l = 1, 2,$$

и рассмотрим две вспомогательные краевые задачи, сумма решений которых дает решение задачи (1.4.1)–(1.4.3).

Первая вспомогательная задача (ее называют задачей С. Г. Крейна, см. [13, 14]):

$$\begin{aligned} -\mu_1 P_{0,S_1} \Delta \mathbf{v}_1 + \nabla p_{11} = \mathbf{F}_1 := -\nabla p_{12} - \rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \text{на } S_1, \\ \mu_1 \tau_{j3}(\mathbf{v}_1) = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad j = 1, 2; \quad -p_{11} + \mu_1 \tau_{33}(\mathbf{v}_1) = 0 \quad \text{на } \Gamma. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Вторая вспомогательная задача (задача Зарембы):

$$\Delta p_{12} = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \frac{\partial p_{12}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_1, \quad p_{12} = p_2 + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\zeta =: \eta \quad \text{на } \Gamma. \quad (1.4.5)$$

Обсудим сначала слабые решения задачи (1.4.5). Заметим предварительно, что в силу условий

$$\int_{\Gamma} p_{12} d\Gamma = 0, \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0$$

возникает требование нормировки для давления в газе:

$$\int_{\Gamma} p_2 d\Gamma = 0. \quad (1.4.6)$$

Тогда задача Зарембы (1.4.5) имеет при $\eta \in H_{\Gamma}^{1/2}$ единственное решение p_{12} , для которого

$$\nabla p_{12} =: Q\eta = Q \left(p_2|_{\Gamma} + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\zeta \right), \quad Q \in \mathcal{L}(H_{\Gamma}^{1/2}; \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)). \quad (1.4.7)$$

Чтобы получить окончательное выражение для ∇p_{12} , найдем значение $p_2|_\Gamma$ с учетом нормировки (1.4.6). С этой целью воспользуемся следствием из второй формулы (1.3.2), которое называют интегралом Коши—Лагранжа:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \rho_{2,0}^{-1} p_2 = F_2 + c(t) \quad \text{в } \Omega_2,$$

где $c(t)$ — произвольная функция t . Отсюда получаем, что

$$p_2|_\Gamma = \rho_{2,0}(0) \gamma_2 \left(-\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + F_2 \right) + \rho_{2,0}(0) c(t),$$

откуда с учетом (1.3.18) приходим к формуле

$$p_2|_\Gamma = \rho_{2,0}(0) \gamma_2 \left\{ -\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{21} - \rho_{2,0}(0) V \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 \right\} + \rho_{2,0}(0) (\gamma_2 F_2 + c(t)).$$

Наконец, учитывая интегральное условие (1.4.6), окончательно имеем

$$p_2|_\Gamma = -\rho_{2,0}(0) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ P_\Gamma \gamma_2 \nabla^{-1} (\nabla \Phi_{21}) - \rho_{2,0}(0) \gamma_2 V \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 \right\} + \rho_{2,0}(0) P_\Gamma \gamma_2 F_2, \quad (1.4.8)$$

где $P_\Gamma : L_2(\Gamma) \rightarrow L_{2,\Gamma}$ — ортопроектор.

Рассмотрим теперь первую вспомогательную задачу (1.4.4), считая $\mathbf{F}_1$ заданным элементом. Здесь понадобится обобщенная формула Грина для соленоидальных полей и векторного оператора Лапласа. Для гладких полей она имеет вид (1.1.15), а для полей из $\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$ эта формула приобретает вид (см. [8, 10])

$$\begin{aligned} \mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) = & \left\langle \mathbf{u}_1, -\mu_1 P_{0,S_1} \Delta \mathbf{v}_1 + \nabla p_1 \right\rangle_{L_2(\Omega_1)} + \\ & + \sum_{j,k=1}^3 \left\langle u_{1j} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_3}), [\tau_{jk}(\mathbf{v}_1) - p_1 \delta_{jk}] \right\rangle_{L_2(\Gamma)}. \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

Используя формулу (1.4.9), определим слабое решение задачи (1.4.4) как элемент $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$, для которого выполнено тождество

$$\mu_1 E_1(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1) = \langle \boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{F}_1 \rangle_{L_2(\Omega_1)} \quad \forall \boldsymbol{\eta}_1 \in \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1).$$

Заметим теперь, что в силу неравенства Корна (1.2.12) пространство $\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$ компактно вложено в $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. Поэтому эти пространства образуют гильбертову пару $(\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1); \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1))$, причем оператор этой гильбертовой пары

$$A_1 : \mathcal{D}(A_1) \subset \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \rightarrow \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \quad (1.4.10)$$

неограничен, положительно определен и имеет компактный обратный оператор A_1^{-1} . При этом

$$E_1(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1) = (\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1)_{\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)} = (A_1^{1/2} \boldsymbol{\eta}_1, A_1^{1/2} \mathbf{v}_1)_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} = \langle \boldsymbol{\eta}_1, A_1 \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)},$$

для всех $\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1 \in \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$.

Эти рассуждения показывают, что задача (1.4.4) имеет слабое решение $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\mathbf{F}_1 \in (\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1))^*, \quad (1.4.11)$$

и это решение выражается формулой

$$\mathbf{v}_1 = \mu_1^{-1} A_1^{-1} \mathbf{F}_1. \quad (1.4.12)$$

Если $\mathbf{F}_1 \in \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \subset (\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1))^*$, то формула (1.4.12) дает обобщенное решение задачи (1.4.4), и при этом $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{D}(A_1^{1/2}) = \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$.

Формула (1.4.12) позволяет с учетом определения $\mathbf{F}_1$ (см. (1.4.4)) выписать дифференциально-операторную связь между искомыми функциями в исследуемой проблеме и данными задачи. Как уже упоминалось выше, все эти функции считаем функциями переменной t со значениями

в соответствующем гильбертовом пространстве; в соответствии с этим далее производные $\partial/\partial t$ заменим на d/dt .

Подставляя выражение для $\mathbf{F}_1$ в соотношение $\mu_1 A_1 \mathbf{v}_1 = \mathbf{F}_1$, вытекающее из (1.4.11), и используя формулы (1.4.7) и (1.4.8) для ∇p_{12} и $p_2|_\Gamma$, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \left[\rho_1 \mathbf{u}_1 + (\rho_{2,0}(0))^2 (Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1}) \mathbf{u}_1 \right] - \rho_{2,0}(0) (QP_\Gamma \gamma_2 \nabla^{-1})(\nabla \Phi_{21}) \right\} + \\ + \mu_1 A_1 \mathbf{v}_1 + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) Q\zeta = \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 - \rho_{2,0}(0) QP_\Gamma \gamma_2 F_2, \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

где

$$\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 := (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n})_\Gamma, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1(t, x) + \sum_{k=1}^m \alpha_k \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} \mathbf{u}_1(s, x) ds := I_{01}(t) \mathbf{u}_1.$$

Выпишем теперь дополнительно к (1.4.13) другие соотношения, связанные с изучаемой задачей. Перепишем кинематические условия (1.1.10) в эквивалентной форме:

$$g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \frac{d\zeta}{dt} - g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 = 0; \quad (1.4.14)$$

приведем также выведенные ранее соответствующие связи (1.3.3), (1.3.12) для газа и учтем формулу (1.3.15). Будем иметь соотношения

$$\frac{d}{dt} (\nabla \Phi_{21} - \rho_{2,0}(0) \nabla (V\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1)) + \nabla (\rho_{2,0}(0)^{-1} p_2) = P_{G,2} \mathbf{f}_2 =: \nabla F_2, \quad (1.4.15)$$

$$a^{-2} \frac{dp_2}{dt} + \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_{21}) = 0. \quad (1.4.16)$$

Итогом проведенных рассуждений является следующее утверждение. Исходная начально-краевая задача о малых движениях системы, состоящей из вязкоупругой жидкости и баротропного газа, заполняющих произвольный неподвижный сосуд, приводится, кроме тривиальной связи (1.3.2) (первое уравнение), к задаче Коши для системы дифференциально-операторных уравнений (1.4.13)–(1.4.16) с соответствующими начальными условиями. Искомые функциями являются: поле скоростей $\mathbf{u}_1(t, x)$ со значениями в $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, вертикальное отклонение $\zeta(t, x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \Gamma$, границы раздела со значениями в $L_{2,\Gamma}$, потенциальная компонента $\nabla \Phi_{21}(t, x)$, описывающая одно из полей скоростей газа, со значениями в $\mathbf{G}(\Omega_1; \rho_{2,0})$, а также поле давлений в газе $p_2(t, x)$ со значениями в $L_2(\Omega_1; \rho_{2,0}^{-1})$.

1.5. Формулировка задачи в векторно-матричной форме. Свойства операторных коэффициентов задачи. Перепишем задачу (1.4.13)–(1.4.16) в векторно-матричном виде, введя в качестве искомого объекта вектор-столбец

$$z(t) := (\mathbf{u}_1; \zeta; \nabla \Phi_{21}; p_2)^\tau$$

со значениями в пространстве

$$\mathcal{H} := \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Gamma} \oplus \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \oplus L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1}). \quad (1.5.1)$$

Введем операторные матрицы

$$C = \begin{pmatrix} \rho_1 I_1 + (\rho_{2,0})^2 (Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1}) & 0 & -\rho_{2,0}(0) QP_\Gamma \gamma_2 \nabla^{-1} & 0 \\ 0 & g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) I_2 & 0 & 0 \\ -\rho_{2,0}(0) \nabla V\gamma_{n,1} & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-2} I_4 \end{pmatrix}, \quad (1.5.2)$$

где I_k — единичные операторы в пространствах (1.5.1),

$$B = \begin{pmatrix} \mu_1 A_1 I_{01}(t) & g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) Q & 0 & 0 \\ -g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \gamma_{n,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{34} \\ 0 & 0 & B_{43} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{34} p_2 := \nabla(\rho_{2,0}^{-1} p_2), \quad B_{43}(\nabla \Phi_{21}) := \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_{21}),$$

а также вектор-столбец заданных функций:

$$f := \left(\rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 - \rho_{2,0}(0) Q P_\Gamma \gamma_2 F_2; 0; \nabla F_2; 0 \right)^\tau.$$

Тогда систему дифференциальных уравнений (1.4.13)–(1.4.16) вместе с начальными условиями можно коротко записать в виде задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка в пространстве $\mathcal{H}$:

$$C \frac{dz}{dt} + Bz = f, \quad z(0) = z^0. \quad (1.5.3)$$

Цель дальнейших рассуждений — изучить свойства коэффициентов операторных матриц C и B и преобразовать задачу (1.5.3) таким образом, чтобы можно было доказать теорему существования ее решения на произвольном отрезке времени и на этой основе доказать теорему существования решения исходной начально-краевой задачи (1.1.5)–(1.1.13).

Напомним сначала, что согласно лемме 2.3 операторы

$$V \in \mathcal{L}(\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_{\Gamma,h}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})), \quad \text{и} \quad \gamma_2 \in \mathcal{L}(H_\Gamma^1(\Omega_2; \rho_{2,0}); H_\Gamma^{1/2})$$

взаимно сопряжены. Докажем теперь аналогичное свойство для операторов Q и $\gamma_{n,1}$ (см. (1.4.7), (1.4.13), (1.4.14)).

Лемма 1.2. *Операторы*

$$Q \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{1/2}; \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)) \quad \text{и} \quad \gamma_{n,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1); \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}) \quad (1.5.4)$$

взаимно сопряжены.

Доказательство. Пусть η — произвольный элемент из $H_\Gamma^{1/2}$, а $\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1 + \nabla \Phi_1$ — гладкий элемент из $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) = \mathbf{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$. Тогда, согласно (1.4.7), $Q\eta = \nabla p \in \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$. Опираясь на свойства элементов из $\mathbf{J}_0(\Omega_1)$, будем иметь

$$\begin{aligned} (Q\eta, \mathbf{u}_1)_{L_2(\Omega_1)} &= \int_{\Omega_1} \nabla p \cdot \overline{\mathbf{u}_1} t \, d\Omega_1 = \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(p \overline{\mathbf{u}_1}) \, d\Omega_1 - \int_{\Omega_1} p \operatorname{div} \mathbf{u}_1 \, d\Omega_1 = \\ &= \int_{\Gamma} p(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma = \langle \eta, \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 \rangle_{L_2, \Gamma}. \end{aligned}$$

Замыкая это тождество с гладких $\mathbf{u}_1$ на произвольные элементы из $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, приходим к выводу, что $\gamma_{n,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1); \tilde{H}_\Gamma^{-1/2})$ и $Q^* = \gamma_{n,1}$. $\square$

Из лемм 1.1 и 1.2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.3. *Оператор $(Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1})$ является ограниченным неотрицательным оператором, действующим в пространстве $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \supset \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$.*

Доказательство. В самом деле, на подпространстве $\mathbf{J}_0(\Omega_1) = \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \ominus \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ этот оператор нулевой, а на $\mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ он положителен. Кроме того, в силу свойств Q , γ_2 , V и $\gamma_{n,1}$ получаем, что

$$Q\gamma_2 V\gamma_{n,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1), \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)), \quad \mathcal{R}(Q\gamma_2 V\gamma_{n,1}) \subset \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \subset \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1). \quad \square$$

Лемма 1.4. *Операторы*

$$Q P_\Gamma \gamma_2 \nabla^{-1} : \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \rightarrow \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \quad \text{и} \quad \nabla V \gamma_{n,1} : \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \rightarrow \mathbf{G}_{h,\Gamma}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \subset \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$$

взаимно сопряжены и ограничены:

$$Q P_\Gamma \gamma_2 \nabla^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}); \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)), \quad \nabla V \gamma_{n,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1); \mathbf{G}_{h,\Gamma}(\Omega_2; \rho_{2,0})). \quad (1.5.5)$$

Доказательство. Проверим сначала, что эти операторы обладают свойствами (1.5.5). В самом деле, пусть $\nabla\Phi_{21}$ — элемент из $\mathbf{G}_0(\Omega_2; \rho_{2,0})$. Тогда $\Phi_{21}|_{\Omega_2} = \nabla^{-1}(\nabla\Phi_{21})$ — элемент из $H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, $\gamma_2\nabla^{-1}(\Delta\Phi_{21}) \in H^{1/2}(\Gamma)$ (теорема Гальярдо), $P_\Gamma\gamma_2\nabla^{-1}(\nabla\Phi_{21}) \in L_{2,\Gamma} \cap H^{1/2}(\Gamma) = H_\Gamma^{1/2}$, $Q P_\Gamma\gamma_2\nabla^{-1}(\nabla\Phi_{21}) \in \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ (см. (1.4.7)), причем каждый из операторов является непрерывным из одного пространства в другое.

Аналогично можно проверить второе свойство (1.5.5). Действительно, если $\mathbf{u}_1$ — произвольный элемент из $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, то $\gamma_{n,1}\mathbf{u}_1 \in \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$, $V\gamma_{n,1}\mathbf{u}_1 \in H_{\Gamma,h}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ (см. (1.3.15), (1.3.16)), $\nabla(V\gamma_{n,1}\mathbf{u}_1) \in \mathbf{G}_{\Omega_2}(\Omega_2; \rho_{2,0})$ и является градиентом слабого решения задачи (1.3.5). Здесь снова все переходы осуществляются с помощью операторов, ограниченных из одного пространства в другое.

Докажем теперь взаимную сопряженность этих операторов. Пусть

$$\mathbf{u}_1 = \nabla\psi_1 \in \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \subset \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1), \quad \nabla\Phi_{21} \in \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}).$$

Тогда

$$\int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla(V(-\rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}\mathbf{u}_1) \cdot \nabla\Phi_{21} d\Omega_2 = \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla\Phi_{22} \cdot \overline{\nabla\Phi_{21}} d\Omega_2, \quad (1.5.6)$$

где $\Phi_{22} \in H_{\Gamma,h}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ — слабое решение задачи (1.3.6) при $\varphi = -\rho_{2,0}(0)(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{e}_3)_\Gamma = -\rho_{2,0}(0)\gamma_{n,1}\mathbf{u}_1$ (см. (1.3.15)).

Далее, для другого оператора из (1.5.5) имеем для гладкого $\mathbf{u}_1 = \nabla\psi_1 \in \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} [(-\rho_{2,0}(0))Q P_\Gamma\gamma_2\nabla^{-1}(\nabla\Phi_{21})] \cdot \overline{\nabla\psi_1} d\Omega_1 &= \int_{\Gamma} (P_\Gamma\gamma_2\Phi_{21})(-\rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}\overline{\mathbf{u}_1} d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma} (\gamma_2\Phi_{21})(-\rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}\overline{\mathbf{u}_1} d\Gamma = \left(\Phi_{21}, V(-\rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}\overline{\mathbf{u}_1} \right)_{H_\Gamma^1(\Omega_2; \rho_{2,0})} = \\ &= \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla\Phi_{21} \cdot \overline{\nabla\Phi_{22}} d\Omega_2. \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

Здесь при выводе были использованы следующие свойства: взаимная сопряженность Q и $\gamma_{n,1}$, свойства $P_\Gamma = P_\Gamma^*$ и $P_\Gamma\gamma_{n,1}\mathbf{u}_1 = \gamma_{n,1}\mathbf{u}_1$, а также взаимная сопряженность γ_2 и V .

Переходя в (1.5.7) от гладких $\mathbf{u}_1 = \nabla\psi_1$ к произвольным элементам из $\mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, убеждаемся, что тождество (1.5.7) справедливо и для произвольных $\nabla\psi_1$. Сравнивая тогда (1.5.6) и (1.5.7), получаем, что операторы (1.5.5) взаимно сопряжены. $\square$

Опираясь на доказанные свойства элементов операторной матрицы C из (1.5.2), установим теперь общие свойства этой матрицы как оператора, действующего в пространстве $\mathcal{H}$ (см. (1.5.1)).

Лемма 1.5. *Операторная матрица $C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ является ограниченным положительно определенным оператором, ее квадратичная форма равна удвоенной полной энергии исследуемой гидромеханической системы и отвечает потенциальным движениям баротропного газа и произвольным движениям вязкоупругой жидкости.*

Доказательство. Факт ограниченности операторной матрицы C следует из лемм 2.3, 1.2–1.4 и ее вида (1.5.2). Вычислим квадратичную форму матрицы C , учитывая свойства операторных коэффициентов, формулы (1.5.6), (1.5.7), а также связь (1.3.15), т.е.

$$\Phi_{22}|_{\Omega_2} = V(-\rho_{2,0}(0)\gamma_{n,1}\mathbf{u}_1), \quad (1.5.8)$$

из которой следует соотношение

$$(\rho_{2,0}(0))^2 \int_{\Omega_1} (Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1}\mathbf{u}_1) \cdot \overline{\mathbf{u}_1} d\Omega_1 = \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{22}|^2 d\Omega_2.$$

Отсюда получаем формулу

$$(Cz, z)_{\mathcal{H}} = \rho_1 \int_{\Omega_1} |\mathbf{u}_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_{21} + \nabla \Phi_{22}|^2 d\Omega_2 + \\ + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \int_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma + a^{-2} \int_{\Omega_2} |p_2|^2 d\Omega_2, \quad (1.5.9)$$

в которой правая часть есть удвоенная полная энергия гидросистемы, отвечающая потенциальным движениям газа с полем скорости $\nabla \Phi_2 = \nabla \Phi_{21} + \nabla \Phi_{22}$ (см. (1.1.20)).

Из (1.5.9) следует, что C — самосопряженный неотрицательный оператор. Покажем, что он положительно определен. Из представления (1.5.8) и свойств операторов V и $\gamma_{n,1}$ (см. леммы 2.3 и 1.2) следует, что имеет место неравенство

$$\|\Phi_{22}\|_{H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})} = \left(\int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_{22}|^2 d\Omega_2 \right)^{1/2} \leq c \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}, \quad c > 0.$$

Отсюда при $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta > 0$, получаем что

$$\rho_1 \int_{\Omega_1} |\mathbf{u}_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_{21} + \nabla \Phi_{22}|^2 d\Omega_2 \geq \rho_1 \alpha \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}^2 + \\ + \rho_1 \beta c^{-2} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_{22}|^2 d\Omega_2 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_{22}|^2 d\Omega_2 + \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_{21}|^2 d\Omega_2 - \\ - \varepsilon \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_{21}|^2 d\Omega_2 - \varepsilon^{-1} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_{22}|^2 d\Omega_2 \geq \rho_1 \alpha \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}^2 + \\ + (\rho_1 \beta c^{-2} + 1 - \varepsilon^{-1}) \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_{22}|^2 d\Omega_2 + (1 - \varepsilon) \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_{21}|^2 d\Omega_2, \quad \varepsilon > 0. \quad (1.5.10)$$

Выбирая ε так, чтобы было выполнено условие

$$(1 + \rho_1 \beta c^{-2})^{-1} \leq \varepsilon < 1,$$

приходим к выводу, что квадратичная форма в левой части (1.5.10) положительно определена в пространстве $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$. Отсюда и из (1.5.9) следует, что оператор C положительно определен в $\mathcal{H} = \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Gamma} \oplus \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \oplus L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1})$. $\square$

1.6. Дальнейшие преобразования задачи. Изучив свойства оператора полной энергии C из (1.5.3), продолжим рассмотрение этой задачи и напомним, что оператор B из (1.5.3) содержит интегральный оператор Вольтерра $I_{01}(t)$ (см. (1.1.4)), отвечающий обобщенной модели Олдройта. Это позволяет перейти от (1.5.3) к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве, введя новые искомые функции в изучаемой задаче.

Прделаем соответствующие преобразования для простоты при $m = 2$ (для других $m \in \mathbb{N}$ преобразования аналогичные). Именно, введем функции

$$\mathbf{w}_k(t, x) := \mu_1^{1/2} \alpha_k A_1^{1/2} \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} \mathbf{u}_1(s, x) ds, \quad \mathbf{w}_k(0, x) = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2. \quad (1.6.1)$$

Отсюда имеем

$$\frac{d\mathbf{w}_k}{dt} = \mu_1^{1/2} \alpha_k^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 - \beta_k \mathbf{w}_k, \quad k = 1, 2. \quad (1.6.2)$$

Введем также новый искомый вектор-столбец

$$\tilde{z}(t) := (z_1^T; z_2^T)^T, \quad z_1^T = (\mathbf{u}_1; \mathbf{w}_1; \mathbf{w}_2; \zeta), \quad z_2^T = (\nabla \Phi_{21}; p_2). \quad (1.6.3)$$

Тогда задача (1.5.3) перейдет с учетом (1.6.2) в задачу Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка следующего вида:

$$\tilde{C} \frac{d\tilde{z}}{dt} + \tilde{B}\tilde{z} = \tilde{f}, \quad \tilde{z}(0) = \tilde{z}^0, \quad (1.6.4)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C} &:= \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}, \\ \tilde{f} &= \left(\rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 - \rho_{2,0}(0) Q P_\Gamma \gamma_2 F_2; \mathbf{0}; \mathbf{0}; 0; \nabla F_2; 0 \right)^\top, \\ \tilde{C}_{11} &:= \text{diag} \left(\rho_1 \tilde{I}_1 + (\rho_{2,0}(0))^2 (Q \gamma_2) (V \gamma_{n,1}); \tilde{I}_2; \tilde{I}_3; g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \tilde{I}_4 \right); \\ \tilde{C}_{22} &:= \text{diag} (\tilde{I}_5; a^{-2} \tilde{I}_6); \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

здесь $\tilde{I}_k$ — единичные операторы в пространствах элементов из (1.6.3). Далее,

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{12} &:= \begin{pmatrix} -\rho_{2,0}(0) Q P_\Gamma \gamma_2 \nabla^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_{21} := \begin{pmatrix} -\rho_{2,0}(0) \nabla V \gamma_{n,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B_{11} &:= \begin{pmatrix} \mu_1 A_1 & \mu_1^{1/2} \alpha_1^{1/2} A_1^{1/2} & \mu_1^{1/2} \alpha_2^{1/2} A_1^{1/2} & g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) Q \\ -\mu_1^{1/2} \alpha_1^{1/2} A_1^{1/2} & \beta_1 \tilde{I}_2 & 0 & 0 \\ -\mu_1^{1/2} \alpha_2^{1/2} A_1^{1/2} & 0 & \beta_2 \tilde{I}_3 & 0 \\ -g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \gamma_{n,1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B_{22} &:= \begin{pmatrix} 0 & B_{34} \\ B_{43} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

Заметим, что искомые элементы $\tilde{z}(t)$ теперь считаются функциями переменной t со значениями в пространстве

$$\tilde{\mathcal{H}} = (\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Gamma}) \oplus \left(\mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \oplus L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1}) \right) =: \tilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{H}}_2$$

(см. (1.5.1)).

Дальнейший план исследований — изучить свойства операторных матриц $\tilde{C}$ и $\tilde{B}$ в (1.6.4) и доказать теорему существования сильного по переменной t решения этой задачи.

Отметим предварительно следующий факт.

Лемма 1.6. *Оператор $\tilde{C} : \tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ является ограниченным положительно определенным оператором, действующим в $\tilde{\mathcal{H}}$.*

Доказательство. Лемма 1.6 непосредственно следует из леммы 1.5 с учетом вида операторной матрицы $\tilde{C}_{11}$, в частности, с учетом добавления единичных элементов $\tilde{I}_2, \tilde{I}_3$ на диагонали. $\square$

Изучим теперь свойства операторных блоков B_{11} и B_{22} в операторной матрице $\tilde{B}$ (см. (1.6.6)).

Лемма 1.7. *Операторная матрица B_{11} заданная на области определения*

$$\mathcal{D}(B_{11}) = \mathcal{D}(A_1) \oplus \mathcal{D}(A_1) \oplus \mathcal{D}(A_1) \oplus H_\Gamma^{1/2},$$

плотной в пространстве

$$\tilde{\mathcal{H}}_1 = \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Gamma},$$

допускает факторизацию с симметричными крайними множителями:

$$B_{11} = \text{diag} (\mu_1^{1/2} A_1^{1/2}; \tilde{I}_2; \tilde{I}_3; \tilde{I}_4) \cdot E_0 \cdot \text{diag} (\mu_1^{1/2} A_1^{1/2}; \tilde{I}_2; \tilde{I}_3; \tilde{I}_4), \quad (1.6.7)$$

где

$$E_0 := \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 & \alpha_1^{1/2} \tilde{I}_2 & \alpha_2^{1/2} \tilde{I}_3 & g\mu_1^{-1/2}(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))A_1^{-1/2}Q \\ -\alpha_1^{1/2} \tilde{I}_1 & \beta_1 \tilde{I}_2 & 0 & 0 \\ -\alpha_2^{1/2} \tilde{I}_1 & 0 & \beta_2 \tilde{I}_3 & 0 \\ -g\mu_1^{-1/2}(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}A_1^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6.8)$$

Эта операторная матрица является аккретивным оператором:

$$\operatorname{Re}(B_{11}z_1, z_1)_{\tilde{\mathcal{H}}_1} \geq 0 \quad \forall z_1 \in \mathcal{D}(B_{11}). \quad (1.6.9)$$

При любом $b > 0$ операторная матрица

$$B_{11,b} := B_{11} + bP_4, \quad P_4 := \operatorname{diag}(0; 0; 0; \tilde{I}_4) \quad (1.6.10)$$

является равномерно аккретивным оператором:

$$\operatorname{Re}(B_{11,b}z_1, z_1)_{\tilde{\mathcal{H}}_1} \geq c\|z_1\|_{\tilde{\mathcal{H}}_1}^2, \quad c > 0, \quad \forall z_1 \in \mathcal{D}(B_{11,b}) = \mathcal{D}(B_{11}). \quad (1.6.11)$$

Доказательство. Факторизация (1.6.7) матрицы B_{11} проверяется непосредственно. Свойство аккретивности (1.6.9) следует из равенства

$$\operatorname{Re}(B_{11}z_1, z_1)_{\tilde{\mathcal{H}}_1} = \mu_1 \|A_1^{1/2} \mathbf{u}_1\|_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}^2 + \sum_{k=1}^2 \beta_k \|\mathbf{w}_k\|_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}^2.$$

Отсюда получаем свойство равномерной аккретивности (1.6.11), если заметить, что

$$\|A_1^{1/2} \mathbf{u}_1\|_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}^2 \geq \lambda_1(A_1) \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}^2$$

где $\lambda_1(A_1) > 0$ — первое собственное значение оператора A_1 . Тогда в (1.6.11) имеем

$$c = \max \{ \mu_1 \lambda_1(A_1); \beta_1, \beta_2; b \} > 0. \quad \square$$

Лемма 1.8. Оператор $\gamma_{n,1}A_1^{-1/2} : \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \rightarrow L_{2,\Gamma}$ компактен. Оператор $A_1^{-1/2}Q : \mathcal{D}(Q) \rightarrow \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ и его замыкание обладают свойствами

$$A_1^{-1/2}Q = (\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*|_{\mathcal{D}(Q)}, \quad \overline{A_1^{-1/2}Q} = (\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*. \quad (1.6.12)$$

Доказательство. Оператор $A_1^{-1/2}$ переводит $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ в $\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1) \subset \mathbf{H}^1(\Omega_1)$, а тогда (по теореме Гальярдо, см. [21]) $\gamma_{n,1}A_1^{-1/2}$ ограниченно действует из $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ в $H_\Gamma^{1/2} = H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}$. Так как $H_\Gamma^{1/2}$ компактно вложено в $L_{2,\Gamma}$, то $\gamma_{n,1}A_1^{-1/2}$ — компактный оператор.

Далее, пусть $\mathbf{u}_1$ — произвольный элемент из $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ и $\zeta \in \mathcal{D}(Q) \subset L_{2,\Gamma}$. Тогда

$$(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2}\mathbf{u}_1, \zeta)_{L_{2,\Gamma}} = (A_1^{-1/2}\mathbf{u}_1, Q\zeta)_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} = (\mathbf{u}_1, A_1^{-1/2}Q\zeta)_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}.$$

Отсюда следует, что $A_1^{-1/2}Q = \overline{(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*}|_{\mathcal{D}(Q)}$, и так как $\mathcal{D}(Q) \subset H_\Gamma^{1/2}$ плотно в $L_{2,\Gamma}$, то имеет место свойство (1.6.12), причем $\overline{A_1^{-1/2}Q}$ — компактный оператор. $\square$

Заметим теперь, что оператор $B_{11,b}$ из (1.6.10) также допускает факторизацию вида (1.6.7) с теми же крайними множителями и со средним множителем

$$E_b := \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 & \alpha_1^{1/2} \tilde{I}_2 & \alpha_2^{1/2} \tilde{I}_3 & g\mu_1^{-1/2}(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))A_1^{-1/2}Q \\ -\alpha_1^{1/2} \tilde{I}_1 & \beta_1 \tilde{I}_2 & 0 & 0 \\ -\alpha_2^{1/2} \tilde{I}_1 & 0 & \beta_2 \tilde{I}_3 & 0 \\ -g\mu_1^{-1/2}(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}A_1^{-1/2} & 0 & 0 & b\tilde{I}_4 \end{pmatrix}. \quad (1.6.13)$$

Из приведенных фактов вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.9. Оператор $B_{11,b}$ из (1.6.10) допускает расширение путем замыкания среднего множителя (1.6.13) на основе (1.6.12). При этом замыкание $\overline{B_{11,b}}$ имеет факторизацию

$$\overline{B_{11,b}} = \text{diag}(\mu_1^{1/2} A_1^{1/2}; \tilde{I}_2; \tilde{I}_3; \tilde{I}_4) \cdot \overline{E_b} \cdot \text{diag}(\mu_1^{1/2} A_1^{1/2}; \tilde{I}_2; \tilde{I}_3; \tilde{I}_4), \quad (1.6.14)$$

является максимальным равномерно аккретивным оператором в $\tilde{\mathcal{H}}_1$, заданным на области определения

$$\mathcal{D}(\overline{B_{11,b}}) = \left\{ z_1 = (\mathbf{u}_1; \mathbf{w}_1; \mathbf{w}_2; \zeta)^\tau : \right. \\ \left. \mu_1^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \sum_{k=1}^2 \alpha_k^{1/2} \mathbf{w}_k + g \mu_1^{-1/2} (\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) (\gamma_{n,1} Q)^* \zeta \in \mathcal{D}(A_1^{1/2}) \right\} \quad (1.6.15)$$

и действует по закону

$$\overline{B_{11,b}} z_1 = \begin{pmatrix} \mu_1^{1/2} A_1^{1/2} \left(\mu_1^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \sum_{k=1}^2 \alpha_k^{1/2} \mathbf{w}_k + g \mu_1^{-1/2} (\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) (\gamma_{n,1} A^{-1/2})^* \zeta \right) \\ - \mu_1^{1/2} \alpha_1^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \beta_1 \mathbf{w}_1 \\ - \mu_1^{1/2} \alpha_2^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{w}_2 \\ - g \mu_1^{-1/2} (\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 + b \zeta \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь свойство максимальности оператора $\overline{B_{11,b}}$. Однако этот факт следует из того, что в представлении (1.6.14) каждая операторная матрица ограничено обратима в $\tilde{\mathcal{H}}_1$, в частности, для $\overline{E_b}$ это следует из того факта, что неравенство (1.6.11) сохраняется и для $\overline{B_{11,b}}$, и потому область значений $\mathcal{R}(\overline{B_{11,b}})$ есть все пространство $\tilde{\mathcal{H}}_1$. $\square$

Из леммы 1.9 получаем следующий важный вывод.

Лемма 1.10. Оператор $-\overline{B_{11,b}}$ является генератором сжимающей полугруппы $U_1(t)$, причем $\|U_1(t)\| \leq e^{-ct}$, $c > 0$ (см. (1.6.11), ($\square$)). При этом оператор $-\overline{B_{11}} := -(\overline{B_{11,b}} - bP_4)$ также является генератором сжимающей полугруппы операторов.

Перейдем теперь к изучению свойств оператора B_{22} из (1.6.6), отвечающего движению газа в исследуемой системе. Этот оператор действует в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_2 = \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \oplus L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1})$ с элементами $z_2 = (\nabla \Phi_{21}; p_2)^\tau$. Очевидно, это оператор неограничен, и его область значений должна совпадать с $\tilde{\mathcal{H}}_2$. Поэтому далее будем считать, что

$$\mathcal{D}(B_{22}) = \left\{ \nabla \Phi_{21} \in \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) : \text{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_{21}) \in L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1}), \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial \Omega_2 \right\} \oplus \\ \oplus \left\{ p_2 \in L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1}) : \nabla(\rho_{2,0}^{-1} p_2) \in \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \right\}. \quad (1.6.16)$$

Лемма 1.11. Оператор $B_{22} : \mathcal{D}(B_{22}) \subset \tilde{\mathcal{H}}_2 \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_2$ является кососамосопряженным, т.е.

$$B_{22}^* = -B_{22}. \quad (1.6.17)$$

Доказательство. Пусть $z_2 = (\nabla \Phi_{21}; p_2)^\tau \in \mathcal{D}(B_{22})$, $y_2 = (\nabla \Psi_{21}; q_2)^\tau \in \mathcal{D}(B_{22})$. Тогда, используя формулу вида $\text{div}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \text{div} \mathbf{A} + \nabla \varphi \cdot \mathbf{A}$, вычислим выражение

$$(B_{22} z_2, y_2)_{\tilde{\mathcal{H}}_2} = \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla \Phi_{21} \cdot \overline{\nabla \Psi_{21}} d\Omega_2 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1} \text{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_{21}) \overline{q_2} d\Omega_2 = \\ = \left\{ \int_{\Omega_2} \text{div}(\rho_{2,0}^{-1} p_2 \rho_{2,0} \overline{\nabla \Psi_{21}}) d\Omega_2 - \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1} p_2 \text{div}(\rho_{2,0} \overline{\nabla \Psi_{21}}) d\Omega_2 \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \int_{\Omega_2} \operatorname{div}(\rho_{2,0}^{-1} \overline{q_2} \rho_{2,0} \nabla \Phi_{21}) d\Omega_2 - \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla \Phi_{21} \cdot \nabla(\rho_{2,0}^{-1} \overline{q_2}) d\Omega_2 \right\} = \\
& = - \left[\int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla \Phi_{21} \cdot \overline{\nabla(\rho_{2,0}^{-1} q_2)} d\Omega_2 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1} p_2 \overline{\operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Psi_{21})} d\Omega_2 \right] = -(z_2, B_{22} y_2)_{\tilde{\mathcal{H}}_2}
\end{aligned}$$

для всех $z_2, y_2 \in \mathcal{D}(B_{22})$ (здесь при выводе использовано граничное условие на $\partial\Omega_2$, см. (1.6.16), и теорема Гаусса—Остроградского). Отсюда и следует свойство (1.6.17). $\square$

Рассмотрим подробнее другие свойства оператора B_{22} и его связь с оператором задачи Неймана (1.3.5).

Лемма 1.12. *Оператор $B_{22} : \mathcal{D}(B_{22}) \subset \tilde{\mathcal{H}}_2 \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_2$ обратим.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение $B_{22} z_2 = y_2 \in \tilde{\mathcal{H}}_2$, $z_2 = (\nabla \Phi_{21}; p_2)^\tau$, причем y_2 представим в виде $y_2 = (\nabla(\rho_{2,0}^{-1} \psi_2); \rho_{2,0} q_2)^\tau$, с заданными произвольными функциями ψ_2 и q_2 . Тогда будем иметь соотношения

$$\nabla(\rho_{2,0}^{-1} p_2) = \nabla(\rho_{2,0}^{-1} \psi_2),$$

и задачу

$$\operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_{21}) = \rho_{2,0} q_2 \quad \text{в } \Omega_2, \quad \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_2. \quad (1.6.18)$$

Отсюда в силу нормировки

$$\int_{\Omega_2} \rho_{2,0} (\rho_{2,0}^{-1} \psi_2) d\Omega_2 = 0$$

(см. (1.2.9)) для элементов из $\mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$ получаем $p_2 = \psi_2$, а в задаче (1.6.18) возникает проблема

$$\begin{aligned}
-\Delta_0 \Phi_{21} &= -\rho_{2,0}^{-1} \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_{21}) = -q_2 \quad \text{в } \Omega_2, \\
\rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega_2, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{21} d\Omega_2 = 0
\end{aligned}$$

(см. (1.3.8)), равносильная уравнению

$$A_2 \Phi_{21} = -q_2 \in L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}} \quad (1.6.19)$$

(см. (1.3.7)), где A_2 — оператор гильбертовой пары $(H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}); L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}})$, изученный в п. 1.3. Отсюда следует, что задача (1.6.19) однозначно разрешима: $\Phi_{21} = -A_2^{-1} q_2 \in H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ и потому $\nabla \Phi_{21} \in \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$ (между элементами из $\mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$ и $H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$ имеется изоморфизм, осуществляемый операторами ∇ и ∇^{-1}). $\square$

Лемма 1.13. *Спектр оператора B_{22} дискретен и расположен на мнимой оси. Его собственные значения образуют множество $\{\lambda_k^\pm(B_{22})\}_{k=1}^\infty$ с двумя ветвями:*

$$\lambda_k^\pm(B_{22}) = \pm i \lambda_k^{1/2}(A_2), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\{\lambda_k(A_2)\}_{k=1}^\infty$ — собственные значения оператора A_2 (см. (1.6.19)):

$$\begin{aligned}
0 &< \lambda_1(A_2) \leq \lambda_2(A_2) \leq \dots \leq \lambda_k(A_2) \leq \dots, \\
\lambda_k(A_2) &= \left(\frac{|\Omega_2|}{6\pi^2} \right)^{-2/3} k^{2/3} [1 + o(1)], \quad k \rightarrow \infty.
\end{aligned} \quad (1.6.20)$$

Собственные элементы

$$\{z_k^\pm\}_{k=1}^\infty = \{(\nabla \Phi_{21,k}^\pm; p_{2,k}^\pm)^\tau\}_{k=1}^\infty,$$

отвечающие собственным значениям оператора B_{22} , образуют ортогональный базис в $\tilde{\mathcal{H}}_2$ и выражаются через ортонормированные собственные элементы оператора A_2 , т.е. решения спектральной задачи

$$-\Delta_0 \Phi_{21} = \lambda \Phi_{21} \quad \text{в } \Omega_2, \quad \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \partial \Omega_2, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{21} d\Omega_2 = 0, \quad (1.6.21)$$

по формулам

$$z_k^\pm = (\nabla \Phi_{21,k}; \lambda_k^\pm \rho_{2,0} \Phi_{21,k})^\tau, \quad k = 1, 2, \dots$$

При этом для ортонормированных в $L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ собственных элементов задачи (1.6.21) выполнены следующие формулы ортогональности для ортонормированных элементов $\{z_k^\pm\}_{k=1}^\infty$:

$$(z_k^\pm, z_l^\pm)_{\tilde{\mathcal{H}}_2} = \left(\frac{1 + (\pm 1)(\pm 1)}{2} \right)^{1/2} \delta_{kl},$$

где учтены все четыре варианта знаков слева.

Доказательство проводится непосредственной проверкой всех связей возникающих задач для операторов B_{22} и A_2 . Асимптотическая формула (1.6.20) — это известная асимптотика Вейля в спектральной задаче Неймана для оператора Лапласа при $\rho_{2,0} = \text{const}$. $\square$

Подводя итоги исследования свойств оператора $\tilde{B} = \text{diag}(B_{11}, B_{22})$ в задаче Коши (1.6.4), отметим, что первый блок B_{11} характеризует диссипативную вязкоупругую часть исследуемой гидросистемы (жидкость), а второй блок B_{22} — консервативную часть (газ). В итоге приходим к следующему выводу.

Лемма 1.14. После замыкания (оператора B_{11}) оператор $\tilde{B}$ является максимальным аккретивным оператором, действующим в $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{H}}_2$ и заданным на области определения

$$\mathcal{D}(\tilde{B}) = \mathcal{D}(\tilde{B}_{11}) \oplus \mathcal{D}(B_{22}), \quad \mathcal{D}(\tilde{B}_{11}) = \mathcal{D}(\tilde{B}_{11,b}), \quad \mathcal{R}(\tilde{B}) = \tilde{\mathcal{H}}.$$

Доказательство. Так как B_{22} кососамосопряжен в $\tilde{\mathcal{H}}_2$, то он является генератором группы унитарных операторов, действующих в $\tilde{\mathcal{H}}_2$. Поэтому вместе с утверждениями лемм 1.9 и 1.10 получаем утверждение леммы 1.14. $\square$

1.7. О разрешимости исходной начально-краевой задачи. Опираясь на установленные факты, докажем утверждение о разрешимости задачи Коши (1.5.3), к которой была приведена исходная начально-краевая задача (1.1.5)–(1.1.13).

Определение 1.1. Будем говорить, что задача Коши (1.5.3) имеет сильное по переменной t решение $z(t) = (\mathbf{u}_1; \zeta; \nabla \Phi_{21}; p_2)^\tau$ на отрезке $[0, T]$, если все слагаемые в уравнении (1.5.3) являются непрерывными функциями t со значениями в пространстве

$$\mathcal{H} := \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Gamma} \oplus \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \oplus L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1})$$

и выполнено начальное условие $z(0) = z^0$.

Согласно этому определению для сильного решения задачи все слагаемые в уравнении (1.4.13) должны быть элементами из $C([0, T]; \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1))$, в уравнении (1.4.14) — элементами из $C([0, T]; L_{2,\Gamma})$, в уравнении (1.4.15) — элементами из $C([0, T]; \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}))$, а в уравнении (1.4.16) — элементами из $C([0, T]; L_2(\Omega_2; \rho_{2,0}^{-1}))$.

Теорема 1.1. Пусть в задаче (1.5.3) выполнены условия

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^0 &\in \mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{D}(A_1^{1/2}) = \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1), \quad \zeta^0 \in \mathcal{D}(Q) = H_\Gamma^{1/2}, \\ \Phi_{21}^0 &\in \mathcal{D}(A_2) \subset \mathcal{D}(A_2^{1/2}) = H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0}), \quad \nabla(\rho_{2,0}^{-1} p_2^0) \in \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}), \end{aligned} \quad (1.7.1)$$

а также условия

$$\mathbf{f}_1(t, x) \in C^1([0, T]; \mathbf{L}_2(\Omega_1)), \quad \mathbf{f}_2(t, x) \in C^1([0, T]; \mathbf{L}_2(\Omega_2)). \quad (1.7.2)$$

Тогда задача (1.5.3) имеет сильное по переменной t решение $z(t)$ на отрезке $[0, T]$ (в смысле определения 1.1).

Доказательство состоит из нескольких этапов.

1. Рассмотрим задачу Коши вида (1.6.4), однако с оператором $\bar{B} = \text{diag}(\bar{B}_{11}; B_{22})$, который, согласно леммам 1.9–1.11, 1.14, является максимальным аккретивным:

$$\tilde{C} \frac{d\tilde{z}}{dt} + \bar{B}\tilde{z} = \tilde{f}(t), \quad \tilde{z}(0) = \tilde{z}^0. \quad (1.7.3)$$

При этом начальные данные выберем в виде (1.7.1), т.е. из области определения оператора B (см. (1.5.3)), и дополним их тривиальными начальными условиями

$$\mathbf{w}_k(0) = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2$$

(см. (1.6.1), (1.6.2)). Тогда эти условия порождают начальный элемент

$$\tilde{z}^0 = (\mathbf{u}_1^0; \mathbf{0}; \mathbf{0}; \zeta^0; \nabla \Phi_{21}^0; p_2^0)^\tau \in \mathcal{D}(\tilde{B}) \subset \mathcal{D}(\bar{B}). \quad (1.7.4)$$

Аналогично проверяем, что если выполнено условие (1.7.2), то заданная функция $\tilde{f}(t)$ обладает свойством

$$\tilde{f}(t) \in C^1([0, T]; \tilde{\mathcal{H}}) \quad (1.7.5)$$

(см. (1.6.5)). Воспользуемся теперь тем фактом, что оператор $\tilde{C}$ в (1.7.3) положительно определен и ограничен в $\tilde{\mathcal{H}}$, и введем в $\tilde{\mathcal{H}}$ эквивалентную норму, порожденную скалярным произведением

$$(\tilde{z}, \tilde{y})_{\tilde{C}} := (\tilde{C}\tilde{z}, \tilde{y})_{\tilde{\mathcal{H}}}. \quad (1.7.6)$$

Перепишем затем задачу (1.7.3) в виде

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = -\tilde{C}^{-1}\bar{B}\tilde{z} + \tilde{C}^{-1}\tilde{f}(t), \quad \tilde{z}(0) = \tilde{z}^0, \quad (1.7.7)$$

и заметим, что оператор $-\tilde{C}^{-1}\bar{B}$ является максимальным диссипативным в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{C}}$ со скалярным произведением (1.7.6). Поэтому (см., например, [12, с. 166]) при условиях (1.7.4), (1.7.5) задача (1.7.7) имеет единственное сильное решение $\tilde{z}(t)$, т.е. такое, что все слагаемые в (1.7.7) являются элементами из $C([0, T]; \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{C}})$. Отсюда следует, что $\tilde{z}(t)$ является также сильным решением задачи Коши (1.7.3), где все слагаемые являются непрерывными функциями t со значениями в $\tilde{\mathcal{H}}$.

2. Выпишем теперь эту систему уравнений построчно с учетом представления операторной матрицы $\bar{B}$ в факторизованном виде (см. (1.6.7), (1.6.8), (1.6.13)–(1.6.15)). Имеем задачу

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \left[\rho_1 \mathbf{u}_1 + (\rho_{2,0}(0))^2 (Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1}) \mathbf{u}_1 \right] - \rho_{2,0}(0) (QP_\Gamma \gamma_2 \nabla^{-1})(\nabla \Phi_{21}) \right\} + \\ + \mu_1^{1/2} A_1^{1/2} \left\{ \mu_1^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \sum_{k=1}^2 \alpha_k^{1/2} \mathbf{w}_k + g\mu_1^{-1/2} (\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2})^* \zeta \right\} = \\ = \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 - \rho_{2,0}(0) QP_\Gamma \gamma_2 F_2, \end{aligned} \quad (1.7.8a)$$

$$\nabla F_2 = P_{G,2} \mathbf{f}_2, \quad \mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_1^0, \quad (1.7.8b)$$

$$\frac{d\mathbf{w}_1}{dt} - \mu_1^{1/2} \alpha_1^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \beta_1 \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}_1(0) = \mathbf{0}, \quad (1.7.8c)$$

$$\frac{d\mathbf{w}_2}{dt} - \mu_1^{1/2} \alpha_2^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \beta_1 \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}_2(0) = \mathbf{0}, \quad (1.7.8d)$$

$$g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \frac{d\zeta}{dt} - g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 = 0, \quad \zeta(0) = \zeta^0, \quad (1.7.8e)$$

$$\frac{d}{dt} (\nabla \Phi_{21} - \rho_{2,0}(0) \nabla (V\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1)) + \nabla (\rho_{2,0}(0)^{-1} p_2) = P_{G,2} \mathbf{f}_2 =: \nabla F_2, \quad \nabla \Phi_{21}(0) = \nabla \Phi_{21}^0, \quad (1.7.8f)$$

$$a^{-2} \frac{dp_2}{dt} + \text{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_{21}) = 0, \quad p_2(0) = p_2. \quad (1.7.8g)$$

Заметим, что система уравнений, отвечающая задаче (1.6.4) с незамкнутым оператором $\tilde{B}$, отличается от (1.7.8) лишь тем, что в первом уравнении (1.7.8а) слева раскрыты вторые скобки, а также оператор $(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*$ заменен на $A_1^{-1}Q$ (см. лемму 1.8). Таким образом, теперь возникает проблема доказать, что при условиях данной теоремы (см. (1.7.1), (1.7.2)) можно раскрыть упомянутые скобки, и тогда все полученные слагаемые в первом уравнении (1.7.8а) будут элементами из $C([0, T]; \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1))$.

3. Переходя к доказательству этого факта, отметим, что для сильного решения задачи (1.7.3) функция переменной t в упомянутых скобках является элементом из $C([0, T]; \mathcal{D}(A_1^{1/2})) = C([0, T]; \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1))$. Но тогда

$$\mathbf{v}_1 := \left\{ \mathbf{u}_1 + \sum_{k=1}^2 \alpha_k^{1/2} \mu_1^{-1/2} A_1^{-1/2} \mathbf{w}_k + g \mu_1^{-1/2} (\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) A_1^{-1/2} (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2})^* \zeta \right\} \in C([0, T]; \mathcal{D}(A_1)). \quad (1.7.9)$$

Однако из уравнений (1.7.8b), (1.7.8c), (1.7.8d) задачи (1.7.8) следует (см. (1.6.1), (1.6.2)), что

$$\mathbf{w}_k(t) = \mu_1^{1/2} \alpha_k^{1/2} A_1^{1/2} \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} \mathbf{u}_1(s) ds, \quad k = 1, 2, \quad \zeta(t) = \int_0^t \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1(s) ds + \zeta^0. \quad (1.7.10)$$

Подставляя эти выражения в (1.7.9), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(t) + \sum_{k=1}^2 \alpha_k^{1/2} \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} \mathbf{u}_1(s) ds + \\ + g \mu_1^{-1} (\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) A_1^{-1/2} (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2})^* \left(\int_0^t \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1(s) ds + \zeta^0 \right) = \\ = \mathbf{v}_1(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A_1)). \end{aligned} \quad (1.7.11)$$

Рассмотрим (1.7.11) как интегральное уравнение Вольтерра в пространстве $\mathcal{H}(A_1)$ с нормой графика оператора A_1 . Тогда в силу леммы 1.8 имеем для $\mathbf{u}_1(t) \in C([0, T]; \mathcal{H}(A_1)) = C([0, T]; \mathcal{D}(A_1))$ соотношение

$$A_1^{-1/2} (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2})^* (\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1) = A_1^{-1/2} (A_1^{-1/2} Q) (\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1) = A_1^{-1} (Q \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A_1))$$

(см. лемму 1.2 и свойство (1.5.4)). Отсюда следует, что в интегральном уравнении Вольтерра (1.7.11) ядро является непрерывной по t, s оператор функцией в треугольнике $\Delta_T := \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$, принимающей значения из $\mathcal{L}(\mathcal{H}(A_1))$. Поэтому уравнение (1.7.11) имеет единственное решение $\mathbf{u}_1(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A_1))$, причем все остальные слагаемые в (1.7.11) также принадлежат этому пространству.

4. Но тогда в уравнении (1.7.8а) можно раскрыть скобки во втором слагаемом слева, а затем из системы исключить функции $\mathbf{w}_k(t)$, $k = 1, 2$ (см. (1.7.10)). В итоге возникает система уравнений (1.4.13)–(1.4.16), где все слагаемые являются непрерывными функциями t со значениями в соответствующих пространствах. Значит, задача (1.4.13)–(1.4.16), т.е. задача (1.5.3), имеет единственное сильное решение в смысле определения 1.1. $\square$

В качестве замечания к теореме 1.1 отметим, что для сильного решения задачи (1.5.3) при условиях (1.7.1), (1.7.2) имеют место следующие свойства:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &\in C([0, T]; \mathcal{D}(A_1)) \cap C^1([0, T]; \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)); \\ \nabla \Phi_{21} &\in C^1([0, T]; \mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})); \quad \zeta \in C^1([0, T]; H_\Gamma^{1/2}); \\ p_2 &\in C^1([0, T]; L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}^{-1}}) \cap C([0, T]; H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})). \end{aligned}$$

Опираясь на теорему 1.1, можно получить утверждение об однозначной разрешимости исходной начально-краевой задачи (1.1.5)–(1.1.13) на произвольном отрезке времени $[0, T]$.

1.8. К проблеме нормальных колебаний системы «вязкоупругая жидкость—баротропный газ». Рассмотрим решения однородной задачи (1.7.3), зависящие от времени по закону

$$\tilde{z}(t) = \tilde{z}e^{-\lambda t}.$$

Функции такого вида называют нормальными движениями исследуемой системы, числа λ — комплексными декрементами затухания нормальных движений, а $\tilde{z} \neq 0$ — амплитудными элементами.

Для нахождения амплитудных элементов и чисел λ возникает из (1.7.3) спектральная задача

$$\bar{B}\tilde{z} = \lambda\tilde{C}\tilde{z}, \quad \tilde{z} \in \mathcal{D}(\bar{B}) \subset \tilde{\mathcal{H}},$$

которая, в частности, получается из системы уравнений (1.7.8) и выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_1^{1/2} A_1^{1/2} \left\{ \mu_1^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \alpha_1^{1/2} \mathbf{w}_1 + \alpha_2^{1/2} \mathbf{w}_2 + g\mu_1^{-1/2} (\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2})^* \zeta \right\} = \\ = \lambda \left[\rho_1 \mathbf{u}_1 + (\rho_{2,0}(0))^2 (Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1}) \mathbf{u}_1 \right] - \rho_{2,0}(0) Q P_\Gamma \gamma_2 \Phi_{21}, \end{aligned} \quad (1.8.1a)$$

$$-\mu_1^{1/2} \alpha_1^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \beta_1 \mathbf{w}_1 = \lambda \mathbf{w}_1, \quad (1.8.1b)$$

$$-\mu_1^{1/2} \alpha_2^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{w}_2 = \lambda \mathbf{w}_2, \quad (1.8.1c)$$

$$-g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 = \lambda g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \zeta, \quad (1.8.1d)$$

$$\nabla(\rho_{2,0}(0)^{-1} p_2) = \lambda (\nabla \Phi_{21} - \rho_{2,0}(0) \nabla (V\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1)), \quad (1.8.1e)$$

$$\operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_{21}) = \lambda a^{-2} p_2. \quad (1.8.1f)$$

Наша дальнейшая цель — исключить из системы уравнений (1.8.1) часть неизвестных, перейти к спектральной задаче для операторного пучка (оператор-функции от λ) с ограниченными операторными коэффициентами и исследовать ее методами спектральной теории (см., например, [15]).

Установим сначала следующий простой факт.

Лемма 1.15. Числа $\lambda = 0$, $\lambda = \beta_k$, $k = 1, 2$, не являются собственными значениями спектральной задачи (1.8.1).

Доказательство. 1. Положим $\lambda = 0$ в (1.8.1). Тогда из предпоследнего уравнения (1.8.1e) получаем, что $\nabla(\rho_{2,0}(0)^{-1} p_2) = \mathbf{0}$. Так как это элемент из $\mathbf{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$ (см. (1.2.9)), то $p_2 = 0$. Далее, из последнего уравнения (1.8.1f) и граничных условий для Φ_{21} возникает задача

$$-\Delta_0 \Phi_{21} = 0 \quad \text{в } \Omega_2, \quad \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_2, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{21} d\Omega_2 = 0,$$

которая имеет лишь тривиальное решение: $\Phi_{21} = 0$.

Из уравнений (1.8.1b)–(1.8.1d) имеем также связи

$$\beta_k \mathbf{w}_k = \mu_1^{1/2} \alpha_k \beta_k^{-1} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1, \quad k = 1, 2, \quad \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 = 0,$$

а тогда из первого уравнения (1.8.1a) получаем соотношение

$$\mu_1^{1/2} \left(1 + \sum_{k=1}^2 \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 + g\mu_1^{-1/2} (\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2})^* \zeta = \mathbf{0}.$$

Отсюда следует, что

$$\left(1 + \sum_{k=1}^2 \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) \|\mu_1^{1/2} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1\|_{L_2(\Omega_1)}^2 = 0,$$

так как

$$\left((\gamma_{n,1} A_1^{-1/2})^* \zeta, A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 \right)_{L_2(\Omega_1)} = (\zeta, (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2}) A_1^{1/2} \mathbf{u}_1)_{L_2, \Gamma} = (\zeta, \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1)_{L_2, \Gamma} = 0.$$

Значит, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$.

Наконец, из оставшейся связи $(\gamma_{n,1} A_1^{-1/2})^* \zeta = 0$ при любом $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ имеем

$$\left(\boldsymbol{\eta}, (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2})^* \zeta \right)_{\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} = (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2} \boldsymbol{\eta}, \zeta)_{L_2, \Gamma} = 0,$$

и так как совокупность элементов вида $\gamma_{n,1} A_1^{-1/2} \boldsymbol{\eta}$ при $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ образует множество $H_\Gamma^{1/2}$, плотное в $L_{2,\Gamma}$, то $\zeta = 0$. Это доказывает первое утверждение леммы.

2. Положим теперь $\lambda = \beta_1$ в (1.8.1). Тогда из второго уравнения (1.8.1b) получаем $A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ и потому $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$. Поэтому из третьего уравнения (1.8.1c) следует $(\beta_1 \neq \beta_2)$, что $\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$, а из четвертого (1.8.1d) имеем $\zeta = 0$. Далее, для функций Φ_{21} и p_2 возникает задача

$$\begin{aligned} \nabla(\rho_{2,0}(0)^{-1} p_2) &= \beta_1 \nabla \Phi_{21}, \quad \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_{21}) = \beta_1 a^{-2} p_2 \quad \text{в } \Omega_2, \\ \rho_{2,0} \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } \partial \Omega_2, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{21} d\Omega_2 \end{aligned}$$

которая приводится к задаче на собственные значения

$$A_2 \Phi_{21} = -\beta_1^2 \Phi_{21}, \quad \Phi_{21} \in H_{\Omega_2}^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$$

(см. (1.3.4), (1.3.5), (1.3.12)). Поскольку оператор A_2 имеет дискретный положительный спектр, то эта задача имеет лишь нулевое решение, и потому $\nabla \Phi_{21} = 0$, $p_2 = 0$. Теперь из первого уравнения (1.8.1a) получаем, что $\alpha_1^{1/2} \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$.

Случай $\lambda = \beta_2$ рассматривается аналогично, что и завершает доказательство. $\square$

Опираясь на лемму 1.15, исключим при $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \beta_k$, $k = 1, 2$, в уравнениях (1.8.1) все искомые элементы, кроме $\mathbf{u}_1$ и $\nabla \Phi_{21}$. Из соотношений (1.8.1b)–(1.8.1d) имеем

$$\mathbf{w}_k = \frac{\mu_1^{1/2} \alpha_k^{1/2}}{\beta_k - \lambda} A_1^{1/2} \mathbf{u}_1, \quad k = 1, 2, \quad \zeta = -\lambda^{-1} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1.$$

Подставляя их в первое уравнение (1.8.1a) и осуществляя замену

$$A_1^{1/2} \mathbf{u}_1 = \boldsymbol{\eta}_1 \in \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1),$$

приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \mu_1 e_2(\lambda) \boldsymbol{\eta}_1 &= \lambda \left\{ A_1^{-1/2} \left(\rho_1 I_1 + (\rho_{2,0}(0))^2 (Q \gamma_2) (V \gamma_{n,1}) \right) A_1^{-1/2} \boldsymbol{\eta}_1 - \rho_{2,0}(0) A_1^{-1/2} Q P_\Gamma \gamma_2 \Phi_{21} \right\} + \\ &\quad + \lambda^{-1} g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2})^* (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2}) \boldsymbol{\eta}_1, \end{aligned} \quad (1.8.2)$$

где

$$e_2(\lambda) := 1 + \sum_{k=1}^2 \frac{\alpha_k}{\beta_k - \lambda}.$$

Уравнения (1.8.1e) и (1.8.1f) приводят к связи

$$A_2 \Phi_{21} = -\lambda^2 a^{-2} \left(\Phi_{21} - \rho_{2,0} V(\gamma_{n,1} A_1^{-1/2}) \boldsymbol{\eta}_1 \right). \quad (1.8.3)$$

Осуществляя еще здесь замену

$$A_2^{1/2} \Phi_{21} = \varphi_2 \in L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \quad (1.8.4)$$

(см. (1.3.12), (1.3.13)), получим окончательно из (1.8.2)–(1.8.4) задачу на собственные значения

$$\mu_1 e_2(\lambda) \boldsymbol{\eta}_1 = \lambda (A_{11} \boldsymbol{\eta}_1 + A_{12} \varphi_2) + \lambda^{-1} B_1 \boldsymbol{\eta}_1, \quad \varphi_2 = -\lambda^2 a^{-2} (A_{21} \boldsymbol{\eta}_1 + A_{22} \varphi_2), \quad (1.8.5)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &:= A_1^{-1/2} \left(\rho_1 I_1 + (\rho_{2,0}(0))^2 (Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1}) \right) A_1^{-1/2}, \quad A_{22} := A_2^{-1}, \\ A_{12} &:= -\rho_{2,0}(0) A_1^{-1/2} Q P_\Gamma \gamma_2 A_1^{-1/2}, \quad A_{21} := -\rho_{2,0}(0) (A_2^{-1/2} V) (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2}), \\ B_1 &:= g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2})^* (\gamma_{n,1} A_1^{-1/2}). \end{aligned} \quad (1.8.6)$$

Перепишем задачу (1.8.5)–(1.8.6) в векторно-матричном виде в двух формах. Первая форма такова:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 e_2(\lambda) I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \lambda^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & a^2 I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (1.8.7)$$

Вторая форма выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 e_2(\lambda) I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} - \lambda^2 a^{-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \lambda^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (1.8.8)$$

где $(\boldsymbol{\eta}_1; \varphi_2)^\tau \in \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$.

Лемма 1.16. *Операторные коэффициенты A_{jk} , $j, k = 1, 2$, компактны, причем $A_{jk} = A_{kj}^*$, $A_{kk} \geq 0$. Кроме того, операторный коэффициент B_1 — компактный неотрицательный оператор, действующий в $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$.*

Доказательство. Эти свойства следуют непосредственно из определений (1.8.6) операторов и лемм 2.3, 1.2–1.4, 1.8, 1.13, а также свойств, описанных в (1.3.13), (1.3.17), (1.4.10). $\square$

Опираясь на эти факты, укажем на некоторые простые свойства спектра исследуемой задачи (1.8.5):

- I. Спектр задачи (1.8.5) симметричен относительно вещественной оси.
- II. Спектр задачи (1.8.5) дискретен, т.е. состоит из счетного множества конечнократных собственных значений с возможными предельными точками $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, $\lambda = \beta_k$, $k = 1, 2$, а также точками $\lambda = \delta_k$, $e_2(\delta_k) = 0$, $k = 1, 2$, т.е. нулями функции $e_2(\lambda)$.
- III. Спектр задачи (1.8.5)–(1.8.6) расположен в правой комплексной полуплоскости.

Доказательство. I. Перепишем задачу (1.8.7) в кратком виде

$$L_1(\lambda)\xi = 0, \quad \xi := (\boldsymbol{\eta}_1; \varphi_2)^\tau, \quad (1.8.9)$$

и заметим, что операторный пучок $L_1(\lambda)$ самосопряжен (см. [15]), т.е. $(L_1(\lambda))^* = L_1(\lambda)$. Отсюда и следует данное утверждение.

II. Задачу (1.8.8) перепишем в виде

$$L_2(\lambda)\xi = 0, \quad \xi = (\boldsymbol{\eta}_1; \varphi_2)^\tau,$$

и заметим, что она приводится к спектральной проблеме

$$(I + \Phi(\lambda))\xi = 0,$$

где I — единичный оператор в $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$, а $\Phi(\lambda)$ — аналитическая оператор-функция, принимающая компактные значения. Заметим теперь, что оператор $(I + \Phi(\lambda))|_{\lambda=-1}$ обратим, так как

$$L_1(-1) = \begin{pmatrix} \mu_1 e_2(-1) I_1 & 0 \\ 0 & a^{-2} I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + a^{-2} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— положительно определенный оператор, поскольку операторная матрица $(A_{jk})_{j,k=1}^2$ — компактный положительный оператор (факт положительности проверяется непосредственно), а $e_2(-1) > 0$. Поэтому по теореме Келдыша (см. [7]; иногда ее называют теоремой Гохберга, см. [6]) получаем доказываемое утверждение.

III. Доказательство основано на неравенстве

Рис. 2

$$\operatorname{Re} \lambda = \left\{ \mu_1 \left(1 + \sum_{k=1}^2 \frac{\alpha_k \beta_k}{|\beta_k - \lambda|^2} \right) \|\eta_1\|_{L_2(\Omega_1)}^2 + \|\varphi\|_{L_2, \Omega_2, \rho_2, 0}^2 \right\} /$$

$$/ \left\{ \sum_{k=1}^2 \frac{\alpha_k}{|\beta_k - \lambda|^2} \|\eta_1\|_{L_2(\Omega_1)}^2 + (A\xi, \xi) + |\lambda|^{-2} (B_a \xi, \xi) \right\} > 0,$$

которое можно вывести из уравнения (1.8.7) либо (1.8.9), и том факте, что квадратичные формы операторных матриц A и B_a в правой части (1.8.7) являются соответственно положительной и неотрицательной. $\square$

Дальнейшее подробное исследование свойств решений задачи (1.8.5)–(1.8.6) будет проведено в другой работе. Будут получены свойства полноты и базисности системы корневых (собственных и присоединенных) элементов этой задачи, наличие шести ветвей собственных значений, их асимптотическое поведение и физический смысл. Будут рассмотрены также и другие близкие вопросы.

2. О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ГИДРОСИСТЕМЫ ИЗ ТРЕХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ, ЗАПОЛНЯЮЩИХ НЕПОДВИЖНЫЙ СОСУД

2.1. Постановка задачи. Закон баланса полной энергии системы. Рассмотрим неподвижный сосуд Ω , полностью заполненный системой из трех несмешивающихся жидкостей. Жидкости предполагаются тяжелыми, и в силу этого действие капиллярных сил в этой задаче не учитывается. Область Ω_1 , нижняя по отношению к действию силы тяжести, заполнена несжимаемой вязкоупругой жидкостью обобщенной модели Олдройта (см., например, [17, 18, 20, 23]). Далее, как и выше, ρ_1, μ_1 — соответственно плотность и динамический коэффициент вязкости вязкоупругой жидкости. Области Ω_2 и Ω_3 заполнены идеальными несжимаемыми жидкостями с плотностями ρ_2 и ρ_3 .

Обозначим через $\mathbf{n}_k$ единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_k$ и направленный вне Ω_k , $k = \overline{1, 3}$. Через S_k обозначим часть стенки сосуда, граничащей с областью Ω_k , $k = \overline{1, 3}$. Горизонтальную границу раздела между вязкоупругой и идеальной жидкостями в состоянии равновесия обозначим через Γ_1 , а между идеальными жидкостями — через Γ_2 . Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с сосудом, таким образом, чтобы ось Ox_3 была направлена против действия силы тяжести. Тогда ускорение гравитационного поля $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3$, $g > 0$, а в состоянии покоя поля давлений в жидкостях выражаются по законам

$$P_{0,k}(x_3) = c_k - \rho_k g x_3, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (2.1.1)$$

где константы c_k определяются из условия равенства давлений на границах раздела Γ_j , $j = 1, 2$, при $x_3 = 0$.

Теперь перейдем к уравнениям, описывающим движение гидросистемы. Обозначим через $\mathbf{u}_k$ поля скоростей жидкостей в Ω_k , $k = \overline{1, 3}$, а через $p_k(t, x)$ — отклонения полей давлений от их равновесных значений (см. (2.1.1)). Кроме того, полагаем, что на исследуемую гидродинамическую

систему дополнительно к гравитационному полю действует малое поле внешних сил $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, x)$, $x \in \Omega$.

Тогда линеаризованные уравнения движения жидкостей имеют следующий вид (см., например, [22, 23]):

$$\rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \mu_1 \Delta \mathbf{v}_1 + \rho_1 \mathbf{f}_1(t, x), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad (2.1.2)$$

$$\mathbf{v}_1(t, x) = \mathbf{u}_1(t, x) + \sum_{r=1}^m \alpha_r \int_0^t e^{-\beta_r(t-s)} \mathbf{u}_1(s, x) ds =: I_{0,1}(t) \mathbf{u}_1, \quad (2.1.3)$$

$$\rho_l \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} = -\nabla p_l + \rho_l \mathbf{f}_l(t, x), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_l = 0 \quad \text{в } \Omega_l, \quad l = 2, 3, \quad (2.1.4)$$

где $\alpha_r \geq 0$, $\beta_r > 0$, $r = \overline{1, m}$, — коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругости жидкости обобщенной модели Олдройта, $\mathbf{f}_k(t, x) := \mathbf{f}(t, x)|_{x \in \Omega_k}$, $k = \overline{1, 3}$, а Δ — трехмерный оператор Лапласа.

Для вязкоупругой жидкости, как известно, на твердой стенке S_1 сосуда должно выполняться условие прилипания, т.е.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \quad \text{на } S_1, \quad (2.1.5)$$

а для идеальных на поверхностях S_l , $l = 2, 3$, — условия непротекания

$$\mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n}_l = 0 \quad \text{на } S_l, \quad l = 2, 3. \quad (2.1.6)$$

Будем описывать малые перемещения границ раздела между жидкостями с помощью функций вертикального отклонения

$$x_3 - h_j =: \zeta_j(t, x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \quad (2.1.7)$$

где h_j — уровень равновесной поверхности Γ_j , $j = 1, 2$. Тогда на Γ_j , $j = 1, 2$, должны выполняться кинематические условия

$$\frac{\partial \zeta_j}{\partial t} = \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j =: \gamma_{n,j} \mathbf{u}_j = -\mathbf{u}_{j+1} \cdot \mathbf{n}_{j+1} =: -\gamma_{n,j+1} \mathbf{u}_{j+1}, \quad \mathbf{n}_j = \mathbf{e}_3 = -\mathbf{n}_{j+1}, \quad j = 1, 2, \quad (2.1.8)$$

а символом $\gamma_{n,j}$, $j = 1, 2$, обозначена операция взятия нормального следа на Γ_j , т.е. следа нормальной компоненты поля скорости. Заметим еще, что из условия сохранения объема каждой из жидкостей имеем интегральные связи

$$\int_{\Gamma_j} \zeta_j d\Gamma_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.1.9)$$

Сформулируем теперь динамические условия на Γ_j , $j = 1, 2$. Они состоят в том, что на движущейся границе раздела векторное поле напряжений при переходе от одной жидкости к другой изменяется непрерывно. Линеаризация этого условия и его снос на Γ_j приводят к следующим соотношениям: на Γ_j касательные напряжения (т.е. вдоль Γ_j) изменяются непрерывно, а нормальные напряжения (т.е. вдоль оси Ox_3) компенсируются гравитационным скачком давлений. Имеем

$$\begin{aligned} \mu_1 \tau_{q3}(\mathbf{v}_1) &= 0, \quad q = 1, 2; \\ [-p_1 + \mu_1 \tau_{33}(\mathbf{v}_1)] - [-p_2] &= -g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1 \quad \text{на } \Gamma_1, \\ p_2 - p_3 &= g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2 \quad \text{на } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Здесь

$$\tau_{qr}(\mathbf{u}) := \frac{\partial u_q}{\partial x_r} + \frac{\partial u_r}{\partial x_q}, \quad q, r = 1, 2, 3,$$

— удвоенный тензор скоростей деформаций.

Наконец, для искоемых функций $\mathbf{u}_k(t, x)$, $k = \overline{1, 3}$, и $\zeta_j(t, x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, необходимо еще задать начальные условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k(0, x) &= \mathbf{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad \mathbf{u}_j^0 \cdot \mathbf{n}_j \equiv -\mathbf{u}_{j+1}^0 \cdot \mathbf{n}_{j+1}, \quad x \in \Gamma_j, \quad k = \overline{1, 3}, \quad j = 1, 2, \\ \zeta_j(0, x) &= \zeta_j^0(x), \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Закон баланса полной энергии. Будем считать, что задача (2.1.2)–(2.1.11) имеет классическое решение, и выведем закон баланса полной энергии гидросистемы. Предварительно выпишем формулы Грина для векторных полей скоростей в областях Ω_k , $k = \overline{1, 3}$. Для дважды непрерывно дифференцируемых полей они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu_1 E_1(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{u}_1) &:= \frac{1}{2} \mu_1 \int_{\Omega_1} \left(\sum_{q,r=1}^3 \tau_{qr}(\boldsymbol{\eta}_1) \overline{\tau_{qr}(\mathbf{u}_1)} \right) d\Omega_1 = \\ &= \int_{\Omega_1} \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \overline{(-\mu_1 \Delta \mathbf{u}_1 + \nabla p_1)} d\Omega_1 + \int_{\Gamma_1} \sum_{q=1}^3 \eta_{1,q} \overline{(\mu_1 \tau_{q,3}(\mathbf{u}_1) - p_1 \delta_{q3})} d\Gamma_1, \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\eta}_1 &= \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{0} \quad \text{на } S_1, \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \sum_{q=1}^3 \eta_{1,q} \mathbf{e}_q, \\ \int_{\Omega_2} \boldsymbol{\eta}_2 \cdot \overline{\nabla p_2} d\Omega_2 &= - \int_{\Gamma_1} \eta_{2,3} \overline{p_2} d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \eta_{2,3} \overline{p_2} d\Gamma_2, \quad \int_{\Omega_3} \boldsymbol{\eta}_3 \cdot \overline{\nabla p_3} d\Omega_3 = - \int_{\Gamma_2} \eta_{3,3} \overline{p_3} d\Gamma_2, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\eta}_l &= \operatorname{div} \mathbf{u}_l = 0 \quad \text{в } \Omega_l, \quad \boldsymbol{\eta}_l \cdot \boldsymbol{\eta}_l = \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{u}_l \equiv 0 \quad \text{на } S_l, \quad l = 2, 3. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

В этих формулах учтено, что направление внешних нормалей на Γ_j , $j = 1, 2$, для областей Ω_k , $k = \overline{1, 3}$, будет $\mathbf{n}_j = \mathbf{e}_3 = -\mathbf{n}_{j+1}$, $j = 1, 2$.

Умножим обе части (2.1.2) и (2.1.4) слева на $\mathbf{u}_k$, $k = \overline{1, 3}$, проинтегрируем по Ω_k соответственно и сложим результаты; будем иметь (для вещественнозначных полей):

$$\sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} d\Omega_k = - \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_k \cdot \nabla p_k d\Omega_k + \mu_1 \int_{\Omega_1} \mathbf{u}_1 \cdot (\Delta \mathbf{v}_1) d\Omega_1 + \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{f}_k d\Omega_k.$$

Используя формулы Грина (2.1.12), (2.1.13), а также граничные условия задачи (2.1.2)–(2.1.11), отсюда получаем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} |\mathbf{u}_k|^2 d\Omega_k \right\} &= -\mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{f}_k d\Omega_k + \\ &+ \int_{\Gamma_1} \sum_{q=1}^3 u_{1,q} \left(\mu_1 \tau_{q3}(\mathbf{u}_1) - (p_1 - p_2) \delta_{q3} \right) d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} u_{2,3} (p_3 - p_2) d\Gamma_2. \end{aligned}$$

Учитывая еще соотношения (2.1.9) и (2.1.10), окончательно приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} |\mathbf{u}_k|^2 d\Omega_k + g(\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} |\zeta_1|^2 d\Gamma_1 + g(\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} |\zeta_2|^2 d\Gamma_2 \right\} &= \\ &= -\mu_1 E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{f}_k d\Omega_k. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Это тождество есть закон баланса полной энергии системы в дифференциальной форме. Здесь в фигурных скобках стоит удвоенная полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия гидросистемы, а справа — мощность диссипативных вязкоупругих сил и мощность дополнительных внешних сил, действующих на систему. После интегрирования (2.1.14) по t в пределах от 0 до t получаем закон баланса полной энергии в интегральной форме, т.е. на произвольном отрезке времени $(0, t)$.

2.2. Метод ортогонального проектирования. Переход к системе операторных уравнений. Опираясь на (2.1.14), выберем функциональные пространства, адекватные задаче, и проведем ее исследование по схеме, уже использованной в разделе 1.

Проектирование уравнений Эйлера. Воспользуемся далее разложением пространства векторных полей $L_2(\Omega_l)$ в ортогональную сумму (см. [10, с. 113]):

$$L_2(\Omega_l) = J_0(\Omega_l) \oplus G_{h,S_l}(\Omega_l) \oplus G_{0,\tilde{\Gamma}_l}(\Omega_l), \quad l = 2, 3, \quad (2.2.1)$$

где

$$\begin{aligned} J_0(\Omega_l) &:= \left\{ \mathbf{u} \in L_2(\Omega_l) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega_l, u_n = 0 \text{ на } \partial\Omega_l \right\}, \\ G_{h,S_l}(\Omega_l) &:= \left\{ \mathbf{v} = \nabla\varphi \in L_2(\Omega_l) : \Delta\varphi = 0 \text{ в } \Omega_l, \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } S_l \right\}, \\ G_{0,\tilde{\Gamma}_l}(\Omega_l) &:= \left\{ \mathbf{w} = \nabla\psi \in L_2(\Omega_l) : \Delta\psi = 0 \text{ в } \Omega_l, \psi = 0 \text{ на } \tilde{\Gamma}_l \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\Gamma}_2 := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\tilde{\Gamma}_3 := \Gamma_2$.

Введем ортопроекторы на соответствующие подпространства: $P_{0,l}$, P_{h,S_l} , $P_{0,\tilde{\Gamma}_l}$, $l = 2, 3$.

Основываясь на разложении (2.2.1), применим метод ортогонального проектирования к уравнениям движения начально-краевой задачи (2.1.2)–(2.1.11). В силу условия соленоидальности, условия непротекания на твердых стенках S_l и условия сохранения объема на свободных границах Γ_j , $j = 1, 2$ (так как жидкости несжимаемы), считаем, что

$$\mathbf{u}_l \in J_0(\Omega_l) \oplus G_{h,S_l}(\Omega_l) =: J_{0,S_l}(\Omega_l), \quad l = 2, 3. \quad (2.2.2)$$

Поля ∇p_l , $l = 2, 3$, потенциальны и поэтому

$$\nabla p_l \in G(\Omega_l) = G_{h,S_l}(\Omega_l) \oplus G_{0,\tilde{\Gamma}_l}(\Omega_l), \quad l = 2, 3.$$

Представим поля $\mathbf{u}_l$ и ∇p_l , $l = 2, 3$, в следующем виде:

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{w}_l + \nabla\Phi_l, \quad \mathbf{w}_l \in J_0(\Omega_l), \quad \nabla\Phi_l \in G_{h,S_l}(\Omega_l), \quad l = 2, 3; \quad (2.2.3)$$

$$\nabla p_l = \nabla\tilde{p}_l + \nabla\varphi_l, \quad \nabla\tilde{p}_l \in G_{h,S_l}(\Omega_l), \quad \nabla\varphi_l \in G_{0,\tilde{\Gamma}_l}(\Omega_l), \quad l = 2, 3. \quad (2.2.4)$$

Подставив эти представления в уравнения (2.1.4) для идеальных жидкостей и применив к ним ортопроекторы, отвечающие разложению (2.2.1), получим

$$\frac{\partial \mathbf{w}_l}{\partial t} = P_{0,l} \mathbf{f}_l \quad \text{в } \Omega_l, \quad l = 2, 3, \quad (2.2.5)$$

$$\rho_l \frac{\partial}{\partial t} \nabla\Phi_l = -\nabla\tilde{p}_l + \rho_l P_{h,S_l} \mathbf{f}_l \quad \text{в } \Omega_l, \quad l = 2, 3, \quad (2.2.6)$$

$$\nabla\varphi_l = \rho_l P_{0,\tilde{\Gamma}_l} \mathbf{f}_l \quad \text{в } \Omega_l, \quad l = 2, 3. \quad (2.2.7)$$

Из (2.2.5) с учетом начальных условий (2.1.11) сразу получаем

$$\mathbf{w}_l(t, x) = \int_0^t P_{0,l} \mathbf{f}_l(\tau, x) d\tau + P_{0,l} \mathbf{u}_l^0, \quad l = 2, 3.$$

Члены в уравнении (2.2.7) — это составляющие градиентов давлений в подпространстве $G_{0,\tilde{\Gamma}_l}(\Omega_l)$, $l = 2, 3$. Потенциал этого поля φ_l обращается в нуль на $\tilde{\Gamma}_l$ и поэтому в граничных условиях не участвует. Далее соотношения (2.2.7) не рассматриваем.

Условимся называть решения уравнений (2.2.5), а также составляющие градиентов давлений из (2.2.7) *тривиальными решениями*. Итак, основные уравнения, которые будем рассматривать для идеальных жидкостей, это уравнения (2.2.6).

Проектирование уравнения Навье—Стокса. Для области Ω_1 введем аналогичное разложение пространства векторных полей $\mathbf{L}_2(\Omega_1)$ в ортогональную сумму (см. [10], а также п. 1.4):

$$\mathbf{L}_2(\Omega_1) = \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1), \quad \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) = \mathbf{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1).$$

Введем ортопроекторы P_{0,S_1} и P_{01,Γ_1} на подпространства $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ и $\mathbf{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)$ соответственно. В силу условия соленоидальности и условия прилипания на S_1 для $\mathbf{u}_1$ считаем, что поле $\mathbf{u}_1$ принадлежит пространству векторных полей с конечной скоростью диссипации энергии в жидкости:

$$\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1) := \left\{ \mathbf{u}_1 \in \mathbf{H}^1(\Omega_1) : \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 \text{ в } \Omega_1, \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \text{ на } S_1 \right\} \subset \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1).$$

Здесь скалярное произведение определяется по формуле

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)_{\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)} := E_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \left(\sum_{q,r=1}^3 \tau_{qr}(\mathbf{u}_1) \overline{\tau_{qr}(\mathbf{v}_1)} \right) d\Omega_1$$

(см. (1.2.12), (2.1.12)). Отметим, что $\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$ плотно вложено в $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. Подействуем введенными операторами P_{0,S_1} и P_{01,Γ_1} на обе части уравнения для вязкоупругой жидкости (2.1.2); в результате получим:

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} &= -\nabla \tilde{p}_1 + \mu_1 P_{0,S_1} \Delta \mathbf{v}_1 + \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 \quad \text{в } \Omega_1, \\ -\mu_1 P_{01,\Gamma_1} \Delta \mathbf{v}_1 + P_{01,\Gamma_1} \nabla p_1 &= \rho_1 P_{01,\Gamma_1} \mathbf{f}_1 \quad \text{в } \Omega_1. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Здесь через $\nabla \tilde{p}_1$ обозначено поле $P_{0,S_1} \nabla p_1 =: \nabla \tilde{p}_1 \in \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ в силу разложения пространства $\mathbf{L}_2(\Omega_1)$. Потенциал поля $P_{01,\Gamma_1} \nabla p_1$ в граничных условиях не участвует, так как обращается в нуль на Γ_1 . Поэтому для вязкоупругой жидкости рассматриваем только уравнение (2.2.8).

Формулировка задачи после отделения тривиальных решений. Заметим, что в силу представлений (2.2.3) полей $\mathbf{u}_l$, $l = 2, 3$, кинематические условия (2.1.8) можно записать в виде

$$\frac{\partial \zeta_j}{\partial t} = \gamma_{n,j} \mathbf{u}_j = \frac{\partial \Phi_{j+1}}{\partial n_j} \quad \text{на } \Gamma_j, \quad j = 1, 2.$$

В свою очередь динамические условия (2.1.10) в силу представлений (2.2.4) для ∇p_l , $l = 2, 3$, примут вид

$$\begin{aligned} \mu_1 \tau_{q3}(\mathbf{v}_1) &= 0, \quad q = 1, 2 \quad \text{на } \Gamma_1, \\ [-\tilde{p}_1 + \mu_1 \tau_{33}(\mathbf{v}_1)] - [-\tilde{p}_2] &= -g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1 \quad \text{на } \Gamma_1, \\ [\tilde{p}_2 - \tilde{p}_3] &= g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2 \quad \text{на } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Введем еще ортопроекторы θ_j на $L_{2,\Gamma_j} := L_2(\Gamma_j) \ominus \{1_{\Gamma_j}\}$, $j = 1, 2$. Тогда итогом проведенных выше преобразований является следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть $\mathbf{u}_k$, ∇p_k , $k = \overline{1,3}$, ζ_j , $j = 1, 2$, — классическое решение начально-краевой задачи (2.1.2)–(2.1.11). Тогда функции $\mathbf{u}_1$, $\nabla \tilde{p}_1$, $\nabla \Phi_l$, $\nabla \tilde{p}_l$, $l = 2, 3$, ζ_j , $j = 1, 2$, являются решением следующей начально-краевой задачи:

$$\rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla \tilde{p}_1 + \mu_1 P_{0,S_1} \Delta \mathbf{v}_1 + \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 \quad \text{в } \Omega_1, \quad (2.2.10)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \quad \text{на } S_1, \quad (2.2.11)$$

$$\rho_l \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi_l + \nabla \tilde{p}_l = \rho_l P_{h,S_l} \mathbf{f}_l \quad \text{в } \Omega_l, \quad l = 2, 3, \quad (2.2.12)$$

$$\Delta \Phi_l = 0 \quad \text{в } \Omega_l, \quad \frac{\partial \Phi_l}{\partial n_l} = 0 \quad \text{на } S_l, \quad (2.2.13)$$

$$\frac{\partial \Phi_l}{\partial n_l} = -\frac{\partial \zeta_{l-1}}{\partial t} = -\gamma_{n,l-1} \mathbf{u}_{l-1} \quad \text{на } \Gamma_{l-1}, \quad l = 2, 3, \quad (2.2.14)$$

$$\begin{cases} \mu_1 \tau_{q3}(\mathbf{v}_1) = 0, & q = 1, 2, \quad \text{на } \Gamma_1, \\ [-\theta_1 \tilde{p}_1 + \mu_1 \tau_{33}(\mathbf{v}_1)] - [-\theta_1 \tilde{p}_2] = -g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1 & \text{на } \Gamma_1, \\ [\theta_2 \tilde{p}_2 - \theta_2 \tilde{p}_3] = g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2 & \text{на } \Gamma_2, \end{cases} \quad (2.2.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(0, x) = P_{0,S_1} \mathbf{u}_1^0(x) = \mathbf{u}_1^0(x), \quad x \in \Omega_1, \quad \nabla \Phi_l(0, x) = P_{h,S_l} \mathbf{u}_l^0(x), \quad x \in \Omega_l, \quad l = 2, 3, \\ \zeta_j(0, x) = \zeta_j^0(x), \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Замечание 2.1. Отметим, что введение ортопроекторов θ_j , $j = 1, 2$, обусловлено стремлением избежать произвола в нормировке функций $\tilde{p}_2$ на границах Γ_1 и Γ_2 . Действительно, в динамических условиях (2.2.9) имеем $\zeta_j \in L_{2,\Gamma_j}$, $j = 1, 2$, $\tau_{33}(\mathbf{v}_1) \in L_{2,\Gamma_1}$ (см. [10, с. 114]), откуда следует, что

$$\int_{\Gamma_1} (\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2) d\Gamma_1 = 0, \quad \int_{\Gamma_2} (\tilde{p}_2 - \tilde{p}_3) d\Gamma_2 = 0.$$

Из определения ортопроекторов θ_j , $j = 1, 2$, следует, что $\tilde{p}_1 = \theta_1 \tilde{p}_1 + c_1$, $\tilde{p}_3 = \theta_2 \tilde{p}_3 + c_3$. Константы c_1 , c_3 позволяют ввести однозначную нормировку для $\tilde{p}_2$ на границах Γ_1 и Γ_2 :

$$c_1 = \frac{1}{|\Gamma_1|} \int_{\Gamma_1} \tilde{p}_2 d\Gamma_1, \quad c_3 = \frac{1}{|\Gamma_2|} \int_{\Gamma_2} \tilde{p}_2 d\Gamma_2.$$

Вспомогательные краевые задачи и их операторы. Как и в разделе 1, считаем, что области Ω_k имеют липшицевы границы $\partial\Omega_k$, $k = \overline{1,3}$, разбитые на липшицевы куски. Для перехода к операторной формулировке исследуемой задачи рассмотрим ряд вспомогательных краевых задач.

Вспомогательная задача I:

$$\begin{aligned} -P_{0,S_1} \Delta \mathbf{u} + \mu^{-1} \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{на } S_1, \\ \mu \tau_{q3}(\mathbf{u}) = 0, \quad q = 1, 2, \quad -p + \mu \tau_{33}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{на } \Gamma_1. \end{aligned}$$

Это так называемая первая вспомогательная задача С. Г. Крейна (см. [10, с. 116], а также (1.4.4)). Она имеет единственное обобщенное решение $\mathbf{u} = A_1^{-1} \mathbf{f}$ для любого вектора $\mathbf{f}$ из $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. Область определения $\mathcal{D}(A_1)$ оператора A_1 плотна в пространстве $\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$ и $\mathcal{D}(A_1^{1/2}) = \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$. Оператор A_1^{-1} является положительным и компактным в $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$.

Вспомогательная задача II:

$$\Delta p = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \frac{\partial p}{\partial n_1} = 0 \quad \text{на } S_1, \quad p = \tau_1 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad \int_{\Gamma_1} \tau_1 d\Gamma_1 = 0.$$

Это известная задача Зарембы для уравнения Лапласа; она имеет единственное решение (см. [10, с. 45]) $p = G_1 \tau_1 \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$ при $\tau_1 \in H_{\Gamma_1}^{1/2}$,

$$H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) := \left\{ \varphi \in H^1(\Omega_1) : \int_{\Gamma_1} \varphi d\Gamma_1 = 0 \right\}, \quad \|\varphi\|_{H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)}^2 := \int_{\Omega_1} |\nabla \varphi|^2 d\Omega_1.$$

(Определение пространств $H_{\partial\Omega}^{1/2}$, $H_{\partial\Omega}^{-1/2}$ для областей Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$, а также соответствующие теоремы вложения и продолжения с границы см. в [21], а также в п. 1.3.)

Вспомогательная задача III:

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{в } \Omega_3, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n_3} = 0 \quad \text{на } S_3, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n_3} = \psi_3 \quad \text{на } \Gamma_2, \quad \int_{\Gamma_2} \Phi d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} \psi_3 d\Gamma_2 = 0.$$

Это задача Неймана для уравнения Лапласа. Если $\psi_3 \in \tilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}$, то задача имеет единственное решение $\Phi = V_3\psi_3 \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega_3)$. Здесь символом $\tilde{}$ обозначен класс функций из $H_{\Gamma_2}^{-1/2}$, продолжимых нулем на всю границу $\partial\Omega_3$ в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega_3)$ (см. [1, 8, 19]). Введем по решению задачи III оператор

$$\theta_2\Phi|_{\Gamma_2} = \theta_2\hat{C}_3\psi_3 =: C_3\psi_3, \quad \hat{C}_3 := \gamma_{\Gamma_2}V_3, \quad \gamma_{\Gamma_2}\psi_3 := \psi_3|_{\Gamma_2}. \quad (2.2.17)$$

Отметим, что C_3 — самосопряженный, положительный и компактный оператор в L_{2,Γ_2} .

Вспомогательная задача IV.1:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{21} = 0 \quad \text{в } \Omega_2, \quad \frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n_2} = 0 \quad \text{на } S_2 \cup \Gamma_2, \quad \frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n_2} = \psi_1 \quad \text{на } \Gamma_1, \\ \int_{\Gamma_1} \Phi_{21} d\Gamma_1 = \int_{\Gamma_1} \psi d\Gamma_1 = 0. \end{aligned}$$

Это снова задача Неймана для уравнения Лапласа. Если $\psi_1 \in \tilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}$, то задача имеет единственное решение $\Phi_{21} = V_{21}\psi_1 \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_2)$.

Вспомогательная задача IV.2:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{22} = 0 \quad \text{в } \Omega_2, \quad \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n_2} = 0 \quad \text{на } S_2 \cup \Gamma_1, \quad \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n_2} = \psi_2 \quad \text{на } \Gamma_2, \\ \int_{\Gamma_2} \Phi_{22} d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} \psi d\Gamma_2 = 0. \end{aligned}$$

Это тоже задача Неймана для уравнения Лапласа. Если $\psi_2 \in \tilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}$, то задача имеет единственное решение $\Phi_{22} = V_{22}\psi_2 \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega_2)$.

Введем по решению задач IV.1 и IV.2 операторы

$$\begin{aligned} \theta_1\Phi_{21}|_{\Gamma_1} &= \theta_1\hat{C}_{11}\psi_1 =: C_{11}\psi_1, & \hat{C}_{11} &:= \gamma_{\Gamma_1}V_{21}, & \gamma_{\Gamma_1}\psi_1 &:= \psi_1|_{\Gamma_1}; \\ \theta_1\Phi_{22}|_{\Gamma_1} &= \theta_1\hat{C}_{12}\psi_2 =: C_{12}\psi_2, & \hat{C}_{12} &:= \gamma_{\Gamma_1}V_{22}, & \gamma_{\Gamma_1}\psi_2 &:= \psi_2|_{\Gamma_1}; \\ \theta_2\Phi_{21}|_{\Gamma_2} &= \theta_2\hat{C}_{21}\psi_1 =: C_{21}\psi_1, & \hat{C}_{21} &:= \gamma_{\Gamma_2}V_{21}, & \gamma_{\Gamma_2}\psi_1 &:= \psi_1|_{\Gamma_2}; \\ \theta_2\Phi_{22}|_{\Gamma_2} &= \theta_2\hat{C}_{22}\psi_2 =: C_{22}\psi_2, & \hat{C}_{22} &:= \gamma_{\Gamma_2}V_{22}, & \gamma_{\Gamma_2}\psi_2 &:= \psi_2|_{\Gamma_2}. \end{aligned}$$

Отметим, что компактные операторы C_{qr} , $q, r = 1, 2$, образуют самосопряженную, положительную матрицу $\{C_{qr}\}_{q,r=1}^2$ в $L_{2,\Gamma_1} \oplus L_{2,\Gamma_2}$ (см., например, [8]).

Вспомогательная задача V:

$$\Delta p = 0 \quad \text{в } \Omega_2, \quad \frac{\partial p}{\partial n_2} = 0 \quad \text{на } S_2 \cap \Gamma_1, \quad p = \tau_2 \quad \text{на } \Gamma_2, \quad \int_{\Gamma_2} \tau_2 d\Gamma_2 = 0.$$

Это, как и II, задача Зарембы для уравнения Лапласа. Она имеет единственное решение (см. [10, с. 45]) $p = G_2\tau_2 \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega_2)$ при $\tau_2 \in H_{\Gamma_2}^{1/2}$.

Вывод системы операторных уравнений. Переходя к формулировке исходной задачи (2.1.2)–(2.1.11) в операторной форме, представим поле $\nabla\tilde{p}_1$ в виде $\nabla\tilde{p}_1 = \nabla\tilde{p}_{11} + \nabla\tilde{p}_{12}$ и подберем поле $\nabla\tilde{p}_{11}$ таким образом, чтобы поле $\mathbf{v}_1$ являлось решением следующей краевой задачи:

$$-P_{0,S_1}\Delta\mathbf{v}_1 + \mu_1^{-1}\nabla\tilde{p}_{11} = \mu_1^{-1}\left(-\rho_1\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial t} + \rho_1P_{0,S_1}\mathbf{f}_1 - \nabla\tilde{p}_{12}\right) \quad \text{в } \Omega_1, \quad (2.2.18)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \text{на } S_1, \quad (2.2.19)$$

$$\mu_1\tau_{q3}(\mathbf{v}_1) = 0, \quad q = 1, 2, \quad -\theta_1\tilde{p}_{11} + \mu\tau_{33}(\mathbf{v}_1) = 0 \quad \text{на } \Gamma_1. \quad (2.2.20)$$

Используя вспомогательную задачу I, заключаем, что краевая задача (2.2.18)–(2.2.20) имеет единственное обобщенное решение

$$\mathbf{v}_1 = \mu_1^{-1} A_1^{-1} \left(-\rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 - \nabla \tilde{p}_{12} \right)$$

для правой части из $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. Тогда можно записать

$$\rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1 \mathbf{v}_1 + \nabla \tilde{p}_{12} = \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 \quad \text{в } \Omega_1. \quad (2.2.21)$$

Заметим, что при расщеплении условия для нормального напряжения на Γ_1 из (2.2.15) осталось условие

$$\theta_1 \tilde{p}_{12} = \theta_1 \tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1 \quad \text{на } \Gamma_1.$$

Учитывая принадлежность $\nabla \tilde{p}_{12} \in \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, найдем, что потенциал $\theta_1 \tilde{p}_{12}$ удовлетворяет вспомогательной задаче II при $\tau_1 = \theta_1 \tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1$. Поэтому можно считать, что

$$\tilde{p}_{12} = G_1 \left(\theta_1 \tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1 \right).$$

Оператор G_1 ограниченно действует из пространства $H_{\Gamma_1}^{1/2}$ в пространство $\mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$.

Подставляя последнее представление для градиента давления в (2.2.21), получим

$$\rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1 \mathbf{v}_1 + G_1 \theta_1 \tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2) G_1 \zeta_1 = \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 \quad \text{в } \Omega_1. \quad (2.2.22)$$

Далее, в силу принадлежности $\nabla \Phi_2$ пространству $\mathbf{G}_{h,S_2}(\Omega_2)$ потенциал Φ_2 с помощью решений вспомогательных задач IV.1 и IV.2 можно представить в виде

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} \quad \text{при} \quad \psi_1 = -\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1, \quad \psi_2 = \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2.$$

Рассмотрим уравнения (2.2.12) для идеальных жидкостей. Из них следуют интегралы Коши—Лагранжа

$$\rho_l \frac{\partial \Phi_l}{\partial t} + \tilde{p}_l = F_l + c_l(t) \quad \text{в } \Omega_l, \quad l = 2, 3, \quad (2.2.23)$$

где через F_l обозначены потенциалы полей $\rho_l P_{h,S_l} \mathbf{f}_l$, а $c_l(t)$ — произвольные функции переменной t , $l = 2, 3$. Рассмотрим эти уравнения на Γ_2 и спроектируем на L_{2,Γ_2} ; тогда динамическое условие (см. третье уравнение (2.2.15)) можно преобразовать к следующему виду:

$$\theta_2 \tilde{p}_2 = \theta_2 \tilde{p}_3 + g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2 = \rho_3 \theta_2 F_3 + \rho_3 \theta_2 \frac{\partial \Phi_3}{\partial t} + g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2 \quad \text{на } \Gamma_2. \quad (2.2.24)$$

Выразим теперь $\theta_2 \Phi_3|_{\Gamma_2}$ с помощью представления (2.2.17) и оператора C_3 :

$$\theta_2 \Phi_3|_{\Gamma_2} = -C_3 \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2 \quad \text{на } \Gamma_2.$$

Тогда вместо (2.2.24) получим

$$\theta_2 \tilde{p}_2 = \rho_3 \theta_2 F_3 - \rho_3 \frac{\partial}{\partial t} C_3 \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2 + g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2 \quad \text{на } \Gamma_2.$$

Значит, согласно вспомогательной задаче V,

$$\tilde{p}_2|_{\Omega_2} = G_2 \left(\rho_3 \theta_2 F_3 - \rho_3 \frac{\partial}{\partial t} C_3 \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2 + g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2 \right).$$

Выразим при $l = 2$ функцию $\tilde{p}_2$ из (2.2.23); тогда уравнение (2.2.22) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1 \mathbf{v}_1 + G_1 \theta_1 \left(\rho_2 F_2 - \rho_2 \frac{\partial}{\partial t} (C_{11} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 + C_{12} \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2) \right) + g(\rho_1 - \rho_2) G_1 \zeta_1 = \\ = \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 \quad \text{в } \Omega_1. \end{aligned}$$

Далее для всех функций переменной t со значениями в гильбертовых пространствах их производные по t будем обозначать d/dt вместо $\partial/\partial t$.

Проведенные в этом пункте рассуждения можно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма 2.1. Пусть $\mathbf{u}_1, \nabla \tilde{p}_1, \nabla \Phi_l, \nabla \tilde{p}_l, l = 2, 3, \zeta_j, j = 1, 2$, — классическое решение начально-краевой задачи (2.2.10)–(2.2.16). Тогда функции $\mathbf{u}_k, k = 1, 2, \zeta_j, j = 1, 2$ являются решением следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\rho_1 \mathbf{u}_1 + \rho_2 (G_1 C_{11} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 + G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2) \right) + \mu_1 A_1 \mathbf{v}_1 + g(\rho_1 - \rho_2) G_1 \zeta_1 = \\ = \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 - \rho_2 G_1 \theta_1 F_2, \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\rho_2 (G_2 C_{21} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 + G_2 C_{22} \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2) + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2 \right) + g(\rho_2 - \rho_3) G_2 \zeta_2 = \\ = \rho_2 G_2 \theta_2 F_2 - \rho_3 G_2 \theta_2 F_3, \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

$$\frac{d}{dt} \left(g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1 \right) = g(\rho_1 - \rho_2) \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1, \quad \frac{d}{dt} \left(g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2 \right) = g(\rho_2 - \rho_3) \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2, \quad (2.2.27)$$

$$\mathbf{u}_k(0, x) = \mathbf{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \quad \zeta_j(0, x) = \zeta_j^0(x), \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \quad (2.2.28)$$

Введем операторы $\hat{G}_1 := g(\rho_1 - \rho_2) G_1, \hat{G}_2 := g(\rho_2 - \rho_3) G_2$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.2. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \hat{G}_1^* &= g(\rho_1 - \rho_2) \gamma_{n,1}, \quad \gamma_{n,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1); \tilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}), \\ \hat{G}_2^* &= g(\rho_2 - \rho_3) \gamma_{n,2}, \quad \gamma_{n,2} \in \mathcal{L}(\mathbf{J}_{0,S_2}(\Omega_2); \tilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}). \end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству лемм 1.1 и 1.2.

2.3. Преобразование задачи к стандартному виду.

Переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В задаче (2.2.25)–(2.2.28) введем новые искомые функции по формулам

$$\mathbf{w}_r(t) := \alpha_r^{1/2} \int_0^t e^{-\beta_r(t-s)} \mathbf{u}_1(s) ds \in \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1), \quad r = \overline{1, m}. \quad (2.3.1)$$

Тогда

$$\frac{d\mathbf{w}_r}{dt} = \alpha_r^{1/2} \mathbf{u}_1 - \beta_r \alpha_r^{1/2} \int_0^t e^{-\beta_r(t-s)} \mathbf{u}_1(s) ds = \alpha_r^{1/2} \mathbf{u}_1 - \beta_r \mathbf{w}_r, \quad r = \overline{1, m}. \quad (2.3.2)$$

Теперь с учетом (2.3.1), (2.3.2) задача (2.2.25)–(2.2.28) переписывается в виде задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left((\rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11} \gamma_{n,1}) \mathbf{u}_1 + \rho_2 G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2 \right) + \mu_1 A_1 \left(\mathbf{u}_1 + \sum_{r=1}^m \alpha_r \mathbf{w}_r \right) + g(\rho_1 - \rho_2) G_1 \zeta_1 = \\ = \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 - \rho_2 G_1 F_2 \\ \frac{d\mathbf{w}_r}{dt} - \alpha_r^{1/2} \mathbf{u}_1 + \beta_r \mathbf{w}_r = 0, \quad r = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\rho_2 G_2 C_{21} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 + (\rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2}) \mathbf{u}_2 \right) + g(\rho_2 - \rho_3) G_2 \zeta_2 = \rho_2 G_2 F_2 - \rho_3 G_2 F_3,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1) - \hat{G}_1^* \mathbf{u}_1 &= 0, \quad \frac{d}{dt} (g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2) - \hat{G}_2^* \mathbf{u}_2 = 0, \\ \mathbf{u}_k(0, x) &= \mathbf{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \quad \zeta_j(0, x) = \zeta_j^0(x) \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \\ \mathbf{w}_r(0, x) &= \mathbf{0}, \quad r = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Коротко эта задача может быть записана в следующем виде:

$$\mathcal{T} \frac{dz}{dt} = -\mathcal{A}z + g(t), \quad z(0) = z^0, \quad (2.3.4)$$

где $\mathcal{T} := \text{diag}\{\mathcal{C}, \mathcal{B}\}$,

$$\mathcal{C} := \begin{pmatrix} \rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11} \gamma_{n,1} & \hat{0}^\tau & \rho_2 G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \\ \hat{0} & \hat{I} & \hat{0} \\ \rho_2 G_2 C_{21} \gamma_{n,1} & 0 & \rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2} \end{pmatrix}, \quad (2.3.5)$$

$$\mathcal{B} := \text{diag} \{g(\rho_2 - \rho_1)I, g(\rho_3 - \rho_2)I\} \quad (2.3.6)$$

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 & \mathcal{G} \\ -\mathcal{G}^* & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A & \hat{\alpha}^\tau & 0 \\ -\hat{\alpha} & \hat{\beta} & \hat{0} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} g(\rho_2 - \rho_1)G_1 & 0 \\ \hat{0} & \hat{0} \\ 0 & g(\rho_3 - \rho_2)G_2 \end{pmatrix}, \quad (2.3.7)$$

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \hat{y} \\ \mathbf{u}_2 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} \rho_1 P_{0,S_1} \mathbf{f}_1 - \rho_2 G_1 F_2 \\ 0 \\ \rho_2 G_2 F_2 - \rho_3 G_2 F_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &:= \mu_1 A_1, \quad \hat{\alpha} := (\alpha_1^{1/2}, \alpha_2^{1/2}, \dots, \alpha_m^{1/2})^\tau, \quad \hat{\beta} := \text{diag} \{ \beta_1 I, \beta_2 I, \dots, \beta_m I \}, \quad \mathbf{u}_2 = \nabla \Phi_{22}, \\ \hat{y} &:= (A^{1/2} \mathbf{w}_1, A^{1/2} \mathbf{w}_2, \dots, A^{1/2} \mathbf{w}_m)^\tau, \quad \hat{0} := (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m \text{ раз}})^\tau, \quad \hat{I}_m := \text{diag} \{ \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m \text{ раз}} \}. \end{aligned}$$

Операторная матрица $\mathcal{A}$ задана на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A) \oplus \hat{\mathcal{D}}(A^{1/2}) \oplus W \oplus H_{\Gamma_1}^{1/2} \oplus H_{\Gamma_2}^{1/2}, \quad (2.3.9)$$

где

$$\hat{\mathcal{D}}(A^{1/2}) := \bigoplus_{r=1}^m \mathcal{D}(A^{1/2}),$$

$$\begin{aligned} W &:= \left\{ \nabla \Phi_{22} \in \mathbf{G}_{h,S_2,\Gamma_2}(\Omega_2) : (\mathbf{u}_1, \nabla \Phi_{22}, \nabla \Phi_3)^\tau \in \mathbf{J}_{0,S}(\Omega), \mathbf{u}_1 \in \mathcal{D}(A), \right. \\ &\quad \left. \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = -\nabla \Phi_{22} \cdot \mathbf{n}_2 \in H_{\Gamma_1}^{1/2}, \nabla \Phi_{22} \cdot \mathbf{n}_2 = -\nabla \Phi_3 \cdot \mathbf{n}_3 \in H_{\Gamma_2}^{1/2} \right\}, \end{aligned}$$

и действует в пространстве

$$\mathcal{H} := \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \hat{\mathbf{J}}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{h,S_2,\Gamma_2}(\Omega_2) \oplus L_{2,\Gamma_1} \oplus L_{2,\Gamma_2},$$

где

$$\hat{\mathbf{J}}_{0,S_1}(\Omega_1) := \bigoplus_{r=1}^m \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1), \quad \mathbf{G}_{h,S_2,\Gamma_2}(\Omega_2) := \left\{ \mathbf{v} = \nabla \varphi \in \mathbf{G}_{h,S_2}(\Omega_2) : \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ в } \Gamma_1 \right\}.$$

Замечание 2.2. Необходимо отметить, что задача (2.3.4) получена после дополнительной симметризации путем замены

$$\mathbf{w}_r = A^{-1/2} \mathbf{y}_r, \quad \mathbf{y}_r \in \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1), \quad r = \overline{1, m}.$$

Тогда из (2.3.3) имеем соотношения

$$\frac{d}{dt}(A^{-1/2} \mathbf{y}_r) = \alpha_r^{1/2} \mathbf{u}_1 - \beta_r A^{-1/2} \mathbf{y}_r, \quad r = \overline{1, m}, \quad (2.3.10)$$

и если $\mathbf{u}_1(t)$ — непрерывная по t функция со значениями в $\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$, а $\mathbf{y}_r(t)$, $r = \overline{1, m}$, — со значениями в $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, то правая часть в (2.3.10) непрерывна по t со значениями в $\mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1) = \mathcal{D}(A^{1/2})$. Поэтому к обеим частям в (2.3.10) можно применить оператор $A^{1/2}$.

Свойства операторных коэффициентов. Изучим свойства операторов задачи (2.3.4).

Лемма 2.3. Оператор $\mathcal{T}$ из (2.3.5)–(2.3.6) ограничен, самосопряжен и положительно определен.

Доказательство. Свойство ограниченности следует из того, что все операторные коэффициенты матрицы $\mathcal{T}$ ограничены. Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить, например, ограниченность оператора $G_1 C_{11} \gamma_{n,1}$. Он действует из $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ в $\mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$. Действительно, для $\xi \in \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ элемент $\gamma_{n,1} \xi \in \tilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}$. С помощью вспомогательной задачи IV.1 найдем функцию Φ_{21} при условии, что $\psi_1 = \gamma_{n,1} \xi$. Тогда в силу свойств ограниченности операторов C_{11} и G_1 оператор $G_1 C_{11} \gamma_{n,1}$ ограничен, а его действие следующее:

$$G_1 C_{11} \gamma_{n,1} \xi = G_1 \theta_1 \Phi_{21}|_{\Gamma_1} \in \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \subset \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1).$$

Найдем квадратичную форму оператора $\mathcal{T}$ в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Для любого $z \in \mathcal{H}$ имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}z, z)_{\mathcal{H}} = & \rho_1 \int_{\Omega_1} |\mathbf{u}_1|^2 d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_1} G_1 C_{11} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 \cdot \overline{\mathbf{u}_1} d\Omega_1 + \\ & + \sum_{r=1}^m \int_{\Omega_1} |\mathbf{y}_r|^2 d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_1} G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\mathbf{u}_1} d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_2} G_2 C_{21} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 + \\ & + \rho_2 \int_{\Omega_2} G_2 C_{22} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 + \rho_3 \int_{\Omega_2} G_2 C_3 \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 + \\ & + g(\rho_2 - \rho_1) \int_{\Gamma_1} |\xi_1|^2 d\Gamma_1 + g(\rho_3 - \rho_2) \int_{\Gamma_2} |\xi_2|^2 d\Gamma_2. \quad (2.3.11) \end{aligned}$$

Преобразуем второе и четвертое слагаемые в (2.3.11), используя свойства решения вспомогательных задач IV.1, IV.2, операторов C_{11} , C_{12} , взаимную сопряженность операторов G_1 и $\gamma_{n,1}$ и свойства потенциала Φ_{21} :

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_{\Omega_1} G_1 C_{11} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 \cdot \overline{\mathbf{u}_1} d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_1} G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\mathbf{u}_1} d\Omega_1 = \\ = \rho_2 \int_{\Gamma_1} C_{11} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 \cdot \overline{\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1} d\Gamma_1 + \rho_2 \int_{\Gamma_1} C_{12} \gamma_{n,1} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1} d\Gamma_1 = \\ = \rho_2 \int_{\Gamma_1} \theta_1 \Phi_{21} \cdot \overline{(-\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1)} d\Gamma_1 + \rho_2 \int_{\Gamma_1} \theta_1 \Phi_{22} \cdot \overline{(-\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1)} d\Gamma_1 = \\ = \rho_2 \int_{\Gamma_1} \Phi_{21} \cdot \overline{-\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n_2}} d\Gamma_1 + \rho_2 \int_{\Gamma_1} \Phi_{22} \cdot \overline{-\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n_2}} d\Gamma_1 = \rho_2 \int_{\Gamma_1} (\Phi_{21} + \Phi_{22}) \cdot \overline{-\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n_2}} d\Gamma_1. \end{aligned}$$

Аналогично с учетом свойств операторов C_{21} и C_{22} , G_2 преобразуем пятое и шестое слагаемые; получим

$$\rho_2 \int_{\Omega_2} G_2 C_{21} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 + \rho_2 \int_{\Omega_2} G_2 C_{22} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 = \rho_2 \int_{\Gamma_2} (\Phi_{21} + \Phi_{22}) \cdot \overline{\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n_2}} d\Gamma_2.$$

Кроме того, используя вспомогательную задачу III, преобразуем седьмое слагаемое в (2.3.11):

$$\rho_3 \int_{\Omega_2} G_2 C_3 \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2 \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 = \rho_3 \int_{\Gamma_2} \Phi_3 \cdot \overline{\left(-\frac{\partial \Phi_3}{\partial n_2}\right)} d\Gamma_2.$$

Тогда взамен (2.3.11) получим

$$(\mathcal{T}z, z)_{\mathcal{H}} = \rho_1 \int_{\Omega_1} |\mathbf{u}_1|^2 d\Omega_1 + \sum_{r=1}^m \int_{\Omega_1} |\mathbf{y}_r|^2 d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2 + \rho_3 \int_{\Omega_3} |\nabla \Phi_3|^2 d\Omega_3 + \\ + g(\rho_2 - \rho_1) \int_{\Gamma_1} |\zeta_1|^2 d\Gamma_1 + g(\rho_3 - \rho_2) \int_{\Gamma_2} |\zeta_2|^2 d\Gamma_2 > 0. \quad (2.3.12)$$

С учетом ограниченности оператора $\mathcal{T}$ из (2.3.12) можно установить, что он самосопряжен и положительно определен. $\square$

Изучим теперь общие свойства оператора $\mathcal{A}$ из (2.3.7), (2.3.9).

Лемма 2.4. *Операторная матрица $\mathcal{A}$ допускает факторизацию в виде произведения трех матриц с симметричным окаймлением средней матрицы:*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}} & 0 \\ 0 & \hat{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{I} & \tilde{\mathcal{G}}^+ \\ -\tilde{\mathcal{G}} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}} & 0 \\ 0 & \hat{I}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.3.13)$$

где

$$\tilde{\mathcal{G}}^+ := \begin{pmatrix} g(\rho_2 - \rho_1)A^{-1/2}G_1 & 0 \\ \hat{0} & \hat{0} \\ 0 & g(\rho_3 - \rho_2)G_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{G}} := \begin{pmatrix} g(\rho_2 - \rho_1)G_1^*A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g(\rho_3 - \rho_2)G_2^* \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} A^{1/2} & \hat{0}^\tau & 0 \\ \hat{0} & \hat{I}_m & \hat{0} \\ 0 & \hat{0}^\tau & I \end{pmatrix}, \quad \tilde{I} := \begin{pmatrix} I & \hat{\alpha}^\tau & 0 \\ -\hat{\alpha} & \hat{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{I}_2 := \text{diag}\{I, I\}.$$

Лемма 2.5. *Имеет место соотношение*

$$A^{-1/2}G_1 = (G_1^*A^{-1/2})^*|_{\mathcal{D}(G_1)},$$

причем замыкание по непрерывности оператора $A^{-1/2}G_1$ совпадает с $(G_1^*A^{-1/2})^*$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.8.

Из леммы 2.5 непосредственно получаем следующий результат.

Лемма 2.6. *Справедливо соотношение $\overline{\tilde{\mathcal{G}}^+} = \tilde{\mathcal{G}}^*$, $\tilde{\mathcal{G}}^+ = \tilde{\mathcal{G}}^*|_{\mathcal{D}(G_1) \oplus \mathcal{D}(G_2)}$.*

Лемма 2.7. *Операторная матрица $\mathcal{A}$ из (2.3.7)–(2.3.9) является аккретивной в пространстве $\mathcal{H}$, т.е.*

$$\text{Re}(\mathcal{A}z, z)_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}.$$

Доказательство. Действительно,

$$(\mathcal{A}z, z)_{\mathcal{H}} = (A\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)_{J_{0,S_1}(\Omega_1)} + (\hat{\alpha}^\tau \hat{y}, \mathbf{u}_1)_{J_{0,S_1}(\Omega_1)} + b_1(G_1\zeta_1, \mathbf{u}_1)_{J_{0,S_1}(\Omega_1)} - (\hat{\alpha}\mathbf{u}_1, \hat{y})_{J_{0,S_1}(\Omega_1)} + \\ + (\hat{\beta}\hat{y}, \hat{y})_{J_{0,S_1}(\Omega_1)} + b_2(G_2\zeta_2, \nabla\Phi_{22})_{G_{h,S_2}(\Omega_2)} - b_1(\gamma_{n,1}\mathbf{u}_1, \zeta_1)_{L_{2,\Gamma_1}} - b_2(\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22}, \zeta_2)_{L_{2,\Gamma_2}} = \\ = (A\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)_{J_{0,S_1}(\Omega_1)} + (\hat{\beta}\hat{y}, \hat{y})_{J_{0,S_1}(\Omega_1)} + (\hat{\alpha}^\tau \hat{y}, \mathbf{u}_1)_{J_{0,S_1}(\Omega_1)} - \overline{(\hat{\alpha}^\tau \hat{y}, \mathbf{u}_1)}_{J_{0,S_1}(\Omega_1)} + \\ + b_1(\zeta_1, \gamma_{n,1}\mathbf{u}_1)_{L_{2,\Gamma_1}} - b_1\overline{(\zeta_1, \gamma_{n,1}\mathbf{u}_1)}_{L_{2,\Gamma_1}} + b_2(\zeta_2, \gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22})_{L_{2,\Gamma_2}} - b_2\overline{(\zeta_2, \gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22})}_{L_{2,\Gamma_2}},$$

откуда следует, что

$$\text{Re}(\mathcal{A}z, z)_{\mathcal{H}} = (A\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)_{J_{0,S_1}(\Omega_1)} + \sum_{r=1}^m \beta_r(y_r, y_r)_{J_{0,S_1}(\Omega_1)} \geq 0. \quad \square$$

Введем операторную матрицу

$$\mathcal{J}_a := \mathcal{J}_0 + a \text{diag}(0; \hat{0}^\tau; I; I; I), \quad a > 0, \quad \mathcal{J}_0 := \begin{pmatrix} \tilde{I} & \tilde{\mathcal{G}} \\ -\tilde{\mathcal{G}}^* & \mathcal{O} \end{pmatrix}. \quad (2.3.14)$$

Тогда для $\mathcal{J}_a$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}(\mathcal{J}_a z, z)_{\mathcal{H}} \geq c \|z\|_{\mathcal{H}}^2, \quad c > 0. \quad (2.3.15)$$

Из (2.3.14) следует, что операторная матрица $\mathcal{A}$ из (2.3.13) принимает вид

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}(\tilde{\mathcal{A}}; \hat{I}_2) \mathcal{J}_a \operatorname{diag}(\tilde{\mathcal{A}}; \hat{I}_2) - a \operatorname{diag}(0; \hat{0}^\tau; I; I; I) =: \mathcal{A}_a - a \operatorname{diag}(0; \hat{0}^\tau; I; I; I). \quad (2.3.16)$$

При этом оператор $\mathcal{A}_a$ представлен в виде произведения трех сомножителей, каждый из которых имеет ограниченный обратный. Поэтому $\mathcal{A}_a$ допускает расширение путем замыкания среднего сомножителя, и в итоге возникает максимальный равномерно аккретивный оператор.

Лемма 2.8. *Замыкание $\bar{\mathcal{A}}_a$ оператора $\mathcal{A}_a$ представляется в виде*

$$\bar{\mathcal{A}}_a = \operatorname{diag}(A^{1/2}; \hat{I}; I) \bar{\mathcal{J}}_a \operatorname{diag}(A^{1/2}; \hat{I}; I),$$

где

$$\bar{\mathcal{J}}_a = \begin{pmatrix} \tilde{I}_a & \tilde{\mathcal{G}}^* \\ -\tilde{\mathcal{G}} & a\hat{I}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{I}_a := \tilde{I} + a \operatorname{diag}\{0; \hat{0}; I\},$$

$\bar{\mathcal{J}}_a$ — равномерно аккретивный оператор, для которого выполнено свойство (2.3.15) (с заменой $\mathcal{J}_a \rightarrow \bar{\mathcal{J}}_a$). При этом

$$\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a) = \left\{ y = (\mathbf{u}_1; \hat{y}; \nabla \Phi_{22}; \zeta_1; \zeta_2)^\tau : \mathbf{u}_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \right. \\ \left. A^{1/2} \mathbf{u}_1 + \sum_{r=1}^m \alpha_r^{1/2} \mathbf{y}_r + g(\rho_1 - \rho_2)(G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \right\}, \quad \mathcal{R}(\bar{\mathcal{A}}_a) = \mathcal{H},$$

и оператор $\bar{\mathcal{A}}_a$ действует на $\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a)$ по закону

$$\bar{\mathcal{A}}_a z = \begin{pmatrix} A^{1/2}(A^{1/2} \mathbf{u}_1 + \hat{\alpha}^\tau \hat{y} + g(\rho_1 - \rho_2)(G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1) \\ -\hat{\alpha} A^{1/2} \mathbf{u}_1 + \beta \hat{y} \\ a \nabla \Phi_{22} + g(\rho_2 - \rho_3) G_2 \zeta_2 \\ -g(\rho_1 - \rho_2) G_1^* \mathbf{u}_1 + a \zeta_1 \\ -g(\rho_2 - \rho_3) G_2^* \nabla \Phi_{22} + a \zeta_2 \end{pmatrix}$$

2.4. О разрешимости начально-краевой задачи. Формулировка спектральной проблемы.

Теорема о сильной разрешимости исходной начально-краевой задачи. Вернемся к задаче (2.3.7)–(2.3.9) и перепишем ее с учетом (2.3.16) в виде

$$\mathcal{T} \frac{dz}{dt} = -(\mathcal{A}_a - a\mathcal{P})z + g(t), \quad z(0) = z^0 := (\mathbf{u}_1^0; \hat{0}; \mathbf{u}_2^0; \zeta_1^0; \zeta_2^0)^\tau, \\ z = (\mathbf{u}_1; \hat{y}; \nabla \Phi_{22}; \zeta_1; \zeta_2)^\tau, \quad \mathcal{P} := \operatorname{diag}(0; \hat{0}^\tau; I; I; I).$$

Рассмотрим также аналогичную задачу с замкнутым максимальным аккретивным оператором:

$$\mathcal{T} \frac{dz}{dt} = -(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P})z + g(t), \quad z(0) = z^0. \quad (2.4.1)$$

Оператор $\mathcal{T}$ самосопряженный, положительно определенный и ограниченный в $\mathcal{H}$; значит, для него существует обратный оператор $\mathcal{T}^{-1}$, обладающий теми же свойствами. Тогда из (2.4.1) имеем:

$$\frac{dz}{dt} = -\mathcal{T}^{-1}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P})z + \mathcal{T}^{-1}g(t), \quad z(0) = z^0. \quad (2.4.2)$$

Введем в $\mathcal{H}$ эквивалентную норму по формуле

$$\langle z, z \rangle := (\mathcal{T}z, z)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{T}^{1/2}z, \mathcal{T}^{1/2}z)_{\mathcal{H}}.$$

Эквивалентность этой нормы стандартной норме следует из свойств оператора $\mathcal{T}$. Легко проверить, что оператор $\mathcal{T}^{-1}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P})$ будет максимальным аккретивным в новом скалярном произведении, и тогда $-\mathcal{T}^{-1}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P})$ является генератором сжимающей C_0 -полугруппы. Поэтому по

теореме Филлипса (см. [12, с.166]) задача Коши (2.4.2) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0, T]$, если выполнены следующие условия:

$$z^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a), \quad g(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{H}). \quad (2.4.3)$$

Из условий (2.4.3) получим соответствующие условия на начальные данные исходной задачи (2.1.2)–(2.1.11).

Так, из принадлежности элемента z^0 области определения оператора $\mathcal{A}$ следует, что

$$\mathbf{u}_1^0 \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \zeta_j^0 \in \mathcal{D}(G_j) = H_{\Gamma_j}^{1/2}, \quad j = 1, 2.$$

Аналогично получим условие для $\mathbf{f}_k(t)$:

$$\mathbf{f}_k(t) \in C^1([0, T]; \mathbf{L}_2(\Omega_k)), \quad k = \overline{1, 3}.$$

Определение 2.1. Будем говорить, что исходная начально-краевая задача (2.1.2)–(2.1.11) имеет сильное решение $\{\mathbf{u}_1(t); \mathbf{u}_2(t); \mathbf{u}_3(t); \zeta_1(t); \zeta_2(t)\}$ на отрезке $[0, T]$, если выполнены следующие условия:

- (1) $\mathbf{u}_k(t) \in C^1([0, T]; \mathbf{J}_{0,S}(\Omega_k))$, $k = \overline{1, 3}$;
- (2) $\mathbf{v}_1(t) = I_{0,1}(t)\mathbf{u}_1(t)$ (см. (2.1.3)) обладает свойством $\mathbf{v}_1(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A))$;
- (3) $\zeta_j(t) \in C^1([0, T]; H_{\Gamma_j}^{1/2})$, $j = 1, 2$;
- (4) для любого $t \in [0, T]$ выполнена система уравнений (2.2.25)–(2.2.27), где все слагаемые в первом уравнении — элементы из $C([0, T]; \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1))$, во втором — элементы из $C([0, T]; \mathbf{J}_{0,S_2}(\Omega_2))$, а в третьем и четвертом — из $C([0, T]; H_{\Gamma_1}^{1/2})$ и $C([0, T]; H_{\Gamma_2}^{1/2})$ соответственно;
- (5) выполнены начальные условия (2.2.28).

Сформулируем теперь теорему существования и единственности сильного решения задачи (2.1.2)–(2.1.11).

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия

$$\mathbf{u}_1^0 \in \mathcal{D}(A) \subset \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1), \quad \mathbf{u}_l \in \mathbf{H}^1(\Omega_l) \cap \mathbf{J}_{0,S_l}(\Omega_l), \quad \zeta_j^0 \in H_{\Gamma_j}^{1/2}, \quad j = 1, 2, \quad l = 2, 3;$$

$$\mathbf{f}_k(t) \in C^1([0, T]; \mathbf{L}_2(\Omega_k)), \quad k = \overline{1, 3}.$$

Тогда начально-краевая задача (2.1.2)–(2.1.11) имеет единственное сильное решение на $[0; T]$.

Доказательство, основанное на обратном переходе от задачи Коши (2.4.2) к начально-краевой задаче (2.1.2)–(2.1.11) с использованием результатов лемм 2.2, 2.3–2.8, проводится по схеме доказательства теорем 2, 3 и 5 работы [9].

К задаче о нормальных колебаниях гидросистемы. Рассмотрим теперь постановку задачи о малых нормальных движениях исследуемой гидросистемы, т.е. о таких решениях однородной задачи (2.4.1) с замкнутым основным оператором, которые зависят от t по закону

$$z(t) := \left(\mathbf{u}_1(t); \hat{y}(t); \nabla \Phi_{22}(t); \zeta_1(t); \zeta_2(t) \right)^\tau = \left(\mathbf{u}_1; \hat{y}; \nabla \Phi_{22}; \zeta_1; \zeta_2 \right)^\tau e^{-\lambda t},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексный декремент затухания, а $(\mathbf{u}_1; \hat{y}; \nabla \Phi_{22}; \zeta_1; \zeta_2)^\tau$ — амплитудный элемент. Тогда для отыскания амплитудных элементов возникает спектральная задача

$$A^{1/2} \left(A^{1/2} \mathbf{u}_1 + \hat{\alpha}^\tau \hat{y} + g(\rho_1 - \rho_2)(G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1 \right) = \lambda \left((\rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11} \gamma_{n,1}) \mathbf{u}_1 + \rho_2 G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \right),$$

$$-\alpha_r^{1/2} A^{1/2} \mathbf{u}_1 + \beta_r \mathbf{y}_r = \lambda \mathbf{y}_r, \quad r = \overline{1, m},$$

$$g(\rho_2 - \rho_3) G_2 \zeta_2 = \lambda (\rho_2 G_2 C_{21} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 + (\rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2}) \nabla \Phi_{22}),$$

$$-G_1^* \mathbf{u}_1 = \lambda \zeta_1, \quad -G_2^* \nabla \Phi_{22} = \lambda \zeta_2. \quad (2.4.4)$$

В случае $\lambda = 0$ приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} A^{1/2} \left(A^{1/2} \mathbf{u}_1 + \hat{\alpha}^\tau \hat{y} + g(\rho_1 - \rho_2) (G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1 \right) &= \mathbf{0}, \\ \beta_r \mathbf{y}_r &= \alpha_r^{1/2} A^{1/2} \mathbf{u}_1, \quad r = \overline{1, m}, \quad G_2 \zeta_2 = 0, \quad G_1^* \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}, \quad G_2^* \nabla \Phi_{22} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Домножив скалярно третье соотношение на элемент $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{J}_{0, S_2}(\Omega_2)$, будем иметь

$$0 = (G_2 \zeta_2, \mathbf{u}_2)_{L_2(\Omega_2)} = \langle \zeta_2, \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2 \rangle_{L_2, \Gamma_2},$$

откуда в силу произвольности $\mathbf{u}_2$ следует, что $\zeta_2 = 0$. Аналогично из последних двух связей получаем, что $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$, $\nabla \Phi_{22} = \mathbf{0}$; тогда из второго соотношения следует, что $\mathbf{y}_r = \mathbf{0}$, $r = \overline{1, m}$, и, наконец, из первого —

$$A^{1/2} \left(g(\rho_1 - \rho_2) (G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1 \right) = \mathbf{0}.$$

Домножая это соотношение на $(g(\rho_1 - \rho_2))^{-1}$, а затем скалярно на элемент $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{J}_{0, S_1}(\Omega_1)$, получим

$$0 = (A^{1/2} (G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1, \mathbf{u}_1)_{L_2(\Omega_1)} = \langle \zeta_1, G_1^* A^{-1/2} A^{1/2} \mathbf{u}_1 \rangle_{L_2, \Gamma_1} = \langle \zeta_1, \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 \rangle_{L_2, \Gamma_1}.$$

Отсюда можем заключить, что $\zeta_1 = 0$ в силу произвольности элемента $\mathbf{u}_1$.

Таким образом, задача (2.4.5) имеет лишь тривиальное решение, т.е. $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (2.4.4).

Рассмотрим еще случай, когда $\lambda = \beta_s$, $s = \overline{1, m}$. Вместо (2.4.4) теперь будем иметь систему уравнений

$$\begin{aligned} A^{1/2} \left(A^{1/2} \mathbf{u}_1 + \hat{\alpha}^\tau \hat{y} + g(\rho_1 - \rho_2) (G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1 \right) &= \beta_s \left((\rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11} \gamma_{n,1}) \mathbf{u}_1 + \rho_2 G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \right), \\ -\alpha_r^{1/2} A^{1/2} \mathbf{u}_1 + \beta_r \mathbf{y}_r &= \beta_s \mathbf{y}_r, \quad r = \overline{1, m}, \\ g(\rho_2 - \rho_3) G_2 \zeta_2 &= \beta_s \left(\rho_2 G_2 C_{21} \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 + (\rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2}) \nabla \Phi_{22} \right), \\ G_1^* \mathbf{u}_1 &= \beta_s \zeta_1, \quad G_2^* \nabla \Phi_{22} = \beta_s \zeta_2. \end{aligned}$$

Из второго соотношения при $r = s$ заключаем, что $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ в силу обратимости оператора $A^{1/2}$. Тогда из четвертого уравнения получим, что $\zeta_1 = 0$, а из второго при $r \neq s$ — свойство $\mathbf{y}_r = \mathbf{0}$. Выразим из последнего соотношения ζ_2 и подставим в третье. Получим

$$\left(g(\rho_2 - \rho_3) \beta_s^{-1} G_2 G_2^* - \beta_s (\rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2}) \right) \nabla \Phi_{22} = \mathbf{0}. \quad (2.4.6)$$

Домножив (2.4.6) скалярно на элемент $\nabla \Phi_{22} \in \mathbf{G}_{h, S_2, \Gamma_2}(\Omega_2)$, получим

$$\begin{aligned} 0 &= g(\rho_2 - \rho_3) \beta_s^{-1} (G_2 G_2^* \nabla \Phi_{22}, \nabla \Phi_{22})_{L_2(\Omega_2)} - \\ &\quad - \beta_s \rho_2 (G_2 C_{22} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22}, \nabla \Phi_{22})_{L_2(\Omega_2)} - \beta_s \rho_3 (G_2 C_3 \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22}, \nabla \Phi_{22})_{L_2(\Omega_2)}. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Используя свойства операторов C_{22} , C_3 и G_2 для каждого из слагаемых, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} G_2 G_2^* \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 &= \int_{\Gamma_2} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22}} d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} \left| \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} \right|^2 d\Gamma_2, \\ \int_{\Omega_2} G_2 C_{22} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 &= \int_{\Gamma_2} C_{22} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22}} d\Gamma_2 = \\ &= - \int_{\Gamma_2} \theta_2 \Phi_{22} \cdot \overline{-\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n}} d\Gamma_2 = - \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_{22}|^2 d\Omega_2, \\ \int_{\Omega_2} G_2 C_3 \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 &= \int_{\Gamma_2} C_3 \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22}} d\Gamma_2 = \end{aligned}$$

$$= - \int_{\Gamma_2} \theta_2 \Phi_3 \cdot \frac{\partial \overline{\Phi_{22}}}{\partial n_2} d\Gamma_2 = - \int_{\Gamma_2} \theta_2 \Phi_3 \cdot \frac{\partial \overline{\Phi_3}}{\partial n_2} d\Gamma_2 = - \int_{\Omega_3} |\nabla \Phi_3|^2 d\Omega_3.$$

Подставляя эти результаты в (2.4.7), находим

$$0 = g(\rho_2 - \rho_3)\beta_s^{-1} \int_{\Gamma_2} \left| \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} \right|^2 d\Gamma_2 + \beta_s \rho_2 \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_{22}|^2 d\Omega_2 + \beta_s \rho_3 \int_{\Omega_3} |\nabla \Phi_3|^2 d\Omega_3,$$

откуда следует, что $\nabla \Phi_{22} = \mathbf{0}$, а значит, $\zeta_2 = 0$. С учетом этих равенств из первого уравнения приходим к выводу, что $\mathbf{y}_s = \mathbf{0}$, т.е. $\lambda = \beta_s$, $s = \overline{1, m}$, тоже не является собственным значением задачи (2.4.4).

Опираясь на эти факты, преобразуем при $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \beta_s$, $s = \overline{1, m}$, задачу (2.4.4) к спектральной проблеме, исключив $\mathbf{y}_r$ и ζ_j , $r = \overline{1, m}$, $j = 1, 2$. Имеем

$$\begin{aligned} \lambda \begin{pmatrix} \rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11} \gamma_{n,1} & \rho_2 G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \\ \rho_2 G_2 C_{21} \gamma_{n,1} & \rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \nabla \Phi_{22} \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} g(\rho_1 - \rho_2) G_1 G_1^* & 0 \\ 0 & g(\rho_2 - \rho_3) G_2 G_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \nabla \Phi_{22} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} A_1 \left(I - \sum_{r=1}^m \frac{\alpha_r}{\lambda - \beta_r} \right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \nabla \Phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Осуществляя замену

$$A^{1/2} \mathbf{u}_1 =: \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1),$$

приходим к спектральной проблеме для элемента $x := (\boldsymbol{\varphi}; \nabla \Phi_{22})^T$:

$$L(\lambda)x := \left(\text{diag}\{e_0(\lambda); 0\} - \lambda \text{diag}\{A^{1/2}; 0\} \tilde{C} \text{diag}\{A^{1/2}; 0\} - \lambda^{-1} \text{diag}\{b_1 Q Q^*; b_2 G_2 G_2^*\} \right) x = 0, \quad (2.4.8)$$

где

$$e_0(\lambda) := 1 + \sum_{r=1}^m \alpha_r (\beta_r - \lambda)^{-1}, \quad \tilde{C} := \begin{pmatrix} \rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11} \gamma_{n,1} & \rho_2 G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \\ \rho_2 G_2 C_{21} \gamma_{n,1} & \rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2} \end{pmatrix},$$

в пространстве $\mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{J}_{0,S_2}(\Omega_2)$ для операторного пучка $L(\lambda)$.

Задачу (2.4.8) можно исследовать методами спектральной теории операторных пучков (см. [15]). В частности, можно установить, что спектр этой задачи дискретен, расположен в правой комплексной полуплоскости и состоит из шести ветвей собственных значений, которым отвечают пограничные волны на границе раздела Γ_1 , поверхностные волны на Γ_2 , внутренние диссипативные волны в области Ω_1 , а также диссипативные волны, обусловленные вязкоупругостью жидкости.

Подробно эти свойства решений спектральной задачи (2.4.8), а также свойства полноты и базисности ее корневых (собственных и присоединенных) элементов будут изучены в другой работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович М. С. Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей // Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 5 (347). — С. 3–78.
2. Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д. Эволюционная и спектральная задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости // Тр. СПб. мат. о-ва. — 1998. — 6. — С. 5–33.
3. Аскеров Н. К., Крейн С. Г., Лаптев Г. И. Задача о колебаниях вязкой жидкости связанные с ней операторные уравнения // Функц. анализ. прилож. — 1968. — 2, № 2. — С. 21–32.
4. Вронский Б. М. Нормальные колебания частично диссипативной гидросистемы // Динам. сист. — 2012. — 2 (30), № 1–2. — С. 53–56.
5. Вронский Б. М. О малых движениях системы «жидкость-газ» в ограниченной области // Укр. мат. ж. — 2006. — 58, № 10. — С. 1326–1334.

6. Гохберг Н. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
7. Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов// Усп. мат. наук. — 1971. — 26, № 4 (100). — С. 15–41.
8. Копачевский Н. Д. Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: Форма, 2016.
9. Копачевский Н. Д. О малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд// Динам. сист. — 2017. — 7 (35), № 1–2. — С. 109–145.
10. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
11. Копачевский Н. Д., Семкина Е. В. О малых движениях гидросистемы «вязкоупругая жидкость—идеальная жидкость», заполняющей неподвижный сосуд// Динам. сист. — 2017. — 7 (35), № 3. — С. 207–228.
12. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
13. Крейн С. Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде// Докл. АН СССР. — 1964. — 159, № 2. — С. 262–265.
14. Крейн С. Г., Лантев Г. И. К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде// Функци. анал. прилож. — 1968. — 2, № 1. — С. 40–50.
15. Маркус А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
16. Милославский А. И. Спектральный анализ малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом контейнере/ Деп. рукопись № 1221. — Киев: Ин-т мат. НАН Украины, 1989.
17. Милославский А. И. Спектр малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом сосуде// Усп. мат. наук. — 1989. — 44, № 4.
18. Милославский А. И. Спектр малых колебаний вязкоупругой наследственной среды// Докл. АН СССР. — 1989. — 309, № 3. — С. 532–536.
19. Agranovich M. Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary// Russ. J. Math. Phys. — 2008. — 15, № 2. — P. 146–155.
20. Eirich F. Rheology. Theory and Applications. — New York: Academic Press, 1956.
21. Gagliardo E. Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili// Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1957. — 27. — P. 284–305.
22. Kopachevsky N., Krein S. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1. Self-Adjoint Problems for an Ideal Fluid. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2001.
23. Kopachevsky N., Krein S. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2. Non-Self-Adjoint Problems for Viscous Fluids. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2003.
24. Kopachevsky N., Padula M., Vronsky B. M. Small motions and eigenoscillations of a system “fluid-gas” in a bounded region// Uchen. Zap. Tavrich. Nats. Univ. im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibernet. — 2007. — 20, № 1. — P. 3–55.
25. Miloslavskii A. Stability of a viscoelastic isotropic medium// Sov. Phys. Dokl. — 1985. — 33.
26. Miloslavsky A. Stability of certain classes of evolution equations// Sib. Math. J. — 1985. — 26, № 5. — P. 723–735.
27. Rychkov V. On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains// J. London Math. Soc. — 1999. — 60, № 1. — P. 237–257.

Копачевский Николай Дмитриевич

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь

E-mail: kopachevsky@list.ru

Семкина Екатерина Владимировна

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь

E-mail: kozirno@email.com