Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Серегина, В. В. Калманович, М. А. Степович, Сравнительный анализ матричного метода и метода конечных разностей для моделирования распределения неосновных носителей заряда в многослойной планарной полупроводниковой структуре, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 172, 104–112

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-172-104-112>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:17:21

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 172 (2019). С. 104–112
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-104-112

УДК 517.927.2, 519.677

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МАТРИЧНОГО МЕТОДА И МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОСНОВНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАНАРНОЙ ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ СТРУКТУРЕ

© 2019 г. Е. В. СЕРЕГИНА, В. В. КАЛМАНОВИЧ, М. А. СТЕПОВИЧ

Аннотация. Стационарное дифференциальное уравнение тепломассопереноса с разрывными коэффициентами описывает различные физические процессы, не зависящие от времени, например, распределение неосновных носителей заряда от стационарного источника в неоднородной или многослойной структуре. В работе изложены результаты анализа возможностей применения матричного метода и метода конечных разностей для моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных киловольтными электронами в многослойном полупроводниковом материале. Показана эффективность матричного метода для решения стационарных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами.

Ключевые слова: математическая модель, дифференциальное уравнение, электронный пучок, полупроводник, многослойная планарная структура, матричный метод, метод конечных разностей.

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE MATRIX METHOD AND THE FINITE-DIFFERENCE METHOD FOR MODELING THE DISTRIBUTION OF MINORITY CHARGE CARRIERS IN A MULTILAYER PLANAR SEMICONDUCTOR STRUCTURE

© 2019 E. V. SEREGINA, V. V. KALMANOVICH, M. A. STEPovich

ABSTRACT. The stationary differential heat and mass transfer equation with discontinuous coefficients describes various non-time-dependent physical processes, for example, the distribution of minority carriers from a stationary source in an inhomogeneous or multilayer structure. In this paper, we analyze the possibilities of applying the matrix method and the finite-difference method for modeling the distribution of minority charge carriers generated by kilovolt electrons in a multilayer semiconductor material. The efficiency of the matrix method for solving stationary differential equations with discontinuous coefficients is shown.

Keywords and phrases: mathematical model, differential equation, electron beam, semiconductor, multilayer planar structure, matrix method, finite-difference method.

AMS Subject Classification: 34B05, 34B60, 65Z05, 80A20, 78A55

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271), а также совместного проекта Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Калужской области № 18-41-400001.

1. Введение. Для математического моделирования явлений тепломассопереноса в однородной или многослойной среде, обусловленных взаимодействием заряженных частиц или электромагнитного излучения с полупроводниковой мишенью, ранее было предложено использовать так называемую модель независимых источников, в которой искомое распределение диффундирующего вещества или тепла в объеме материала находится как суперпозиция от точечных источников, имеющихся в каждом микрообъеме конденсированного вещества. Математически это отвечает наличию в правой части дифференциального уравнения тепломассопереноса дельта-функции. Интегрирование полученных распределений от каждого из микрообъемов позволяет найти искомое распределение диффундирующего вещества или тепла в объеме материала. Расчеты проводились нами как для однородного материала (см. [4]), так и для двух- (см. [19, 23]) и трехслойных планарных полупроводниковых структур (см. [18, 21]). Однако в планарных полупроводниковых структурах микро- и наноэлектроники количество слоев существенно больше, к тому же их параметры могут иметь различные значения в различных точках материала (например, в варизонных структурах). С увеличением числа слоев значительно увеличивается трудоемкость задачи, так как приходится решать большое число алгебраических уравнений с большим числом параметров; отчасти поэтому нам не удалось найти алгоритм решения рассматриваемых задач тепломассопереноса при наличии четырех и большего количества планарных полупроводниковых слоев. Использование других методов (операционных, вариационных, совместного использования точных и приближенных аналитических методов) приводит к различным проблемам. В этом случае, как правило, приходится решать алгебраические уравнения высоких степеней и системы алгебраических уравнений, которые могут иметь плохую обусловленность матриц коэффициентов, а в случае, когда удается получить аналитическое решение в виде бесконечных рядов, наблюдается их плохая сходимость. Отметим, что для однородных материалов проведено моделирование явлений тепломассопереноса и для остро сфокусированного электронного зонда (см. [2, 3, 22]), в том числе и с использованием численных методов (см. [16, 17]). Для использования численного решения разработан алгоритм применения проекционного метода Галеркина и получена порядковая оценка погрешности невязки, соответствующей приближенному решению стационарного уравнения диффузии (см. [12]). Для однородного полупроводникового материала этот метод позволяет находить матрицу, определяющую приближенное решение рассматриваемой задачи, не прибегая к операциям дифференцирования и интегрирования, а используя только алгебраические операции, что существенно сокращает время вычислений. Приближенное решение содержит небольшое число (10–12) членов разложения по базису из модифицированных функций Лагерра. В то же время для многослойных структур этот метод не применялся, и можно предположить, что его реализация для таких объектов может быть весьма трудоемкой.

Ранее было показано, что для математического моделирования явлений тепломассопереноса в многослойной планарной среде с произвольным числом слоев может быть использован разработанный нами матричный метод (см. [8, 9]), основанный на аппарате обобщенных степеней Берса (см. [5, 20]). Анализ возможностей применения матричного метода и сравнение его возможностей с численным методом конечных разностей для моделирования распределения неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных широким электронным пучком в многослойной планарной полупроводниковой структуре, и посвящена настоящая работа.

2. Постановка задачи. Рассмотрим стационарное дифференциальное уравнение диффузии неравновесных ННЗ, генерированных широким пучком киловольтных электронов в конечный полупроводник:

$$\frac{d}{dz} \left(D(z) \frac{d\Delta p(z)}{dz} \right) - \frac{\Delta p(z)}{\tau(z)} = -\rho(z) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$D_1 \frac{d\Delta p(z)}{dz} \Big|_{z=0} = v_{s1} \Delta p(0), \quad D_n \frac{d\Delta p(z)}{dz} \Big|_{z=l} = v_{s2} \Delta p(l). \quad (2)$$

Для многослойной структуры обозначим через $z_1, \dots, z_{n-1}$ координаты границ раздела слоев (z_1 — первого и второго, $\dots$, z_{n-1} — $(n-1)$ -го и n -го), $D_1, \dots, D_n$, $L_1, \dots, L_n$, $\tau_1, \dots, \tau_n$ — электрофизические параметры слоев (коэффициенты диффузии, диффузионные длины и времена жизни ННЗ, соответственно), а S_1 и S_2 — приведенные скорости поверхностной рекомбинации на поверхностях первого (при $z = 0$) и n -го (при $z = l$) материалов. При этом $L_1 = \sqrt{D_1 \tau_1}$, $\dots$, $L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$, а $S_1 = L_1 v_{s1}/D_1$, $S_2 = L_n v_{s2}/D_n$, где v_{s1} и v_{s2} — скорости поверхностной рекомбинации ННЗ на поверхности первого слоя (при $x = 0$) и на поверхности последнего слоя (при $x = l$). Функция $\Delta p(z)$ описывает распределение по глубине ННЗ, генерированных внешним энергетическим воздействием, после их диффузии в полупроводнике; z — координата, отсчитываемая от плоской поверхности в глубь полупроводника. Функция $\rho(z)$ — зависимость от координаты плотности ННЗ, генерированных электронным пучком в полупроводниковой мишени. Для широкого электронного пучка $\rho(z)$ может быть найдена по формуле (см. [13, 14]):

$$\rho(z) = \frac{1,085(1-\eta)E_0}{\sqrt{\pi}z_{ms}(1-\eta+\eta\frac{z_{ss}}{z_{ms}})} \left\{ \exp \left[- \left(\frac{z-z_{ms}}{z_{ms}} \right)^2 \right] + \frac{\eta}{1-\eta} \exp \left[- \left(\frac{z-z_{ss}}{z_{ss}} \right)^2 \right] \right\}.$$

Здесь E_0 — энергия электронного пучка, рассеянная в мишени в единицу времени, z_{ms} — глубина максимальных потерь энергии первичными электронами, испытавшими малоугловое рассеяние; z_{ss} — глубина максимальных потерь энергии обратно рассеянными электронами; η — коэффициент обратного рассеяния электронов зонда.

В настоящей работе поставлена задача о поиске аналитического решения уравнения (1) с граничными условиями (2) матричным методом (см. [7]) и сравнить результаты с расчетом распределений ННЗ, генерированных электронным пучком в трехслойном и четырехслойном полупроводниковом материале, полученным с помощью метода конечных разностей (см. [15]).

3. Описание матричного метода. Ранее в [6, 7, 9–11] описывалось моделирование процессов тепломассопереноса матричным методом. Метод сводится к последовательному умножению функциональных матриц второго порядка, компоненты которых в каждой точке определяются физическими и геометрическими параметрами текущего слоя, является аналитическим и теоретически его применение возможно для произвольного конечного числа слоев. Опишем кратко суть матричного метода.

В общем виде одномерный стационарный процесс тепломассопереноса в многослойной среде может быть задан уравнением

$$D_2^{(i)} D_1^{(i)} \Phi^{(i)}(z) - m_i^2 \Phi^{(i)}(z) = \mu^{(i)}(z), \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где потенциал $\Phi^{(i)}(z)$ — искомая функция, $D_1^{(i)}$, $D_2^{(i)}$ — дифференциальные операторы

$$D_1^{(i)} = a_1^{(i)}(z) \frac{d}{dz}, \quad D_2^{(i)} = a_2^{(i)}(z) \frac{d}{dz},$$

$a_1^{(i)}(z)$, $a_2^{(i)}(z)$ — положительные функции, определенные физическими и геометрическими параметрами слоев, $\mu^{(i)}(z)$ — величина, пропорциональная объемной плотности энергии распределения источников, i — номер слоя. Поток задается формулой

$$J^{(i)}(z) = -D_1^{(i)} \Phi^{(i)}(z).$$

В точке контакта слоев выполняются условия непрерывности потенциала и потока

$$\Phi^{(i)}(z_{i+1}, t) = \Phi^{(i+1)}(z_{i+1}, t), \quad J^{(i)}(z_{i+1}, t) = J^{(i+1)}(z_{i+1}, t), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Если значения потенциала $\Phi^{(1)}(z_1)$ и потока $J^{(1)}(z_1)$ заданы, то для уравнения (3) поставлена задача Коши.

Введем вектор-столбцы V , W и матрицу K

$$V^{(i)}(z) = \begin{pmatrix} \Phi^{(i)}(z) \\ J^{(i)}(z) \end{pmatrix}, \quad W^{(i)}(z) = \begin{pmatrix} w^{(i)}(z) \\ -D_1^{(i)} w^{(i)}(z) \end{pmatrix},$$

$$K^{(i)}(z, z_i) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} mX_i(z, z_i) & -\frac{1}{m} \operatorname{sh} mX_i(z, z_i) \\ -m \operatorname{sh} m\tilde{X}_i(z, z_i) & \operatorname{ch} m\tilde{X}_i(z, z_i) \end{pmatrix},$$

где $w^{(i)}(z)$ — некоторое частное решение уравнения (3) для i -го слоя, элементы матрицы K выражены через функции обобщенных степеней, для которых выполняются следующие дифференциальные свойства:

$$\begin{aligned} D_1 \operatorname{ch} mX(z, z_1) &= m \operatorname{sh} m\tilde{X}(z, z_1), & D_2 \operatorname{ch} m\tilde{X}(z, z_1) &= m \operatorname{sh} mX(z, z_1), \\ D_1 \operatorname{sh} mX(z, z_1) &= m \operatorname{ch} m\tilde{X}(z, z_1), & D_2 \operatorname{sh} m\tilde{X}(z, z_1) &= m \operatorname{ch} mX(z, z_1), \\ D_2 D_1 \operatorname{ch} mX(z, z_1) &= m^2 \operatorname{ch} mX(z, z_1), & D_2 D_1 \operatorname{sh} mX(z, z_1) &= m^2 \operatorname{sh} mX(z, z_1). \end{aligned}$$

Для точек i -го слоя справедливо соотношение

$$V^{(i)}(z) = L^{(i,1)}(z, z_1) V^{(1)}(z_1) + \sum_{j=1}^i L^{(i,j)}(z, z_j) \left(W^{(j-1)}(z_j) - W^{(j)}(z_j) \right) + W^{(i)}(z), \quad (4)$$

где

$$W^{(0)}(z_1) = 0, \quad L^{(i,j)}(z, z_j) = K^{(i)}(z, z_i) K^{(i-1)}(z_i, z_{i-1}) \dots K^{(j)}(z_{j+1}, z_j), \quad i \geq j.$$

Формула (4) дает аналитическое решение задачи Коши для уравнения (3) при произвольном конечном числе слоев.

Обозначив общую матрицу всей системы слоев через

$$K^{(u)}(z_{n+1}) = L^{(n,1)}(z_{n+1}, z_1)$$

и вектор дополнительных потоков через

$$W^{(u)}(z_{n+1}) = \sum_{j=1}^n L^{(n,j)}(z_{n+1}, z_j) \left(W^{(j-1)}(z_j) - W^{(j)}(z_j) \right) + W^{(n)}(z_{n+1}),$$

получим для конечной точки системы слоев

$$V(z_{n+1}) = K^{(u)}(z_{n+1}) V^{(1)}(z_1) + W^{(u)}(z_{n+1}). \quad (5)$$

Формула (5) связывает значения потенциала и потока в первой и последней точке системы слоев; таким образом, решение краевой задачи любого типа при любом конечном числе слоев сводится в общем случае к решению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Применяя данный метод для решения дифференциального уравнения (1), описывающего диффузию неравновесных ННЗ, генерированных широким электронным пучком в многослойной полупроводниковой мишени, получим, что $a_1^{(i)}(z)$ равно коэффициенту диффузии $D^{(i)}$ в i -м слое, а $a_2^{(i)}(z)$ равно времени жизни $\tau^{(i)}$ ННЗ в i -м слое, $m = 1$, а $\mu^{(i)}(z) = -\tau^{(i)} \rho^{(i)}(z)$, где $\rho^{(i)}(z)$ — плотность ННЗ, генерированных в полупроводнике в i -м слое. При постоянных коэффициентах уравнения на i -м слое матрица K принимает вид

$$K^{(i)}(z, z_i) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{z - z_i}{\sqrt{D^{(i)} \tau^{(i)}}} & -\sqrt{\frac{\tau^{(i)}}{D^{(i)}}} \operatorname{sh} \frac{z - z_i}{\sqrt{D^{(i)} \tau^{(i)}}} \\ -\sqrt{\frac{D^{(i)}}{\tau^{(i)}}} \operatorname{sh} \frac{z - z_i}{\sqrt{D^{(i)} \tau^{(i)}}} & \operatorname{ch} \frac{z - z_i}{\sqrt{D^{(i)} \tau^{(i)}}} \end{pmatrix}.$$

В [7] показано построение частного решения для уравнения диффузии ННЗ (1). В настоящих расчетах:

$$w^{(i)}(z) = K_1^{(i)} \exp \left(\frac{(z_{ms}^{(i)})^2}{4(L^{(i)})^2} \right) \left[\exp \left(\frac{z - z_{ms}^{(i)}}{L^{(i)}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{z}{z_{ms}^{(i)}} - 1 + \frac{z_{ms}^{(i)}}{2L^{(i)}} \right) - \right. \\ \left. - \exp \left(-\frac{z - z_{ms}^{(i)}}{L^{(i)}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{z}{z_{ms}^{(i)}} - 1 - \frac{z_{ms}^{(i)}}{2L^{(i)}} \right) \right] + \\ + K_2^{(i)} \exp \left(\frac{(z_{ss}^{(i)})^2}{4(L^{(i)})^2} \right) \left[\exp \left(\frac{z - z_{ss}^{(i)}}{L^{(i)}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{z}{z_{ss}^{(i)}} - 1 + \frac{z_{ss}^{(i)}}{2L^{(i)}} \right) - \right. \\ \left. - \exp \left(-\frac{z - z_{ss}^{(i)}}{L^{(i)}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{z}{z_{ss}^{(i)}} - 1 - \frac{z_{ss}^{(i)}}{2L^{(i)}} \right) \right],$$

где

$$K_1^{(i)} = -\frac{1,085(1 - \eta^{(i)})E_0L^{(i)}}{4D^{(i)}(1 - \eta^{(i)} + \eta^{(i)}\frac{z_{ss}^{(i)}}{z_{ms}^{(i)}})}, \quad K_2^{(i)} = -\frac{1,085z_{ss}^{(i)}E_0L^{(i)}\eta^{(i)}}{4D^{(i)}z_{ms}^{(i)}(1 - \eta^{(i)} + \eta^{(i)}\frac{z_{ss}^{(i)}}{z_{ms}^{(i)}})}.$$

4. Разностная схема второго порядка аппроксимации исходной модели. В уравнении (1) вместо кусочно постоянных коэффициентов (электрофизических параметров мишени) используются их аппроксимации, основанные на использовании тригонометрических выражений в виде рекурсивных функций (см. [1]). Для ступенчатой функции

$$f(z) = \begin{cases} H, & z \in (z_2, z_3), \\ 0, & z \notin (z_2, z_3), \end{cases}$$

в качестве начальной функции выбирается функция в виде

$$f_1(z) = \exp(1 - (az + b)^2) - 1.$$

Из условия $f_1(z_2) = f_1(z_3) = 0$ находим

$$a = \frac{2}{z_2 - z_3}, \quad b = \frac{z_2 + z_3}{z_3 - z_2}.$$

При этих значениях коэффициентов a и b последовательность

$$\left\{ f_n(z) \mid f_n(z) = \frac{H}{2}(1 + \sin(\phi_n(z))), \phi_n(z) = \frac{\pi}{2} \sin(\phi_{n-1}(z)), \phi_1(z) = \frac{\pi}{2} f_1(z), n - 1 \in \mathbb{N} \right\}$$

сходится к ступенчатой функции $f(z)$. Тогда, например, для трехслойной структуры ступенчатые функции $L(z)$ и $D(z)$ со значениями L_1, D_1 на промежутке $[0, z_1]$, L_2, D_2 на промежутке $[z_1, z_2]$ и L_3, D_3 на промежутке $[z_2, l]$ можно аппроксимировать суммой аналогичных последовательностей:

$$L_n(z) = \sum_{i=1}^3 \{f_n(z)\}_i, \quad D_n(z) = \sum_{i=1}^3 \{f_n(z)\}_i.$$

Аппроксимации являются непрерывными, и потому на границе слоев они в большей степени, чем ступенчатые функции, соответствуют зависимости значений реальных электрофизических параметров от координаты. Погрешность аппроксимации не накапливается, что является положительной стороной предложенного метода (см. [1]).

Найдено численное решение задачи (1), (2) с использованием аппроксимации ступенчатыми функциями

$$L_n(z) = \sum_{i=1}^m \{f_n(z)\}_i, \quad D_n(z) = \sum_{i=1}^m \{f_n(z)\}_i,$$

Рис. 1. Аппроксимация диффузионной длины ННЗ по глубине многослойной планарной полупроводниковой структуры, основанная на использовании тригонометрических выражений в виде четырех (штриховая линия) и десяти (штрих-пунктирная линия) рекурсивных функций

входящих в уравнение (1), и проведены практические расчеты распределений ННЗ, генерированных широким электронным пучком в трехслойном и четырехслойном полупроводниковом материале.

Для дифференциальной задачи (1), (2) с использованием аппроксимации ступенчатых функций построена разностная схема второго порядка аппроксимации на равномерной сетке $\bar{D}_h = \{z_i = ih, i = 0, \dots, N, h = l/N\}$:

$$\begin{aligned} \Delta p_{i-1} - \left(\frac{h^2}{L_{n_i}^2} + 1 + \frac{D_{n_{i+1}}}{D_{n_i}} \right) \Delta p_i + \frac{D_{n_{i+1}}}{D_{n_i}} \Delta p_{i+1} &= -\frac{h^2 \rho_i}{D_{n_i}}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ \left(1 + \frac{h^2}{2L_1^2} + \frac{S_1}{L_1} h \right) \Delta p_0 - \Delta p_1 &= \frac{\tau_1 h^2 \rho_0}{2L_1^2}, \quad \left(1 + \frac{h^2}{2L_n^2} + \frac{S_n}{L_n} h \right) \Delta p_N - \Delta p_{N-1} = \frac{\tau_n h^2 \rho_N}{2L_n^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь Δp_i — приближенное значение точного решения $\Delta p(z_i)$, $L_{n_i}^2 = L_n^2(z_i)$, $D_{n_i} = D_n(z_i)$, $\rho_i = \rho(z_i)$.

Решение системы (6) производилось методом прогонки.

5. Результаты расчетов. Расчеты проведены с помощью математических пакетов Matlab (MathWorks, Inc.) и Maple.

На рис. 1, 2(а) представлены результаты расчетов, проведенных для параметров, характерных для полупроводниковой структуры Si-Ge-Si. Используются следующие значения параметров: $L_1 = 0,5$ мкм, $\tau_1 = 5 \cdot 10^{-9}$ с, $S_1 = 50$ для первого материала; $L_2 = 1$ мкм, $\tau_2 = 10^{-8}$ с для второго материала; $L_3 = 0,6$ мкм, $\tau_3 = 3,6 \cdot 10^{-8}$ с, $S_3 = 50$ для третьего материала (подложки). Значение $z_1 = 1$ мкм, $z_2 = 2$ мкм. Энергия электронного пучка равна $E_0 = 20$ кэВ.

Оценка относительной погрешности по норме пространства C :

$$\Delta_1(\Delta p(z_i), \Delta p_i) = \frac{\|\Delta p(z_i) - \Delta p_i\|_C}{\|\Delta p(z_i)\|_C} \cdot 100\% \approx 2,32\%.$$

Рис. 2. Распределение ННЗ в полупроводниковой структуре Si-Ge-Si (рис. 2(a)) и Si-Ge-Si-Ge (рис. 2(b)). Сплошная линия — аналитическое решение уравнения (1), полученное матричным методом, кружки — численным методом

На рис. 2(b) представлены результаты расчетов, проведенных для параметров, характерных для полупроводниковой структуры Si-Ge-Si-Ge. Использованы следующие значения параметров: $L_1 = 0,5$ мкм, $\tau_1 = 5 \cdot 10^{-9}$ с, $S_1 = 50$ для первого материала; $L_2 = 1$ мкм, $\tau_2 = 10^{-8}$ с для второго материала; $L_3 = 0,6$ мкм, $\tau_3 = 3,6 \cdot 10^{-8}$ с для третьего материала; $L_4 = 0,8$ мкм, $\tau_4 = 2 \cdot 10^{-8}$ с, $S_4 = 50$ для четвертого материала (подложки). Значение $z_1 = 1$ мкм, $z_2 = 2$ мкм, $z_3 = 3$ мкм. Энергия электронного пучка равна $E_0 = 20$ кэВ.

Оценка относительной погрешности по норме пространства C :

$$\Delta_2(\Delta p(z_i), \Delta p_i) = \frac{\|\Delta p(z_i) - \Delta p_i\|_C}{\|\Delta p(z_i)\|_C} \cdot 100\% \approx 2,8\%.$$

Численное решение рассчитано на сетке из 150 ячеек с шагом $h = 0,0267$ мкм и с использованием десяти рекурсивных функций. Погрешность результатов является невысокой, что говорит о хорошей сходимости используемой аппроксимирующей процедуры.

Затраты машинного времени на расчет распределения ННЗ матричным методом составили около 2 с в программе Maple 18.00 (Windows 7, Service Pack 1, процессор Intel® Core™ i3-370M, 2,40 ГГц, оперативная память 4 Гб DDR3). Затраты на вычисление численным методом составили 8 с в системе MATLAB версии 7.5.0.342 на персональном компьютере со следующими характеристиками: процессор Intel Pentium E5400 ($2 \times 2,70$ ГГц, 2 Мб cache), объем оперативной памяти 2 Гб, что говорит о вычислительной эффективности предложенного матричного метода для решения данного класса задач.

6. Заключение. В работе представлены некоторые возможности применения аналитического матричного метода для моделирования распределения ННЗ в трехслойном и четырехслойном полупроводниковом материале. Проведено сравнение результатов расчета матричным методом и методом конечных разностей. Показана эффективность матричного метода для решения стационарных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алюков С. В. Аппроксимация ступенчатых функций в задачах математического моделирования // Мат. модел. — 2011. — 23, № 3. — С. 75–88.

2. Амрастанов А. Н., Гинзгеймер С. А., Степович М. А., Филиппов М. Н. Об одной возможности математического моделирования теплового воздействия остро сфокусированного электронного пучка на однородный полупроводник// Изв. РАН. Сер. физ. — 2016. — 80, № 10. — С. 1448–1452.
3. Амрастанов А. Н., Кузин А. Ю., Митюхляев В. Б., Серегина Е. В., Степович М. А., Тодуа П. А., Филиппов М. Н. Тепловое воздействие электронного зонда при рентгеноспектральном нанонализе// Измерит. техн. — 2017. — № 6. — С. 13–15.
4. Белов А. А., Петров В. И., Степович М. А. Использование модели независимых источников для расчета распределения неосновных носителей заряда, генерированных в полупроводниковом материале электронным пучком// Изв. РАН. Сер. физ. — 2002. — 66, № 9. — С. 1317–1322.
5. Гладышев Ю. А. Метод обобщенных степеней Берса и его приложение в математической физике. — Калуга: КГУ им. К. Э. Циолковского, 2011.
6. Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Серегина Е. В., Степович М. А. О возможности совместного применения матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процесса теплопереноса в объектах, обладающих цилиндрической симметрией// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Ядерно-реакторные константы. — 2018. — № 3. — С. 158–167.
7. Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А. Матричный метод моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале// Междунар. конф. «Современные проблемы математического моделирования, обработки изображений и параллельных вычислений». — Ростов-на-Дону, 2017. — С. 85–93.
8. Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А. О возможности приложения аппарата Берса к моделированию процессов тепломассопереноса, обусловленного электромагнитным излучением, в планарной многослойной среде// XXIV Междунар. науч.-техн. конф. по фотоэлектронике и приборам ночного видения (Москва, НПО «Орион», 24–27 мая 2016). — М.: НПО «Орион», 2016. — С. 471–474.
9. Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А. О возможности приложения аппарата Берса к моделированию процессов тепломассопереноса, обусловленного электронами в планарной многослойной среде// Поверхность. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2017. — № 10. — С. 105–110.
10. Калманович В. В. О построении решений задач теории переноса в многослойной среде при наличии распределенных источников// VIII Междунар. конф. «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» (Воронеж, 2015). — Воронеж, 2015. — С. 166–169.
11. Калманович В. В., Степович М. А. О совместном применении матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процессов тепломассопереноса в полупроводниковых материалах электронной техники// в кн.: Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем./ под общ. ред. акад. РАН А. Л. Стемпковского. — М.: ИППМ РАН, 2018. — С. 194–201.
12. Макаренко А. М., Серегина Е. В., Степович М. А. Проекционный метод Галеркина решения стационарного дифференциального уравнения диффузии в полубесконечной области// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — 57, № 5. — С. 801–813.
13. Михеев Н. Н., Петров В. И., Степович М. А. Количественный анализ материалов полупроводниковой оптоэлектроники методами растровой электронной микроскопии// Изв. РАН. Сер. физ. — 1991. — 55, № 8. — С. 1474–1482.
14. Михеев Н. Н., Степович М. А. Распределение энергетических потерь при взаимодействии электронного зонда с веществом// Завод. лаб. Диагн. мат. — 1996. — 62, № 4. — С. 20–25.
15. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.
16. Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренко А. М. Анализ трехмерной модели диффузии неосновных носителей заряда, генерированных электронным зондом в однородном полупроводниковом материале, с использованием проекционных методов// Поверхность. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2018. — № 1. — С. 93–100.
17. Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренко А. М., Филиппов М. Н. О возможности использования проекционного метода Галеркина для моделирования пространственного распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным зондом в полупроводнике// Поверхность. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2017. — № 9. — С. 91–97.
18. Снопина М. Г., Бурьлова И. В., Петров В. И., Степович М. А. Анализ модели распределений неосновных носителей заряда, генерированных в трехслойной полупроводниковой структуре широким электронным пучком// Поверхность. Рентген. синхротрон. нейтрон. исслед. — 2007. — № 7. — С. 1–6.

19. *Степович М. А., Снопова М. Г., Хохлов А. Г.* Использование модели независимых источников для расчета распределения неосновных носителей заряда, генерированных в двухслойном полупроводнике электронным пучком// Прикл. физ. — 2004. — № 3. — С. 61–65.
20. *Bers L., Gelbart A.* On a class of functions defined by partial differential equations// Trans. Am. Math. Soc. — 1944. — 56. — P. 67–93.
21. *Burylova I. V., Petrov V. I., Snopova M. G., Stepovich M. A.* Mathematical simulation of distribution of minority charge carriers, generated in multy-layer semiconducting structure by a wide electron beam// Физ. техн. полупровод. — 2007. — 41, № 4. — P. 458–461.
22. *Stepovich M. A., Amrastanov A. N., Seregina E. V., Filippov M. N.* On one peculiarity of the model describing the interaction of the electron beam with the semiconductor surface// J. Phys. Conf. Ser. — 2018. — 955. — 012040.
23. *Stepovich M. A., Khokhlov A. G., Snopova M. G.* Model of independent sources used for calculation of distribution of minority charge carriers generated in two-layer semiconductor by electron beam// Proc. SPIE. — 2004. — 5398. — P. 159–165.

Серегина Елена Владимировна

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет), Калужский филиал

E-mail: evfs@yandex.ru

Калманович Вероника Валерьевна

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

E-mail: v572264@yandex.ru

Степович Михаил Адольфович

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

E-mail: m.stepovich@rambler.ru