Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Стенюхин, Анализ существования особых решений задачи капиллярности, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 172, 113–118

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-172-113-118>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:20:41

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 172 (2019). С. 113–118
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-113-118

УДК 517.95

АНАЛИЗ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОСОБЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КАПИЛЛЯРНОСТИ

© 2019 г. Л. В. СТЕНЮХИН

Аннотация. Исследуется существование решений капиллярного уравнения при воздействии внешнего потенциала, приводящего к перестройкам поверхности.

Ключевые слова: задача капиллярности, число Бонда, бифуркация, особое решение.

ANALYSIS OF THE EXISTENCE OF SPECIAL SOLUTIONS TO THE CAPILLARITY PROBLEM

© 2019 L. V. STENYUKHIN

ABSTRACT. This paper is devoted to the study of the existence of solutions of the capillary equation under the influence of an external potential leading to surface surgery.

Keywords and phrases: capillarity problem, Bond number, bifurcation, special solution.

AMS Subject Classification: 35R01

1. Постановка задачи и комментарии к предмету исследования. Равновесные устойчивые и неустойчивые формы капель и капиллярных трубок исследовались в [2, 6, 7, 9, 10]. Функции, задающие эти формы, являются решениями уравнения капиллярности и обычно ищутся итерационными методами в виде рядов. Однако если размеры форм достаточно большие либо фирмы подвергаются воздействию потенциала, то нарушается сходимость итераций или полученные решения начинают противоречить физическим экспериментам (см. [9]). Разрешимость уравнения капиллярности в классах обобщенных функций была доказана Н. Н. Уральцевой (см. [8]).

Капиллярное уравнение возникает из вариационного принципа минимизации энергетического функционала, состоящего из энергии поверхностного натяжения, потенциальной энергии силы тяжести и энергии объемных связей. Энергия поверхностного натяжения определяется функционалом площади, исследованию которого посвящены работы [1, 2, 7]. Экстремали функционала площади определяют минимизацию энергии поверхностного натяжения.

Настоящая работа посвящена исследованию существования решений капиллярного уравнения при воздействии внешнего потенциала, приводящего к перестройкам поверхности. Вариационный принцип в банаховых и гильбертовых пространствах и операторный подход (см. [3, 4]) позволяют находить такие решения, критические значения параметров и соответствующие формы капель и трубок.

Рассмотрим связную каплю жидкости заданного объема V , лежащую на горизонтальной плоскости Π в поле силы тяжести, направленном вертикально вниз. Предположим, что материал жидкости однороден, так что угол контакта жидкости с плоскостью γ постоянен, $0 \leq \gamma \leq \pi$. Как показано в [10], при этих условиях равновесная поверхность будет поверхностью вращения с осью перпендикулярной плоскости Π .

Задача о малой капле, лежащей на поверхности, является следствием минимизации следующих энергий:

- (1) энергии поверхностного натяжения;
- (2) потенциальной энергии силы тяжести;
- (3) энергии объемных связей (постоянства объема V).

Полная энергия определяется функционалом

$$E(u) = \int_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dx + \frac{1}{\sigma} \int_{\Omega} \Upsilon \rho u dx + \lambda \int_{\Omega} u dx,$$

где E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, σ — поверхностное натяжение, Υ — потенциальная энергия на единицу массы, ρ — плотность, λ — множитель Лагранжа, отвечающий за объем.

В точках верхней части свободной поверхности P капли высота $u(x, y)$ поверхности P над Π удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} Tu = \chi u + \lambda, \quad (1)$$

где

$$Tu = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \nabla u, \quad \nabla u = (u_x, u_y),$$

$\chi = \rho g / \sigma$. Для нижней части свободной поверхности знак $\operatorname{div} Tu$ надо изменить на противоположный. Граничное условие задачи с постоянным углом контакта γ имеет вид

$$\mathbf{n} Tu = \cos \gamma, \quad (2)$$

$\mathbf{n}$ — единичная нормаль.

Замена $u = -v - (1/\chi)\lambda$ переводит уравнение (1) в уравнение

$$\operatorname{div} Tv = \chi v, \quad (3)$$

которое является уравнением свободной поверхности в капиллярной трубке. Каждому уравнению (1) с высотой капли в центре u_0 соответствует решение уравнения (3) с высотой подъема жидкости в центре $v_0 = -(u_0 + \lambda/\chi)$. В [9] показано, что симметричные решения уравнения (3) однозначно определяются высотой подъема жидкости в центре. Поэтому каждой симметрично лежащей капле отвечает единственная капиллярная поверхность, которая (локально) геометрически конгруэнтна границе капли. Обратно, каждой симметричной капиллярной поверхности соответствует лежащая капля, определенная с точностью до аддитивной константы.

Множество всех симметричных капиллярных поверхностей является однопараметрическим семейством с параметром центральной высоты u_0 поверхности. Из принципа соответствия вытекает, что множество всех симметрично лежащих капель может быть описано с помощью однопараметрического семейства кривых.

С учетом вышеизложенного, уравнение (1) можно записать в безразмерной форме

$$\operatorname{div} Tu = Bu, \quad (4)$$

B — число Бонда, характеризующее размер конфигурации: $B = \rho g a^2 / \sigma$. Граничное условие (2) сохраняется.

2. Частные случаи существования особых решений. В [9] показано, что для симметрично лежащей капли, $0 < \gamma < \pi/2$ и малого числа Бонда B уравнение (4) можно записать в виде

$$\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = Bu - 2 \sin \gamma_0. \quad (5)$$

Решение ищется на круге Ω , $u = 0$ на $\partial\Omega$, и капля постоянного объема V_0 . Если капля подвергается воздействию внешнего потенциала φ , то

$$V_0 = \frac{\pi(2 + \cos \gamma_0)(1 - \cos \gamma_0)^2}{3 \sin^3 \gamma_0}, \quad (6)$$

$$\cos \gamma_0 = \cos \gamma + \frac{\varphi}{\sigma}. \quad (7)$$

Потенциал φ может быть, например, температурой вещества капли или давлением, воздействующим изнутри капли, либо температурой и давлением одновременно. Действие потенциала приводит к изменению формы капли, в частности, к изменению угла контакта с плоскостью Π (см. (7)). При этом γ_0 является единственным решением уравнения (6). Дальнейшее воздействие потенциала φ приведет к изменению числа Бонда B и к перестройке (бифуркации) самой капли.

Для описания дальнейших состояний капли положим $B = 0$ в уравнении (5).

Теорема 1. *При сделанных выше предположениях и $B = 0$ существует точное решение уравнения (5):*

$$u_0 = \frac{-\cos \gamma_0 + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma_0}}{\sin \gamma_0}. \quad (8)$$

Решение (8) проверяется непосредственной проверкой. Это решение послужит отправной точкой для отыскания дальнейших состояний капли, подверженной воздействию потенциала φ .

Для ненулевых чисел B положим, что решение уравнения (5) примет вид

$$u = \frac{-\cos \gamma_0 + \sqrt{1 - (r - r_0)^2 \sin^2 \gamma_0}}{\sin \gamma_0}, \quad (9)$$

r_0 — радиус кольца по центру, $|r - r_0| \leq 1$.

Непосредственным вычислением получим, что функция (9) является точным решением уравнения

$$\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = \frac{r_0 \sin \gamma_0}{r} - 2 \sin \gamma_0 \quad (10)$$

с нулевым граничным условием.

Найдем условия, при которых задача (10) эквивалентна задаче (5). Для этого положим

$$Bu = \frac{r_0 \sin \gamma_0}{r},$$

т.е.

$$\frac{-\cos \gamma_0 + \sqrt{1 - (r - r_0)^2 \sin^2 \gamma_0}}{\sin \gamma_0} = \frac{r_0 \sin \gamma_0}{Br}.$$

Последнее уравнение преобразуется к виду

$$\left(1 + \frac{\sin^2 \gamma_0}{B^2 r^2}\right) r_0^2 - 2 \left(r - \frac{\cos \gamma_0}{Br}\right) r_0 + r^2 - 1 = 0. \quad (11)$$

Разрешим уравнение (11) относительно r_0 , как гарант кольцеобразного состояния:

$$D_1 = \left(\frac{\cos \gamma_0}{B} - 1\right)^2 + \frac{1 - r^2}{B^2 r^2}. \quad (12)$$

В решении (8) безразмерного уравнения (5) полярная координата r меняется в пределах $0 \leq r \leq 1$; значит, с увеличением потенциала φ у деформированной капли значение $r = 1$ тоже существует. Равенство нулю выражения (12) для $r = 1$ порождает условие

$$B = \cos \gamma_0. \quad (13)$$

Таким образом, получается следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполнено условие (13), то существует точное аналитическое решение задачи (5) типа (9) с граничным условием (2).*

3. Редукция задачи из функционала площади. Рассмотрим основной энергетический функционал задачи

$$E(u) = \int_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dx + \frac{1}{\sigma} \int_{\Omega} \Upsilon \rho u dx + \lambda \int_{\Omega} u dx. \quad (14)$$

Его первое слагаемое является функционалом площади. Пусть u_0 — экстремаль функционала (14). Близкие к u_0 поверхности будем задавать в системе координат нормального расслоения к u_0 . Это приведет к одному скалярному уравнению для близкой поверхности:

$$\left(\frac{\delta S}{\delta u}(u_0 + \eta \bar{n}), \bar{n} \right) = 0,$$

или

$$\frac{\delta S}{\delta \eta}(\eta) = 0, \quad (15)$$

где $\delta S/\delta u$ — функциональная производная функционала площади, $\bar{n}$ — нормаль к поверхности u_0 . Из уравнения (15) определяется нормальная координата $\eta = \eta(x, y)$.

Теорема 3. *Функционал площади близких к u_0 поверхностей $S(\eta)$ и его оператор Эйлера $\delta S/\delta \eta(\eta)$ имеет следующую аналитическую структуру:*

$$S(u) = \int_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dx dy,$$

$$\frac{\delta S}{\delta u}(\eta) = E^3(EG - F^2)^{-3/2} (A\eta_{xx} - 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + G).$$

Здесь E, G, F — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности,

$$A = \sum_{p=1}^6 a_{ijk} \eta_x^i \eta_x^j \eta^k + 1, \quad B = \sum_{p=1}^6 b_{ijk} \eta_x^i \eta_y^j \eta^k, \quad C = \sum_{p=1}^6 c_{ijk} \eta_y^i \eta_y^j \eta^k + 1,$$

$$G = \sum_{p=2}^7 g_{ijk} \eta_x^i \eta_y^j \eta^k + g\eta,$$

где i, j, k — целые неотрицательные числа, $p = i + j + k$. Все коэффициенты $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}, g_{ijk}, g$ являются аналитическими функциями и находятся по формулам, подобным следующей:

$$g = (\bar{n}, \bar{n}_{xx} + \bar{n}_{yy}) + \frac{4}{E} \left[(\bar{n}, u_{xx})^2 + (\bar{n}, u_{yy})^2 \right]. \quad (16)$$

Линейная часть оператора $A\eta_{xx} - 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + G$ равна $\Delta\eta + g\eta$, где Δ — лапласиан. Первая вариация функционала энергии (14) равна

$$\frac{\delta E}{\delta \eta}(\eta) = \frac{\delta S}{\delta \eta}(\eta) + \left(\frac{\Upsilon \rho}{\sigma} + \lambda \right) \eta = E^3(EG - F^2)^{-3/2} (A\eta_{xx} - 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + G) + \left(\frac{\Upsilon \rho}{\sigma} + \lambda \right) \eta.$$

Линейная часть первой вариации равна

$$L\eta = E^3(EG - F^2)^{-3/2} (\Delta\eta + g\eta) + \left(\frac{\Upsilon \rho}{\sigma} + \lambda \right) \eta,$$

где величина g определена равенством (16). Выражение $\Upsilon \rho/\sigma$ определяет число Бонда, $B = \Upsilon \rho/\sigma$. Поэтому линеаризованная задача имеет вид

$$\Delta\eta + \left(g + E^{-3}(EG - F^2)^{3/2}(B + \lambda) \right) \eta = 0, \quad \eta|_{\partial\Omega} = 0. \quad (17)$$

Линейный оператор (17) действует из $W_2^2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и самосопряжен в $\dot{W}_2^2(\Omega)$ относительно скалярного произведения в $L_2(\Omega)$.

Приведем пример из п. 2. Функция (8) является решением задачи (5)–(7) при нулевых чисел Бонда. Задача (17) в данном случае имеет вид

$$\Delta\eta = \left(\frac{\sqrt{(1 - (x^2 + y^2) \sin^2 \gamma_0)^3}}{(1 - y^2 \sin^2 \gamma_0)^3} B - g \right) \eta + \left(\frac{\sqrt{(1 - (x^2 + y^2) \sin^2 \gamma_0)^3}}{(1 - y^2 \sin^2 \gamma_0)^3} \right) \lambda \eta, \quad (18)$$

где

$$g = \frac{\sin^4 \gamma_0 (3x^2 + 3y^2 - 3x^2 y^2 \sin^2 \gamma_0 + 3x^3 y \sin^2 \gamma_0 + y(x + y)(1 - (x^2 + y^2) \sin^2 \gamma_0))}{(1 - (x^2 + y^2) \sin^2 \gamma_0)^5} + \frac{4 \sin^2 \gamma_0 (1 + (1 - (x^2 + y^2) \sin^2 \gamma_0)^2)}{(1 - y^2 \sin^2 \gamma_0)(1 - (x^2 + y^2) \sin^2 \gamma_0)^2},$$

и $\eta|_{\partial\Omega} = 0$. Здесь Ω — единичный двумерный диск.

На малом диске $\Omega_\varepsilon = \{x^2 + y^2 \leq \varepsilon\}$ около центра области Ω имеем $g = 8 \sin^2 \gamma_0 + o(x, y)$, и задача (18) соответствует задаче

$$\Delta\eta = (B - 8 \sin^2 \gamma_0 + \lambda)\eta, \quad \eta|_{\partial\Omega_\varepsilon} = 0.$$

В результате получается следующая теорема.

Теорема 4. Если $B - 8 \sin^2 \gamma_0 = \mu_n$, μ_n — собственное значение лапласиана Δ на области Ω_ε , то капиллярная поверхность вблизи начала координат задается функцией

$$u_n = u_0 + \varepsilon \eta_n,$$

где u_0 — функция (8), η_n — собственная функция, отвечающая собственному значению μ_n .

4. Задача капиллярности в конформных координатах. Пусть поверхность капли $u(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y))$ задана в конформных координатах, $E = G$, $F = 0$. Тогда функция $u(x, y)$ удовлетворяет условиям $u_x^2 = u_y^2$, $u_x u_y = 0$. В этом случае функционал энергии имеет вид

$$E(u) = \int_{\Omega} \frac{E + G}{2} dx + \int_{\Omega} B u dx + \lambda \int_{\Omega} u dx.$$

Первая вариация функционала равна

$$\frac{\delta E}{\delta u}(\eta) = \Delta\eta + (B + \lambda)\eta.$$

Получаем задачу

$$\Delta\eta + (B + \lambda)\eta = 0, \quad \eta|_{\partial\Omega} = 0. \quad (19)$$

Теорема 5. Собственные значения оператора $\Delta + B + \lambda$ задачи (19) равны $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n + B + \lambda$, где λ_n — собственные значения оператора Δ с нулевым граничным условием.

Таким образом, переход к конформным координатам упрощает нахождение спектра и собственных функций оператора капиллярности. Поверхность (8) стереографически спроектируем на $\mathbb{R}^2$. Пусть $\tilde{u}_0(r)$ — соответствующая функция после проектирования,

$$\tilde{u}_0(r) = \frac{u_0(0)r}{u_0(0) - u_0(r)}, \quad u_0(r) = \frac{-\cos \gamma_0 + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \gamma_0}}{\sin \gamma_0},$$

$\tilde{\eta}_n$ — собственные функции для $\tilde{\lambda}_n$ оператора задачи (19). Тогда возмущения вида $\tilde{u}_n(r) = \tilde{u}_0(r) + \varepsilon \tilde{\eta}_n(r)$ порождают совокупность капиллярных поверхностей

$$u_n(r) = u_0(0) \frac{\tilde{u}_n(r) - r}{\tilde{u}_n(r)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисович А. Ю.* Оператор Плато и бифуркации двумерных минимальных поверхностей// в кн.: Глобальный анализ и математическая физика. — Воронеж, 1987. — С. 142–155.
2. *Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т.* Минимальные поверхности и проблема Плато. — М.: Наука, 1987.
3. *Даринский Б. М., Сапронов Ю. И., Царев С. Л.* Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Совр. мат. Фундам. направл. — 2004. — 12. — С. 3–140.
4. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1987.
5. *Стенюхин Л. В.* О минимальных поверхностях с ограничениями типа неравенств// Изв. вузов. Мат. — 2012. — 11. — С. 51–59.
6. *Стенюхин Л. В.* Об особых решениях задачи капиллярности с круговой симметрией// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2013. — 2. — С. 242–245.
7. *Стенюхин Л. В.* Бифуркационный анализ задачи капиллярности с круговой симметрией// Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. модел. програм. — 2014. — 7, № 2. — С. 77–83.
8. *Уральцева Н. Н.* Решение задачи капиллярности// Вестн. ЛГУ — 1973. — 19. — С. 54–64.
9. *Финн Р.* Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. — М.: Мир, 1989.
10. *Wente H. C.* The symmetry of sessile and pendent drops// Pac. J. Math. — 1980. — 88, № 2. — P. 387–397.

Стенюхин Леонид Витальевич
Воронежский государственный университет
E-mail: stenyuhin@mail.ru