Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Корнев, А. П. Хромов, Классическое решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 172, 119–133

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-172-119-133>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 16:27:23

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 172 (2019). С. 119–133
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-119-133

УДК 517.95, 517.984

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ

© 2019 г. В. В. КОРНЕВ, А. П. ХРОМОВ

Аннотация. При помощи метода Фурье найдены необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом и закрепленными концами и получено явное представление решения в виде быстро сходящегося ряда.

Ключевые слова: смешанная задача, волновое уравнение, суммируемый потенциал, метод Фурье.

CLASSICAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR A HOMOGENEOUS WAVE EQUATION WITH FIXED ENDPOINTS

© 2019 V. V. KORNEV, A. P. KHROMOV

ABSTRACT. Using the Fourier method, we obtain necessary and sufficient conditions for the existence of a classical solution of the mixed problem for a homogeneous wave equation with summable potential and fixed endpoints and also obtain an explicit representation of the solution in the form of a rapidly converging series.

Keywords and phrases: mixed task, wave equation, summable potential, Fourier method.

AMS Subject Classification: 34B45, 35L05

В статье будет рассмотрена следующая задача:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = 0. \quad (3)$$

Считаем, что $q(x)$, $\varphi(x)$ — комплекснозначные функции, причем $q(x) \in L[0, 1]$. В [1] получены условия на $\varphi(x)$, достаточные для существования классического решения по методу Фурье задачи (1)–(3) (уравнение (1) удовлетворяется почти всюду). Эти условия таковы: $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и

$$L\varphi = -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) \in L_p[0, 1], \quad p > 1. \quad (4)$$

Эти условия, кроме условия (4), являются необходимыми для классического решения. В этой статье мы убираем условие (4). Тем самым получаем необходимые и достаточные условия для

существования классического решения задачи (1)–(3). Настоящая работа является развитием направления, содержащегося в [2–4].

1. Единственность классического решения. В этом разделе рассмотрим вопрос о единственности решения для более общего случая. Именно, займемся следующей задачей:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t) + f(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad (7)$$

где все функции, входящие в (5)–(7), комплекснозначные, причем $q(x) \in L[0, 1]$, $f(x, t) \in L(Q_T)$ при любых $T > 0$; здесь $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$.

Под классическим решением понимаем функцию $u(x, t)$, непрерывную вместе с $u'_x(x, t)$ и $u'_t(x, t)$, причем $u'_x(x, t)$ и $u'_t(x, t)$ абсолютно непрерывны по x (по t), удовлетворяющую условиям (6), (7) и почти всюду по x и t уравнению (5). Поэтому в случае классического решения необходимо считать, что $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ и $\psi(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $\varphi''(x) \in L[0, 1]$, $\psi'(x) \in L[0, 1]$.

Теорема 1. Если $u(x, t)$ классическое решение задачи (5)–(7), причем дополнительно $\partial^2 u(x, t)/\partial t^2 \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$, то оно единственно и находится по формуле

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left[(R_\lambda \varphi) \cos \rho t + (R_\lambda \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} + \int_0^t R_\lambda (f(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right] d\lambda, \quad (8)$$

в которой ряд справа при любом фиксированном $t \geq 0$ сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$.

Здесь $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L : $Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$, $y(0) = y(1) = 0$ (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор). $R_\lambda(f(\cdot, \tau))$ означает, что R_λ применяется к $f(x, \tau)$ по x , $\lambda = \rho^2$, $\Re \rho \geq 0$, γ_n — образ в λ -плоскости окружности $\tilde{\gamma}_n = \{\rho \mid |\rho - n\pi| = \delta\}$, $\delta > 0$ достаточно мало, r достаточно велико и фиксировано, n_0 — такой номер, что при $n \geq n_0$ внутри γ_n находится по одному собственному значению оператора L и все γ_n при $n \geq n_0$ находятся вне окружности $|\lambda| = r$.

Доказательство теоремы 1. При фиксированном t $u(x, t)$ как функция x принадлежит области определения оператора L . Поэтому по теореме о разложении по собственным и присоединенным функциям оператора L имеем

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) R_\lambda(u(\cdot, t)) d\lambda, \quad (9)$$

и ряд (9) сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$. Положим $R_\lambda u(\cdot, t) = y(x, t, \lambda)$. Тогда

$$Ly = LR_\lambda u = (L - \lambda E + \lambda E)R_\lambda u = u(x, t) + \lambda R_\lambda u = u(x, t) + \lambda y(x, t, \lambda).$$

Привлекая функцию Грина (ядро интегрального оператора R_λ), находим

$$y(x, t, \lambda) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) u(\xi, t) d\xi \implies y'_t(x, t, \lambda) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) u'_t(\xi, t) d\xi. \quad (10)$$

Поскольку $u(x, t)$ есть классическое решение задачи (5)–(7), то

$$R_\lambda u''_{tt} = -R_\lambda(Lu) + R_\lambda f(\cdot, t). \quad (11)$$

Из (10) получаем

$$y'_t(x, t, \lambda) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) u'_t(\xi, 0) d\xi + \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) d\xi \int_0^t u''_{tt}(\xi, \tau) d\tau.$$

Но $G(x, \xi, \lambda) u''_{tt}(\xi, \tau) \in L[Q_T]$ по переменным ξ и τ ; поэтому согласно теореме Фубини имеем

$$\int_0^1 G(x, \xi, \lambda) u''_{tt}(\xi, \tau) d\xi \in L[0, T]$$

по τ . Значит,

$$y'_t(x, t, \lambda) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) u'_t(\xi, 0) d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) u''_{tt}(\xi, \tau) d\xi.$$

Отсюда следует, что $y'_t(x, t, \lambda)$ абсолютно непрерывна по t и

$$y''_{tt}(x, t, \lambda) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) u''_{tt}(\xi, t) d\xi$$

почти при всех t . Из этой формулы в силу (11) имеем

$$y''_{tt}(x, t, \lambda) = R_\lambda u''_{tt} = R_\lambda(-Lu + f).$$

Но $R_\lambda(L - \lambda E + \lambda E)u = u(x, t) + \lambda R_\lambda u = u(x, t) + \lambda y(x, t, \lambda)$; следовательно,

$$y''_{tt}(x, t, \lambda) = -u(x, t) - \lambda y(x, t, \lambda) + R_\lambda f(\cdot, t),$$

или

$$y''_{tt}(x, t, \lambda) + \lambda y(x, t, \lambda) = -u(x, t) + R_\lambda f(\cdot, t). \quad (12)$$

Кроме того,

$$y(x, 0, \lambda) = R_\lambda \varphi, \quad y'_t(x, 0) = R_\lambda \psi. \quad (13)$$

Из общего решения уравнение (12) при начальных условиях из (13) получаем

$$y(x, t, \lambda) = (R_\lambda \varphi) \cos \rho t + (R_\lambda \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} + \int_0^t \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} \left[-u(x, \tau) + R_\lambda f(\cdot, \tau) \right] d\tau.$$

Теперь, в силу того факта, что

$$\int_0^t \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} u(x, \tau) d\tau$$

является целой функцией по λ , из (9) получаем (8). $\square$

Формула (8) является формулой формального решения задачи (5)–(7) по методу Фурье (схожие с (8) формулы имеются в [5]–[6]).

2. Преобразование формального решения по методу Фурье. Рассмотрим сначала следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0, \quad (14)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (15)$$

$$u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0. \quad (16)$$

Теорема 2. Если $f(x, t) \in L[Q_T]$, то ряд (8) формального решения задачи (14)–(16) по методу Фурье сходится при всех x и t , и его сумма есть

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta, \tau) d\eta, \quad (17)$$

где функция $\tilde{f}(\eta, \tau)$ нечетна и 2-периодична по η , причем $\tilde{f}(\eta, \tau) = f(\eta, \tau)$ при $\eta \in [0, 1]$.

Эта теорема доказана в [7] для $f(x, t) \in L_2[Q_T]$ и в [8] для $f(x, t) \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$.

Замечание 1. Правая часть (17) имеет смысл при всех $x, t \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty]$.

Пусть $u(x, t)$ — классическое решение задачи (1)–(3) с условием $\partial^2 u(x, t)/\partial t^2 \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$. Тогда $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. По теореме 1 имеет место формула

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda, \quad (18)$$

и ряд (18) при каждом $t \geq 0$ сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$. Представим ряд (18) в виде

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t), \quad (19)$$

где $u_0(x, t)$ — ряд (18), в котором R_λ заменено на R_λ° , $u_1(x, t)$ — ряд (18), в котором R_λ заменено на $R_\lambda - R_\lambda^\circ$, $R_\lambda^\circ = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ и L_0 равно L при $q(x) = 0$.

Лемма 1. Сумма ряда $u_0(x, t)$ равна $a_0(x, t)$, где $a_0(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)]$, где $\tilde{\varphi}(x)$ нечетна и 2-периодична по $x \in (-\infty, +\infty)$ и $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0, 1]$. Ряд $u_1(x, t)$ сходится при каждом t абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$.

Доказательство. По теореме вычетов ряд $u_0(x, t)$ есть

$$u_0(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x \cos n\pi t,$$

где $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Отсюда следует, что

$$u_0(x, t) = \sum_+ + \sum_-, \quad \text{где} \quad \sum_{\pm} = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi(x \pm t).$$

Поскольку $u(x, t)$ — классическое решение, в силу необходимых условий на $\varphi(x)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x$$

сходится абсолютно и равномерно по x на всей оси, и его сумма есть $\frac{1}{2}\tilde{\varphi}(x)$. Значит,

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)].$$

Наконец, из теоремы 1 и полученной сходимости ряда $u_0(x, t)$ следует утверждение леммы для ряда $u_1(x, t)$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2. Функция $a_0(x, t)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по $x, t \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty]$, функция $a'_{0x}(x, t)$ ($a'_{0t}(x, t)$) абсолютно непрерывна по x (соответственно, по t),

$$\frac{\partial^2 a_0(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a_0(x, t)}{\partial x^2} \quad (20)$$

почти всюду по x и по t и выполняются условия

$$a_0(0, t) = a_0(1, t) = 0, \quad (21)$$

$$a_0(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \quad a'_{0t}(x, 0) = 0. \quad (22)$$

Доказательство. Непрерывность $a_0(x, t)$ по x и t следует из доказательства леммы 1. Рассмотрим $\tilde{\varphi}'(x)$. Очевидно, что $\tilde{\varphi}'(x)$ непрерывна всюду, кроме, быть может, $x = n$ при целом n . Далее, из равенства $\tilde{\varphi}'(-x) = \tilde{\varphi}'(x)$ следует $\tilde{\varphi}'(-0) = \tilde{\varphi}'(+0)$, т.е. $\tilde{\varphi}'(x)$ непрерывна в нуле и, следовательно, во всех точках $x = n$ при четном n . Наконец, из равенств

$$\tilde{\varphi}'(-(1+0)) = \tilde{\varphi}'(-1-0) = \tilde{\varphi}'(1-0) = \tilde{\varphi}'(-1+0) = \tilde{\varphi}'(1+0))$$

следует, что $\tilde{\varphi}'(x)$ непрерывна в точке $x = 1$ и, следовательно, во всех точках $x = n$ при нечетном n . Значит, $\tilde{\varphi}'(x) \in C(-\infty, \infty)$; так как эта функция абсолютно непрерывна при $x \in [0, 1]$, то $\tilde{\varphi}'(x)$ абсолютно непрерывна при всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Значит, почти при всех x и t выполняется (20). Проверим выполнение (21)–(22). Имеем

$$a_0(1, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}(1+t) + \tilde{\varphi}(1-t)] = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}(1+t) + \tilde{\varphi}(-1-t)] = 0,$$

т.е. верно (21). Проверим (22). Очевидно, имеем $a_0(x, 0) = \tilde{\varphi}(x)$. Из соотношения

$$a'_{0t}(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}'(x+t) - \tilde{\varphi}'(x-t)]$$

получаем $a'_{0t}(x, 0) = 0$. Лемма доказана. $\square$

Следствие. При $x \in [0, 1]$ функция $a_0(x, t)$ является классическим решением задачи (1)–(3) при $q(x) = 0$ с условием единственности

$$\frac{\partial^2 a_0(x, t)}{\partial t^2} \in L[Q_T].$$

Приступаем к исследованию ряда $u_1(x, t)$. В силу леммы 2 его сумма (для которой сохраняем обозначение $u_1(x, t)$) является классическим решением задачи

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u_1(x, t) + f_0(x, t), \quad (23)$$

$$u_1(0, t) = u_1(1, t) = 0, \quad (24)$$

$$u_1(x, 0) = u'_{1t}(x, 0) = 0, \quad (25)$$

где $f_0(x, t) = -q(x)a_0(x, t)$, с условием единственности. Поэтому согласно теореме 1 функция $u_1(x, t)$ является суммой ряда своего формального решения, которое по формуле (8) есть

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \int_0^t R_\lambda(f_0(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t-\tau)}{\rho} d\tau d\lambda. \quad (26)$$

По аналогии с (19) представим (26) в виде

$$u_1(x, t) = u_{10}(x, t) + u_2(x, t).$$

Здесь $u_{10}(x, t)$ — функция (26), где вместо R_λ берется R_λ° . Так как $u_{10}(x, t)$ — сумма формального решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u_{10}(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{10}(x, t)}{\partial x^2} + f_0(x, t)$$

с условиями (24)–(25), где вместо $u_1(x, t)$ берем $u_{10}(x, t)$, то по теореме 2

$$u_{10}(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_0(\eta, \tau) d\eta, \quad (27)$$

Обозначим через $\tilde{q}(x)$ четное 2-периодическое продолжение функции $q(x)$ с промежутка $x \in [0, 1]$ на всю ось. Тогда очевидно, что $\tilde{f}_0(\eta, \tau) = -\tilde{q}(\eta)a_0(\eta, \tau)$.

Обозначим через Π множество всех нечетных и 2-периодических по x функций $f(x, t)$ на всей оси (t — параметр). Таким образом, Π является образом линейной операции $\tilde{f}(x, t)$ продолжения $f(x, t)$ по x с отрезка $[0, 1]$ на всю ось. Легко видеть, что если $f(x, t) \in \Pi$, то и

$$\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\eta, \tau) d\eta \in \Pi.$$

Очевидно, также, что если $f(x, t) \in \Pi$, то и $\tilde{q}(x)f(x, t) \in \Pi$. В дальнейшем будем опускать знак $\sim$ у $\tilde{q}(x)$, т.е. теперь $q(x)$ задана на оси, четна и 2-периодична. Таким образом, имеем $\tilde{f}_0(\eta, \tau) = -q(\eta)a_0(\eta, \tau)$.

Так как правая часть (27) определена при всех $x, t \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty]$, то ее будем обозначать теперь $a_1(x, t)$, т.е. $a_1(x, t)$ — нечетное 2-периодическое продолжение $u_{10}(x, t)$ по x на всю ось x .

Займемся теперь $a_1(x, t)$. Непрерывность $a_1(x, t)$ по x и t следует из (27) и того факта, что $\tilde{f}_0(x, t)$ суммируема по x и t в любой ограниченной области (в дальнейшем $\tilde{f}_0(x, t)$ будет обозначать через $f_0(x, t)$; это же будет относиться и к другим подобным функциям). Далее, из-за нечетности и 2-периодичности $f_0(x, t)$ по x имеем

$$\int_{-t+\tau}^{t-\tau} f_0(\eta, \tau) d\eta = \int_{1-t+\tau}^{1+(t-\tau)} f_0(\eta, \tau) d\eta = \int_{-(t-\tau)}^{t-\tau} f_0(1+\xi, \tau) d\xi = 0.$$

Поэтому $a_1(0, t) = a_1(1, t) = 0$. Очевидно еще, что $a_1(x, 0) = 0$.

Лемма 3. *Функция $a_1(x, t)$ непрерывно дифференцируема по x и t , причем*

$$\frac{\partial a_1(x, t)}{\partial t} = J_{11}(x, t) + J_{21}(x, t), \quad (28)$$

$$\frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} = J_{11}(x, t) - J_{21}(x, t), \quad (29)$$

где

$$J_{11}(x, t) = \frac{1}{2} \int_x^{x+t} f_0(\xi, x+t-\xi) d\xi, \quad J_{21}(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^x f_0(\xi, \xi-x+t) d\xi$$

и $J_{11}(x, t)$, $J_{21}(x, t)$ непрерывны по x и t .

Доказательство. Докажем, что $a_1(x, t)$ непрерывно дифференцируема по t . Сначала предположим, что $q(\eta)$ непрерывна. Тогда очевидно, что $a_1(x, t)$ непрерывно дифференцируема по t и

$$\frac{\partial a_1(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^t \left[f_0(x+t-\tau, \tau) + f_0(x-t+\tau, \tau) \right] d\tau = J_{11}(x, t) + J_{21}(x, t).$$

Пусть теперь $q(x) \in L[0, 1]$. Тогда очевидно, что $J_{11}(x, t)$ и $J_{21}(x, t)$ непрерывны по x и t . Используя теорему Фубини, имеем

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t \left[J_{11}(x, \tau) + J_{21}(x, \tau) \right] d\tau &= \int_0^t d\tau \int_{\tau}^0 f_0(x+\tau-\eta, \eta) (-d\eta) + \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} f_0(\eta+x-\tau, \eta) d\eta = \\ &= \int_0^t d\eta \int_{\eta}^t f_0(x+\tau-\eta, \eta) d\tau + \int_0^t d\eta \int_{\eta}^t f_0(\eta+x-\tau, \eta) d\tau = \\ &= \int_0^t d\eta \int_x^{x+t-\eta} f_0(\xi, \eta) d\xi + \int_0^t d\eta \int_x^{x+\eta-t} f_0(\xi, \eta) (-d\xi) = \int_0^t d\eta \int_{x-t+\eta}^{x+t-\eta} f_0(\xi, \eta) d\xi = 2a_1(x, t). \end{aligned}$$

Значит, $a_1(x, t)$ непрерывно дифференцируема по t и выполняется (28).

Если $f_0(x, t)$ непрерывна, то очевидно, что $a_1(x, t)$ непрерывно дифференцируема по x и справедлива формула (29).

Пусть теперь $q(x) \in L[0, 1]$. Положим

$$Q(x, t) = J_{11}(x, t) - J_{21}(x, t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2 \int_0^x Q(\xi, t) d\xi &= \int_0^t d\tau \int_0^x \left[f_0(\xi + t - \tau, \tau) + f_0(\xi - t + \tau, \tau) \right] d\xi = \\ &= \int_0^t d\tau \left[\int_{t-\tau}^{x+t-\tau} f_0(\eta, \tau) d\eta - \int_{-t+\tau}^{x-t+\tau} f_0(\eta, \tau) d\eta \right] + \int_0^t d\tau \int_{-t+\tau}^{t-\tau} f_0(\eta, \tau) d\eta = \\ &= \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f_0(\eta, \tau) d\eta = 2a_1(x, t). \end{aligned}$$

Отсюда следует непрерывная дифференцируемость $a_1(x, t)$ по x и формула (29). $\square$

Лемма 4. Если функция $a(x)$ суммируема, а $b(x)$ непрерывна, то функция

$$\Phi(x) = \int_0^x a(\eta) b(\eta) d\eta$$

абсолютно непрерывна, $\Phi'(x)$ существует и конечна во всякой точке x , в которой существуют и конечны

$$\frac{d}{dx} \int_0^x a(\eta) d\eta, \quad \frac{d}{dx} \int_0^x |a(\eta)| d\eta.$$

Эта лемма очевидна.

Лемма 5. При фиксированном x функция $J_{11}(x, t)$ абсолютно непрерывна по t и

$$2 \frac{\partial J_{11}(x, t)}{\partial t} = - \left(q(x+t) a_0(x+t, 0) + \int_x^{x+t} q(\xi) a'_{0t}(\xi, x+t-\xi) d\xi \right) \quad (30)$$

почти при всех $t \in [0, \infty)$, причем правая часть (30) конечна, если конечны величины

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^\xi q(\tau) d\tau, \quad \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi |q(\tau)| d\tau \quad (31)$$

при $\xi = x+t$.

Доказательство. Сначала предположим, что функция $q(x)$ непрерывна на оси. Тогда функция $J_{11}(x, t)$ непрерывно дифференцируема по t и при всех t верно соотношение (30).

Пусть теперь $q(x) \in L[0, 1]$. Тогда правая часть (30) имеет смысл, причем интеграл в (30) есть непрерывная функция по x и t . Обозначим правую часть (30) через $-G(t)$. Тогда $G(t)$ суммируема. Далее, имеем

$$\int_0^t G(\eta) d\eta = \int_0^t f_0(x+\eta, 0) d\eta + \int_0^t d\eta \int_x^{x+\eta} f'_{0t}(\xi, x+\eta-\xi) d\xi, \quad (32)$$

где f'_{0t} означает дифференцирование f_0 по второй переменной. Пользуясь теоремой Фубини, переставим порядки интегрирования в двойном интеграле J в (32). Обозначив через $\varepsilon(x, t)$ функцию Хевисайда ($\varepsilon(x, t) = 1$ при $x \geq t$, $\varepsilon(x, t) = 0$ при $x < t$), получим

$$\begin{aligned} J &= \int_0^t d\eta \int_x^{x+t} \varepsilon(x + \eta, \xi) f'_{0t}(\xi, x + \eta - \xi) d\xi = \int_x^{x+t} d\xi \int_0^t \varepsilon(x + \eta, \xi) f'_{0t}(\xi, x + \eta - \xi) d\eta = \\ &= \int_x^{x+t} d\xi \int_{\xi-x}^t f'_{0t}(\xi, x + \eta - \xi) d\eta = - \int_x^{x+t} q(\xi) d\xi \int_{\xi-x}^t a'_{0t}(\xi, x + t - \xi) d\eta = \\ &= - \int_x^{x+t} q(\xi) \left[a_0(\xi, x + t - \xi) - a_0(\xi, 0) \right] d\xi \end{aligned}$$

(a'_{0t} имеет тот же смысл, что и f'_{0t} выше). Поэтому

$$\int_0^t G(\eta) d\eta = \int_x^{x+t} f_0(\xi, x + t - \xi) d\xi = 2J_{11}(x, t).$$

Значит, $J_{11}(x, t)$ абсолютно непрерывна по t и имеет место (30), причем правая часть (30) конечна по лемме 4, если конечны величины (31) при $\xi = x + t$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. При фиксированном t функция $J_{11}(x, t)$ абсолютно непрерывна по x и

$$2 \frac{\partial J_{11}(x, t)}{\partial x} = - \left[q(x+t) a_0(x+t, 0) - q(x) a_0(x, t) + \int_x^{x+t} q(\xi) a'_{0t}(\xi, x+t-\xi) d\xi \right] \quad (33)$$

почти всюду по x , где правая часть конечна, если конечны величины (31) при $\xi = x, x+t$.

Доказательство. Сначала предположим, что $q(x) \in C(-\infty, \infty)$. Тогда функция $J_{11}(x, t)$ непрерывно дифференцируема по x и имеет место соотношение (33).

Пусть теперь $q(x) \in L[0, 1]$. Тогда правая часть (33) имеет смысл, причем интеграл в (33) есть непрерывная функция по $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty)$. Обозначим правую часть (33) через $G(x)$; эта функция суммируема по x . Далее, имеем

$$\int_0^x G(\xi) d\xi = \int_0^x f_0(\xi + t, 0) d\xi - \int_0^x f_0(\xi, t) d\xi + \int_0^x d\xi \int_{\xi}^{\xi+t} f'_{0t}(\eta, \xi + t - \eta) d\eta. \quad (34)$$

Пользуясь теоремой Фубини, переставим порядки интегрирования в двойном интеграле J в (34):

$$J = \int_0^x d\xi \int_0^{x+t} \varepsilon(\xi + t, \eta) \varepsilon(\eta, \xi) f'_{0t}(\eta, \xi + t - \eta) d\eta = \int_0^{x+t} d\eta \int_0^x \varepsilon(\xi + t, \eta) \varepsilon(\eta, \xi) f'_{0t}(\eta, \xi + t - \eta) d\xi. \quad (35)$$

Во внутреннем интеграле J_1 в (35) сделаем замену $\xi + t - \eta = \tau$. Тогда

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{t-\eta}^{x+t-\eta} \varepsilon(\eta + \tau, \eta) \varepsilon(\eta, \tau - t + \eta) f'_{0t}(\eta, \tau) d\tau = \\ &= \int_{\max\{0, t-\eta\}}^{\min\{t, x+t-\eta\}} f'_{0t}(\eta, \tau) d\tau = f_0(\eta, \min\{t, x+t-\eta\}) - f_0(\eta, \max\{0, t-\eta\}). \end{aligned}$$

Значит,

$$J = \int_0^{x+t} f_0(\eta, \min\{t, x+t-\eta\})d\eta - \int_0^{x+t} f_0(\eta, \max\{0, t-\eta\})d\eta. \quad (36)$$

Рассмотрим первый интеграл J_2 в (36). Пусть $t \leq x$. Тогда

$$J_2 = \int_0^t + \int_t^x + \int_x^{x+t}.$$

Имеем

$$\int_0^t = \int_0^t f_0(\eta, t)d\eta, \quad \int_t^x = \int_t^x f_0(\eta, t)d\eta, \quad \int_x^{x+t} = \int_x^{x+t} f_0(\eta, x+t-\eta)d\eta.$$

Значит, при $t \leq x$

$$J_2 = \int_0^x f_0(\eta, t)d\eta + \int_x^{x+t} f_0(\eta, x+t-\eta)d\eta.$$

Пусть теперь $t \geq x$. Тогда

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^x + \int_x^t + \int_t^{x+t} = \int_0^x f_0(\eta, t)d\eta + \int_x^t f_0(\eta, x+t-\eta)d\eta + \\ &+ \int_t^{x+t} f_0(\eta, x+t-\eta)d\eta = \int_0^x f_0(\eta, t)d\eta + \int_x^{x+t} f_0(\eta, x+t-\eta)d\eta. \end{aligned}$$

Таким образом, при $t \leq x$ и при $t \geq x$ имеет место одна и та же формула:

$$J_2 = \int_0^x f_0(\eta, t)d\eta + \int_x^{x+t} f_0(\eta, x+t-\eta)d\eta.$$

Рассмотрим теперь второй интеграл J_3 в (36). Пусть $t \leq x$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_0^t + \int_t^x + \int_x^{x+t} = \int_0^t f_0(\eta, t-\eta)d\eta + \int_t^x f_0(\eta, 0)d\eta + \\ &+ \int_x^{x+t} f_0(\eta, 0)d\eta = \int_0^t f_0(\eta, t-\eta)d\eta + \int_t^{x+t} f_0(\eta, 0)d\eta. \end{aligned}$$

Пусть теперь $t \geq x$. Тогда

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_0^x + \int_x^t + \int_t^{x+t} = \int_0^x f_0(\eta, t-\eta)d\eta + \int_x^t f_0(\eta, t-\eta)d\eta + \\ &+ \int_t^{x+t} f_0(\eta, 0)d\eta = \int_0^t f_0(\eta, t-\eta)d\eta + \int_t^{x+t} f_0(\eta, 0)d\eta. \end{aligned}$$

Значит, и для J_3 справедлива одна и та же формула как при $t \leq x$, так и при $t \geq x$.

Таким образом,

$$J = \int_0^x f_0(\eta, t)d\eta + \int_x^{x+t} f_0(\eta, t-\eta)d\eta - \int_0^t f_0(\eta, t-\eta)d\eta - \int_t^{x+t} f_0(\eta, 0)d\eta.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int_0^x G(\xi) d\xi &= \int_0^x f_0(\xi + t, 0) d\xi - \int_0^x f_0(\xi, t) d\xi + \int_0^x f_0(\xi, t) d\xi + \\ &+ \int_x^{x+t} f_0(\xi, x + t - \xi) d\xi - \int_0^t f_0(\xi, t - \xi) d\xi - \int_t^{x+t} f_0(\xi, 0) d\xi = \\ &= \int_x^{x+t} f_0(\xi, x + t - \xi) d\xi - \int_0^t f_0(\eta, t - \eta) d\eta. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$G(x) = f_0(x + t, 0) - f_0(x, t) + \int_x^{x+t} f'_{0t}(\xi, x + t - \xi) d\xi$$

почти всюду по x , т.е. $G(x)$ конечна, если конечны величины (31) при $\xi = x$ и $\xi = x + t$. Лемма доказана. $\square$

Аналогично леммам 5 и 6 получаются следующие леммы 7 и 8.

Лемма 7. При фиксированном x функция $J_{21}(x, t)$ абсолютно непрерывна по t и

$$\frac{\partial J_{21}(x, t)}{\partial t} = - \left[q(x - t) a_0(x - t, 0) + \int_{x-t}^x q(\xi) a'_{0t}(\xi, \xi - x + t) d\xi \right]$$

почти при всех t , причем правая часть конечна, если при $\xi = x + t$ конечны величины (31).

Лемма 8. При фиксированном t функция $J_{21}(x, t)$ абсолютно непрерывна по x и

$$\frac{\partial J_{21}(x, t)}{\partial x} = - \left[q(x) a_0(x, t) - q(x - t) a_0(x - t, 0) - \int_{x-t}^x q(\xi) a'_{0t}(\xi, \xi - x + t) d\xi \right]$$

почти при всех $x \in (-\infty, \infty)$, где правая часть конечна, если при $\xi = x, x - t$ конечны величины (31).

С помощью лемм 3–8 получаем следующий результат.

Теорема 3. Если $u(x, t)$ — классическое решение задачи (1)–(3) с условием единственности, то $a_1(x, t)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty)$, функция $a'_{1x}(x, t)$ ($a'_{1t}(x, t)$) абсолютно непрерывна по x (соответственно, по t), для $a_1(x, t)$ выполняются условия (24)–(25) и

$$\frac{\partial^2 a_1(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a_1(x, t)}{\partial x^2} - q(x) a_0(x, t) \quad (37)$$

почти всюду по $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty)$, где $q(x)$ — четная 2-периодическая функция, $q(x) \in L[0, 1]$, причем равенство (37) имеет место при всех x и t , где величины (31) конечны при $\xi = x, x - t, x + t$. Здесь $\partial^2 a_1(x, t) / \partial t^2 \in L[Q_T]$.

Теперь будем исследовать $u_1(x, t)$ по той же схеме, что $u(x, t)$ выше, т.е., исходим из того, что $u_1(x, t)$ — классическое решение задачи (23)–(25) с условием $\partial^2 u_1(x, t) / \partial t^2 \in L[Q_T]$; в итоге получим

$$u_1(x, t) = a_2(x, t) + u_2(x, t),$$

где для $a_2(x, t)$ имеет место та же формула, что и выше для $a_1(x, t)$, где $\tilde{f}_0(\eta, \tau)$ заменяется на $f_1(\eta, \tau) = -q(\eta) a_1(\eta, \tau)$, а $u_2(x, t)$ — классическое решение задачи, полученной из (23)–(25)

заменой $u_1(x, t)$ на $u_2(x, t)$ и $f_0(x, t)$ на $f_1(x, t)$. Этот процесс может быть бесконечно продолжен, т.е. получаем

$$u_n(x, t) = a_n(x, t) + u_{n+1}(x, t),$$

где $a_n(x, t)$ — то же, что и $a_1(x, t)$, с заменой $f_0(\eta, \tau)$ на $f_{n-1}(\eta, \tau)$ ($f_k(\eta, \tau) = -q(\eta)a_k(\eta, \tau)$) и $u_{n+1}(x, t)$ — решение системы, получаемой из (23)–(25) заменой $u_1(x, t)$ на $u_{n+1}(x, t)$ и $f_0(x, t)$ на $f_n(x, t) = -q(x)a_n(x, t)$.

Для $a_n(x, t)$ по индукции получаем следующую теорему, аналогичную теореме 3.

Теорема 4. Если $u(x, t)$ — классическое решение задачи (1)–(3) с условием единственности, то функция $a_n(x, t)$ при $n \geq 2$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty)$, функция $a'_{n,x}(x, t)$ ($a'_{n,t}(x, t)$) абсолютно непрерывна по x (соответственно, по t), для $a_n(x, t)$ выполняются условия (24)–(25) и

$$\frac{\partial^2 a_n(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a_n(x, t)}{\partial x^2} - q(x)a_{n-1}(x, t) \quad (38)$$

почти всюду по $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty)$, где функция $q(x)$ четна, 2-периодична и $q(x) \in L[0, 1]$, причем равенство (38) имеет место при всех x и t , где величины (31) конечны при $\xi = x$, $x - t$, $x + t$.

Лемма 9. Имеют место формулы

$$u(x, t) = A_n(x, t) + \Omega_n(x, t), \quad n = 2, \dots,$$

где

$$A_n(x, t) = \sum_{k=0}^n a_k(x, t),$$

$$\Omega_n(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left[\int_0^t (R_\lambda - R_\lambda^\circ)(f_{n-1}(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right] d\lambda.$$

Доказательство. Имеем

$$u(x, t) = A_{n-1}(x, t) + u_n(x, t).$$

Далее, $u_n(x, t)$ есть классическое решение задачи, полученной из (23)–(25) заменой $u_1(x, t)$ на $u_n(x, t)$ и $f_0(x, t)$ на $f_{n-1}(x, t)$ с условием единственности. Поэтому по теореме 1

$$u_n(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left[\int_0^t R_\lambda(f(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right] d\lambda = a_{n+1}(x, t) + \Omega_n(x, t). \quad \square$$

Лемма 10. Пусть T — произвольное положительное число, m — наименьшее натуральное число, для которого $T \leq m$. Тогда

$$\|a_n(x, t)\|_{C[Q_T]} \leq M_1 \left(\frac{M_2}{2} \right)^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $M_1 = \|a_n(x, t)\|_{C[Q_T]}$, $M_2 = (2m+1)\|q\|_1$ (здесь $\|\cdot\|_1$ — норма в $L[0, 1]$). Кроме того, $M_1 \leq C_T \|\varphi\|_1$ и постоянная C_T не зависит от $\varphi(x)$.

Доказательство. Очевидно $f_n(x, t) \in L[Q_T]$, $a_n(x, t) \in C[Q_T]$, $n = 1, 2, \dots$. При $n = 1$ оценка

$$|a_n(x, t)| \leq M_1 \left(\frac{M_2}{2} \right)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (39)$$

очевидно выполняется. Предположим, что она выполняется для некоторого n , и докажем, что она выполняется для $n + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &\leq \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} |f_n(\eta, \tau)| d\eta \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{-m}^{m+1} |f_n(\eta, \tau)| d\eta \leq \frac{2m+1}{2} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\eta)| |a_n(\eta, \tau)| d\eta \leq \\ &\leq \frac{2m+1}{2} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\eta)| M_1 \left(\frac{M_2}{2} \right)^{n-1} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} d\eta = M_1 \left(\frac{M_2}{2} \right)^n \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Следовательно, (39) верно и для $n + 1$. Оценим M_1 . Имеем

$$\begin{aligned} |a_1(x, t)| &\leq \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} |f_0(\eta, \tau)| d\eta \leq \frac{1}{2} \int_0^T d\tau \int_{-m}^{m+1} |f_0(\eta, \tau)| d\eta = \\ &= \frac{2m+1}{2} \int_0^T d\tau \int_0^1 |f_0(\eta, \tau)| d\eta \leq \frac{2m+1}{2} \int_0^T d\tau \int_0^1 |q(\eta)| (|\tilde{\varphi}(\eta + \tau)| + |\tilde{\varphi}(\eta - \tau)|) d\eta \leq \\ &\leq \frac{2m+1}{2} \int_0^1 |q(\eta)| d\eta 2m \int_0^1 |\varphi(\tau)| d\tau = C_T \|\varphi\|_1. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 5. Если $u(x, t)$ — классическое решение задачи (1)–(3) с условием $\partial^2 u(x, t) \partial t^2 \in L[Q_T]$, то

$$u(x, t) = A(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, t), \quad (40)$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно по $(x, t) \in Q_T$ при любом $T > 0$.

Доказательство. По лемме 10 ряд $A(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно по $(x, t) \in Q_T$ при любом $T > 0$. Далее, при $\rho \in \tilde{\gamma}_n$ имеем оценки:

$$\left| (R_\lambda - R_\lambda^\circ)(f_n(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} \right| \leq \frac{C}{n^3} \int_0^1 |f_n(x, \tau)| d\tau,$$

где C не зависит от η, τ , и по лемме 10

$$\int_0^1 |f_n(x, \tau)| d\tau \leq M_1 \left(\frac{M_2 T}{2} \right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \|q\|_1. \quad \square$$

Замечание 2. Ряд $A(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области по $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty)$.

Таким образом, ряд $A(x, t)$ является преобразованием ряда формального решения, полученное путем многократного использования рекомендаций А. Н. Крылова по ускорению сходимости рядов.

При $q(x) = 0$ формула (40) переходит в формулу Даламбера. Поэтому формула (40) представляет собой аналог формулы Даламбера и является формулой явного решения смешанной задачи.

Замечание 3. Формулы, схожие с (40) в случае $q(x) \in C^1[0, 1]$ и других граничных условий, были получены ранее Б. М. Левитаном без привлечения метода Фурье (см. [9]).

3. Классическое решение. Ряд $A(x, t)$ можно составить, взяв в качестве $\varphi(x)$ любую суммируемую функцию. В этом разделе считаем, что в этом ряде функция $\varphi(x)$ такова, что $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. При этих условиях на $\varphi(x)$ мы установим, что сумма ряда $A(x, t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3).

Лемма 11. Сумма $A(x, t)$ ряда (40) непрерывна и непрерывно дифференцируема по $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, \infty)$, причем

$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial a_0(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \int_x^{x+t} q(\xi) A(\xi, x+t-\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_{x-t}^x q(\xi) A(\xi, \xi-x+t) d\xi, \quad (41)$$

$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial a_0(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{2} \int_x^{x+t} q(\xi) A(\xi, x+t-\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_{x-t}^x q(\xi) A(\xi, \xi-x+t) d\xi. \quad (42)$$

Доказательство. По лемме 10 ряд $A(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области переменных x и t . Значит, сумма ряда $A(x, t)$ непрерывна по x и t . Далее, формально дифференцируем ряд $A(x, t)$ почленно по t :

$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial a_0(x, t)}{\partial t} + \sum_1^\infty \frac{\partial a_n(x, t)}{\partial t}. \quad (43)$$

Из рассуждений п. 2 следует, что построение и исследование функции $a_n(x, t)$ не связано со смешанной задачей, а лишь с формулой (32), где $f_0(\eta, t)$ заменено на $-\frac{1}{2}q(\eta)a_{n-1}(\eta, \tau)$. Поэтому по индукции имеем

$$\frac{\partial a_n(x, t)}{\partial t} = J_{1n}(x, t) + J_{2n}(x, t),$$

где

$$J_{1n}(x, t) = -\frac{1}{2} \int_x^{x+t} q(\xi) a_{n-1}(\xi, x+t-\xi) d\xi,$$

$$J_{2n}(x, t) = -\frac{1}{2} \int_{x-t}^x q(\xi) a_{n-1}(\xi, \xi-x+t) d\xi.$$

По лемме 10 в любой ограниченной области изменения x и t имеем оценки:

$$|J_{jn}(x, t)| \leq C \frac{C_1^{n-1}}{(n-1)!},$$

где C и C_1 зависят лишь от ограниченной области изменения x и t . Отсюда следует, что в этой области ряд $\sum_1^\infty \frac{\partial a_n(x, t)}{\partial t}$ сходится абсолютно и равномерно, и потому функция $A(x, t)$ непрерывно дифференцируема по t и имеет место формула (43). Далее, по теореме Лебега о предельном переходе имеем

$$\begin{aligned} \sum_1^\infty \int_x^{x+t} q(\xi) a_{n-1}(\xi, x+t-\xi) d\xi &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_1^N \int_x^{x+t} q(\xi) a_{n-1}(\xi, x+t-\xi) d\xi = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_x^{x+t} q(\xi) \sum_1^N a_{n-1}(\xi, x+t-\xi) d\xi = \int_x^{x+t} q(\xi) A(\xi, x+t-\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\sum_1^{\infty} \int_{x-t}^x q(\xi) a_{n-1}(\xi, \xi - x + t) d\xi = \int_{x-t}^x q(\xi) A(\xi, \xi - x + t) d\xi,$$

и тем самым получаем (41). Аналогично получается (42). Лемма доказана. $\square$

Теорема 6. Если $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, то сумма ряда $A(x, t)$ является классическим решением задачи (1)–(3) с условием единственности.

Доказательство. Введем обозначения

$$B_1(x, t) = \int_x^{x+t} q(\xi) A(\xi, x + t - \xi) d\xi, \quad B_2(x, t) = \int_{x-t}^x q(\xi) A(\xi, \xi - x + t) d\xi.$$

По аналогии с леммой 5 согласно лемме 11 получаем, что функция $B_1(x, t)$ при фиксированном x абсолютно непрерывна по t ,

$$\frac{\partial B_1(x, t)}{\partial t} = q(x + t) A(x + t, 0) + \int_x^{x+t} q(\xi) A'_t(\xi, x + t - \xi) d\xi$$

почти всюду по t и правая часть конечна, если при $\xi = x + t$ конечны величины (31).

По аналогии с леммой 7 при фиксированном x функция $B_2(x, t)$ абсолютно непрерывна по t и

$$\frac{\partial B_2(x, t)}{\partial t} = q(x - t) A(x - t, 0) + \int_{x-t}^x q(\xi) A'_t(\xi, \xi - x + t) d\xi$$

при всех t , для которых при $\xi = x - t$ конечны величины (31).

По аналогии с леммой 6 функция $B_1(x, t)$ при фиксированном t абсолютно непрерывна по x и

$$\frac{\partial B_1(x, t)}{\partial x} = q(x + t) A(x + t, 0) - q(x) A(x, t) + \int_x^{x+t} q(\xi) A'_t(\xi, x + t - \xi) d\xi$$

если при $\xi = x$, $x + t$ конечны величины (31).

По аналогии с леммой 8 заключаем, что функция $B_2(x, t)$ при фиксированном t абсолютно непрерывна по x и

$$\frac{\partial B_2(x, t)}{\partial x} = q(x) A(x, t) - q(x - t) A(x - t, 0) - \int_{x-t}^x q(\xi) A'_t(\xi, \xi - x + t) d\xi$$

если при $\xi = x$, $x - t$ конечны величины (31).

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial a_0(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} B_1(x, t) - \frac{1}{2} B_2(x, t), \\ \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial a_0(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{2} B_1(x, t) + \frac{1}{2} B_2(x, t), \end{aligned}$$

то $\partial A(x, t)/\partial t$ при фиксированном x абсолютно непрерывна по t и

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a_0(x, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial B_1(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial B_2(x, t)}{\partial t}, \quad (44)$$

почти всюду по t , причем (44) имеет место, если при $\xi = x + t$, $x - t$ конечны величины (31), $\tilde{\varphi}''(x + t)$ и $\tilde{\varphi}''(x - t)$.

Наконец, $\partial A(x, t)/\partial t$ при фиксированном t абсолютно непрерывна по x и

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 a_0(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial B_1(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial B_2(x, t)}{\partial x}.$$

Так как очевидно, что $\partial^2 a_0(x, t)/\partial t^2 \in L[0, 1]$, то получаем решение в классе единственности. Теорема доказана. $\square$

Замечание 4. Как и в доказательстве теоремы 3, получаем, что соотношения (1)–(3) выполняется при всех x и t , только $A(x, 0) = \varphi(x)$ заменяется на $A(x, 0) = \tilde{\varphi}(x)$ и в уравнении (1) функция $q(x)$ четна и 2-периодична на всей оси.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хромов А. П. О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2016. — 56, № 10. — С. 1795–1809.
2. Корнев В. В., Хромов А. П. Об обобщенном формальном решении по методу Фурье смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения// 19 Междунар. Саратов. зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приближений», посв. 90-летию акад. П. Л. Ульянова (Саратов, 29 января — 2 февраля 2018). — Саратов: СГУ. — С. 156–159.
3. Корнев В. В., Хромов А. П. О решении неоднородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевыми начальными условиями// 19 Междунар. Саратов. зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приближений», посв. 90-летию акад. П. Л. Ульянова (Саратов, 29 января — 2 февраля 2018). — Саратов: СГУ. — С. 159–160.
4. Корнев В. В., Хромов А. П. О классическом и обобщенном решении смешанной задачи для волнового уравнения// в кн.: Современные методы теории краевых задач/ Междунар. конф. «Понтрягинские чтения—XXIX», посв. 90-летию акад. В. А. Ильина (Москва, 2–6 мая). — М., 2018. — С. 132–133.
5. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла. — М.: Наука, 1964.
6. Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. — Ростов: РГУ, 1994.
7. Корнев В. В., Хромов А. П. Смешанная задача для неоднородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — 57, № 10. — С. 1692–1707.
8. Корнев В. В., Хромов А. П. Сходимость формального решения по методу Фурье в смешанной задаче для простейшего неоднородного волнового уравнения// в кн.: Математика. Механика (сб. науч. тр.). — Саратов: СГУ, 2017. — 19. — С. 41–44.
9. Левитан Б. М. Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения. — М.: Физмалит, 1965.

Корнев Владимир Викторович

Саратовский национальный исследовательский государственный университет

им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: kornevVV@info.sgu.ru

Хромов Август Петрович

Саратовский национальный исследовательский государственный университет

им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: khromovap@info.sgu.ru