Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Зубова, А. Х. Мохаммад, В. И. Усков, Решение полуграничной задачи для вырожденного уравнения в частных производных первого порядка, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 173, 48–57

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-173-48-57>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:22:06

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 173 (2019). С. 48–57
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-173-48-57

УДК 517.922, 517.95

РЕШЕНИЕ ПОЛУГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

© 2019 г. С. П. ЗУБОВА, А. Х. МОХАМАД, В. И. УСКОВ

Аннотация. Рассматривается уравнение с частными производными первого порядка в банаховом пространстве с постоянными необратимыми коэффициентами. В частном случае конечномерного пространства начально-краевая задача при необратимых матричных коэффициентах не имеет решения, поэтому в работе ставятся условия типа Шоуолтера. За счет регулярности операторного пучка уравнение расщепляется на дифференциальные уравнения в подпространствах, заданные условия приводят к начальным условиям в подпространствах. Построено решение поставленной задачи. Приведен иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: банахово пространство, вырожденное уравнение в частных производных, 0-нормальное собственное число, условия типа Шоуолтера.

SOLUTION OF A SEMI-BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A FIRST-ORDER DEGENERATE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

© 2019 S. P. ZUBOVA, MOHAMAD ABDULFTAH HOSNI, V. I. USKOV

ABSTRACT. A first-order partial differential equation with constant irreversible coefficients in a Banach space is considered. In the particular case of a finite-dimensional space, the initial-boundary-value problem with irreversible matrix coefficients has no solution; hence, we pose Showalter-type conditions. Due to the regularity of the operator pencil, the equation splits into differential equations in subspaces and given conditions lead to initial conditions in subspaces. A solution to the problem is constructed and an example is provided.

Keywords and phrases: Banach space, degenerate partial differential equation, 0-normal eigenvalue, Showalter-type conditions.

AMS Subject Classification: 35F40

1. **Введение.** Рассматривается уравнение

$$A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \quad (1)$$

где $A : E \rightarrow E$, A — замкнутый линейный оператор, E — банахово пространство, $\overline{\text{dom}} A = E$; число 0 для A является нормальным собственным числом (см. [?]; $B \in L(E, E)$, B необратим; $f(x, y)$ — заданная непрерывная функция со значениями в E , $u = u(x, y) \in E$, $(x, y) \in D = [0, x_k] \times [0, y_k]$.

Под решением уравнения (1) понимается любая функция $u = u(x, y) \in C^1(D \rightarrow E)$, удовлетворяющая (1) при всех $(x, y) \in D$.

Впервые уравнения, неразрешенные относительно производной, изучались, по-видимому, в работе А. Пуанкаре [17]. Исследование таких уравнений, называемых дифференциально-алгебраическими, или дескрипторными, сосредоточено в нескольких математических школах: воронежская (С. Г. Крейн, А. Г. Баскаков, С. П. Зубова и др.), челябинская (Г. А. Свиридюк, В. Е. Федоров и их ученики), иркутская (Ю. Е. Бояринцев, Н. А. Сидоров, А. А. Щеглова, В. Ф. Чистяков, М. В. Фалалеев и их ученики), екатеринбургская (И. В. Мельникова и ее ученики). За рубежом активные исследования ведут А. Favini, А. Yagi, S. Campbell, P. Kunkel, V. Mehrmann, R. März, S. M. Wade, I. B. Paul и др.

Вырожденные системы уравнений в частных производных встречаются в различных приложениях: гидродинамике (уравнения Навье—Стокса; см. [13]), теплотехнике, электротехнике и т. д. Такие уравнения относят к уравнениям соболевского типа (см. [5]).

Уравнение (1), однако, нельзя назвать дифференциально-алгебраическим; далее будет показано, что уравнение (1) расщепляется на уравнения в непересекающихся подпространствах, и в каждом подпространстве уравнение дифференциальное, алгебраическая часть отсутствует. Одно из этих уравнений решается при $x = 0$, другое при $y = 0$; таким образом, задачу с такими условиями можно назвать и полуграничной, и полуначальной.

Заметим, конечномерный необратимый оператор $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет число 0 нормальным собственным числом (см. [3]), поэтому результаты, полученные в данной работе, дополняют и уточняют соответствующие результаты работ [1, 12, 14–16, 18], полученные для случая конечномерного исходного пространства.

Свойство оператора иметь число 0 нормальным собственным числом означает, что пространство представимо в виде прямой суммы

$$E = M \dot{+} N, \quad (2)$$

где N — корневое подпространство оператора A , а M — такое инвариантное относительно A подпространство, что сужение $\tilde{A}$ оператора A на M имеет ограниченный обратный оператор $\tilde{A}^{-1}$ (см. [4]).

Рассматривается регулярный случай, т.е. при ненулевых λ , достаточно малых по модулю ($\lambda \in \dot{U}(0)$), оператор $A - \lambda B$ обратим (пучок $A - \lambda B$ регулярный, пара (A, B) регулярная) и случай одномерного ядра оператора A .

2. Предварительные сведения. Пусть $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ — жорданова цепочка, отвечающая нулевому собственному числу оператора A : $Ae_1 = 0$, $Ae_i = e_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots, n$; положим $N = \text{lin}\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$.

В подпространстве N вводится скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ так, чтобы базис $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ стал ортонормированным. Проекторы на M и N , отвечающие разложению (2), обозначаются через Q и P соответственно.

Приведем результаты, полученные в [6–9].

Лемма 1. Уравнение $Av = w$, $v, w \in E$, разрешимо относительно v в том и только том случае, когда

$$\langle Pw, e_n \rangle = 0. \quad (3)$$

При этом

$$v = Hw + ce_1 \quad \forall c \in \mathbb{C}, \quad (4)$$

где $H = \tilde{A}^{-1}Q + SP$,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$SP : N \rightarrow N$, $\tilde{A}^{-1}Q : M \rightarrow M$.

Лемма 2. Оператор $(A - \lambda B)^{-1}$ для любого $\lambda \in \dot{U}(0)$ существует тогда и только тогда, когда существует такое $q \in \mathbb{N}$, что $\langle PB(HB)^{q-1}e_1, e_n \rangle \neq 0$.

Обозначим через p наименьшее из чисел q , для которых $\langle PB(HB)^{q-1}e_1, e_n \rangle \neq 0$.

Рассмотрим B -присоединенные к e_1 элементы v_i , отвечающие нулевому собственному числу:

$$Av_1 = 0, \quad Av_i = Bv_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots \quad (5)$$

Известно (см. [2]), что пучок $A - \lambda B$ регулярен тогда и только тогда, когда B -жорданова цепочка v_i имеет конечную длину.

Лемма 3. Длина цепочки v_i равна p , и в качестве v_i можно взять элементы

$$v_1 = e_1, \quad v_i = (HB)^{i-1}e_1, \quad i = 2, 3, \dots, p. \quad (6)$$

Теорема 1. При $\lambda \in \dot{U}(0)$ оператор $A_\lambda = (A - \lambda B)^{-1}A$ имеет число 0 нормальным собственным числом:

$$E = M_1 \dot{+} N_1, \quad (7)$$

где N_1 — корневое подпространство для оператора A_λ , а подпространство M_1 , инвариантное относительно A_λ , таково:

$$M_1 = \left\{ z \in E : \langle PB(HB)^i z, e_n \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p-1; \langle PB(HB)^p z, e_n \rangle \neq 0 \right\}. \quad (8)$$

Лемма 4. Элементы подпространства N_1 являются линейными комбинациями элементов B -жордановой цепочки v_i , $i = 1, 2, 3, \dots, p$.

В подпространстве N_1 введем базис $\{v_i\}$, $i = 1, 2, \dots, p$; в результате подпространство N_1 (как и M_1) не зависит от параметра λ .

Через P_1 и Q_1 обозначим проекторы на N_1 и M_1 , отвечающие разложению (7), $P_1 + Q_1 = I$, сужение $\tilde{A}_\lambda$ оператора A_λ на M_1 имеет ограниченный обратный оператор $\tilde{A}_\lambda^{-1}$.

3. Постановка задачи. Уравнение (1) расщепляется на уравнения в подпространствах N_1 и M_1 , каждое из которых решается с условиями

$$P_1 u(x, 0) = \psi(x) \in N_1 \quad (9)$$

в подпространстве N_1 и с условиями

$$Q_1 u(0, y) = \varphi(y) \in M_1. \quad (10)$$

в подпространстве M_1 . Целью работы является построение решения

$$u(x, y) = Q_1 u(x, y) + P_1 u(x, y) \quad (11)$$

уравнения (1) с условиями типа Шоултера (9), (10).

4. Расщепление исходного уравнения. Представление $B = \frac{1}{\lambda}(\lambda B - A + A)$ и умножение уравнения (1) слева на $(A - \lambda B)^{-1}$ приводит к уравнению

$$A_\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\lambda}(A_\lambda - I) \frac{\partial u}{\partial y} = (A - \lambda B)^{-1} f(x, y). \quad (12)$$

Подставив (11) в последнее уравнение, расщепив $(A - \lambda B)^{-1} f(x, y)$ на функции в подпространствах N_1 и M_1 , учитывая, что подпространства N_1 и M_1 инвариантны относительно A_λ и что $N_1 \cap M_1 = \{0\}$, получаем уравнения

$$A_\lambda \frac{\partial P_1 u}{\partial x} + \frac{1}{\lambda}(A_\lambda - P_1) \frac{\partial P_1 u}{\partial y} = P_1 (A - \lambda B)^{-1} f(x, y) \quad (13)$$

в подпространстве N_1 и

$$\tilde{A}_\lambda \frac{\partial Q_1 u}{\partial x} + \frac{1}{\lambda}(\tilde{A}_\lambda - Q_1) \frac{\partial Q_1 u}{\partial y} = Q_1 (A - \lambda B)^{-1} f(x, y) \quad (14)$$

в подпространстве M_1 .

5. Решение задачи в корневом подпространстве. Для решения задачи (13), (9) элементы $P_1 u(x, y)$ и $P_1(A - \lambda B)^{-1} f(x, y)$ раскладываются по базису $\{v_i\}$, $i = 1, 2, \dots, p$:

$$P_1 u(x, y) = \sum_{i=1}^p u_i v_i, \quad u_i = u_i(x, y),$$

$$P_1(A - \lambda B)^{-1} f(x, y) = \sum_{i=1}^p F_i v_i, \quad F_i = F_i(x, y, \lambda).$$

Уравнение (13) принимает вид

$$\sum_{i=1}^p \frac{\partial u_i}{\partial x} A_\lambda v_i + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^p \frac{\partial u_i}{\partial y} (A_\lambda - P_1) v_i = \sum_{i=1}^p F_i v_i. \quad (15)$$

Лемма 5. *Имеет место соотношение*

$$A_\lambda v_i = - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{\lambda^{i-k}} v_k. \quad (16)$$

Доказательство. Элемент $A_\lambda v_i \in N_1$ представим в виде

$$A_\lambda v_i = \sum_{j=1}^p c_{ij} v_j. \quad (17)$$

Отсюда

$$A v_i = \sum_{j=1}^p c_{ij} (A - \lambda B) v_j. \quad (18)$$

Элементы $A v_j$ заменим на элементы $B v_{j-1}$, $j = 2, 3, \dots, p$ (равенства (5)), $A v_1 = 0$, поэтому соотношение (18) эквивалентно соотношению

$$A v_i = \sum_{j=1}^{p-1} (c_{i,j+1} - \lambda c_{ij}) B v_j - \lambda c_{ip} B v_p.$$

В силу леммы 1 последнее равенство корректно тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{p-1} (c_{i,j+1} - \lambda c_{ij}) \langle P B v_j, e_n \rangle - \lambda c_{ip} \langle P B v_p, e_n \rangle = 0. \quad (19)$$

При этом

$$v_i = \sum_{j=1}^{p-1} (c_{i,j+1} - \lambda c_{ij}) H B v_j - \lambda c_{ip} H B v_p + c e_1 \quad \forall c \in \mathbb{C}. \quad (20)$$

В соотношении (19) $\langle P B v_j, e_n \rangle = 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, p-1$ в силу (6) и определения числа p , поэтому $c_{ip} = 0$. Теперь (20) имеет вид

$$v_i = \sum_{j=1}^{p-1} (c_{i,j+1} - \lambda c_{ij}) v_{j+1} + c e_1. \quad (21)$$

Отсюда в силу леммы 1

$$\langle Pf, e_n \rangle = \sum_{i=1}^{p-1} (F_{i+1} - \lambda F_i) \langle PBv_i, e_n \rangle - \lambda F_p \langle PBv_p, e_n \rangle - \lambda \langle PBQ_1F, e_n \rangle, \quad (26)$$

и

$$Q_1F = Hf(x, y) - \sum_{i=1}^{p-1} (F_{i+1} - \lambda F_i) HBv_i + \lambda F_p HBv_p + \lambda HBQ_1F + ce_1.$$

Из последнего равенства имеем:

$$Hf(x, y) = \sum_{i=1}^{p-1} (F_{i+1} - \lambda F_i) HBv_i - \lambda F_p HBv_p + (I - \lambda HB)Q_1F + ce_1 \quad \forall c \in \mathbb{C}. \quad (27)$$

В правой части равенства (26) все слагаемые, кроме предпоследнего, равны нулю в силу (6)–(8) и определения числа p , поэтому

$$\langle Pf, e_n \rangle = -\lambda F_p \langle PBv_p, e_n \rangle. \quad (28)$$

Применение к обеим частям равенства (27) функционала $\langle PB(\cdot), e_n \rangle$ дает

$$\langle PBHf, e_n \rangle = (F_p - \lambda F_{p-1}) \langle PBv_p, e_n \rangle - \lambda F_p \langle PBHBv_p, e_n \rangle.$$

Применение к (27) функционалов $\langle PB(HB)^{k-1}(\cdot), e_n \rangle$ приводит к соотношениям

$$\langle P(BH)^k f, e_n \rangle = \sum_{j=1}^k (F_{p-j+1} - \lambda F_{p-j}) \langle PB(HB)^{k-j} v_p, e_n \rangle - \lambda F_p \langle PB(HB)^k v_p, e_n \rangle, \quad (29)$$

$k = 2, 3, \dots, p-1$. Из системы (28), (29) для $k = 1, 2, \dots, p-1$ последовательно определяем функции $\lambda F_p, F_i - \lambda F_{i-1}, i = p-1, p-2, \dots, 2$, не зависящие от λ , что и требовалось доказать. $\square$

Введем обозначения

$$-\lambda F_p = \Phi_p, \quad F_{p-j+1} - \lambda F_{p-j} = \Phi_{p-j}, \quad \Phi_p = \Phi_p(x, y), \quad \Phi_{p-j} = \Phi_{p-j}(x, y),$$

тогда уравнения (23) принимают вид

$$\frac{\partial u_p}{\partial y} = \Phi_p, \quad \frac{\partial u_{p-j}}{\partial y} = -\frac{\partial u_{p-j+1}}{\partial x} + \Phi_{p-j}, \quad j = 1, 2, \dots, p-1. \quad (30)$$

Для нахождения $P_1 u(x, y) = \sum_{i=1}^p u_i v_i$ представим $\psi(x) \in N_1$ в соотношении (9) в виде

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^p \psi_i(x) v_i;$$

тогда

$$u_i(x, 0) = \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (31)$$

Из первого уравнения в (30) и условия (31) с $i = p$ находим

$$u_p(x, y) = \int_0^y \Phi_p(x, s) ds + \psi_p(x); \quad (32)$$

из уравнения (30) с $j = 1$ и условия (31) при $i = p-1$ находим

$$u_{p-1}(x, y) = - \int_0^y \int_0^\tau \frac{\partial \Phi_p}{\partial x}(x, s) ds d\tau - \psi'_p(x)y + \int_0^y \Phi_{p-1}(x, s) ds + \psi_{p-1}(x)$$

при условии непрерывной дифференцируемости $\psi_{p-1}(x)$ и непрерывности второй производной по x от $\Phi_p(x, y)$ и $\psi_p(x)$. Далее,

$$u_{p-j}(x, y) = - \int_0^y \frac{\partial u_{p-j+1}(x, s)}{\partial x} ds + \int_0^y \Phi_{p-j}(x, s) ds + \psi_{p-j}(x), \quad j = 1, 2, \dots, p-1. \quad (33)$$

Таким образом, последовательное решение уравнений (30) с условиями (31) приводит к следующему результату.

Лемма 7. Пусть $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема $p+1$ раз по x и $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема $p+1$ раз. Тогда решение задачи (13), (9) существует, единственно, не зависит от λ и определяется из соотношений (32), (33).

Замечание 1. Условия гладкости функций $f(x, y)$ и $\psi(x)$ можно ослабить за счет того, что от разных их компонент в N_1 требуется разная гладкость.

6. Решение задачи в дополнительном подпространстве. Уравнение (14) за счет обратимости оператора $\tilde{A}_\lambda$ в подпространстве M_1 разрешается относительно производной по x :

$$\frac{\partial Q_1 u}{\partial x} + \frac{1}{\lambda}(Q_1 - \tilde{A}_\lambda^{-1}) \frac{\partial Q_1 u}{\partial y} = \tilde{A}_\lambda^{-1} Q_1 (A - \lambda B)^{-1} f(x, y). \quad (34)$$

Правая часть этого уравнения и оператор, стоящий при производной по y , не зависят от λ , что и доказывается в следующих леммах.

Лемма 8. Имеет место формула

$$\frac{1}{\lambda}(Q_1 - \tilde{A}_\lambda^{-1})Q_1(\cdot) = HBQ_1(\cdot) - \frac{\langle PB(HB)^p Q_1(\cdot), e_n \rangle}{\langle PB(HB)^{p-1} e_1, e_n \rangle} e_1. \quad (35)$$

Доказательство. Введем обозначение $\frac{1}{\lambda}(Q_1 - \tilde{A}_\lambda^{-1})Q_1 z = Q_1 w$. Отсюда

$$\frac{1}{\lambda}(\tilde{A}_\lambda - Q_1)Q_1 z = \tilde{A}_\lambda Q_1 w,$$

или

$$\frac{1}{\lambda}((A - \lambda B)^{-1} A - I)Q_1 z = (A - \lambda B)^{-1} A Q_1 w.$$

Умножив слева последнее равенство на $(A - \lambda B)$, получим $B(Q_1 z) = A(Q_1 w)$. В силу леммы 1 последнее соотношение корректно, поскольку $\langle PB(Q_1 z), e_n \rangle = 0$ для всех $Q_1 z \in M_1$. Из леммы 1 следует также

$$Q_1 w = HB(Q_1 z) + c e_1 \quad \forall c \in \mathbb{C}. \quad (36)$$

Применив к (36) функционал $\langle PB(HB)^{p-1}(\cdot), e_n \rangle$, получаем:

$$0 = \langle PB(HB)^p Q_1 z, e_n \rangle + c \langle PB(HB)^{p-1} e_1, e_n \rangle.$$

Найденное отсюда значение c подставляется в (36), что и приводит к формуле (35). $\square$

Лемма 9. Функция $\tilde{A}_\lambda^{-1} Q_1 (A - \lambda B)^{-1} f(x, y)$ не зависит от λ .

Доказательство. Пусть

$$\tilde{A}_\lambda^{-1} Q_1 (A - \lambda B)^{-1} f(x, y) = g \in M_1;$$

тогда

$$Q_1 (A - \lambda B)^{-1} f(x, y) = A_\lambda g,$$

или

$$(A - \lambda B) Q_1 (A - \lambda B)^{-1} f(x, y) = A g.$$

При доказательстве леммы 6 введено обозначение $Q_1 (A - \lambda B)^{-1} f(x, y) = Q_1 F$. Из (24) следует

$$(A - \lambda B) Q_1 F = f(x, y) - \sum_{i=1}^p F_i (A - \lambda B) v_i,$$

и в силу (25)

$$(A - \lambda B)Q_1 F = f(x, y) - \sum_{i=1}^{p-1} (F_{i+1} - \lambda F_i) B v_i - \lambda F_p B v_p,$$

или

$$f(x, y) - \sum_{i=1}^{p-1} (F_{i+1} - \lambda F_i) B v_i - \lambda F_p B v_p = A g.$$

Из леммы 6 следует, что левая часть этого равенства не зависит от λ , так что $g = g(x, y)$. $\square$

Решение задачи (34), (10) опирается на спектральные свойства линейного ограниченного оператора (см. [11]).

Пусть Γ — замкнутый спрямляемый жорданов контур, окружающий спектр ограниченного оператора

$$y Q_1 - (x - r) \frac{1}{\lambda} (Q_1 - \tilde{A}_\lambda^{-1}), \quad 0 < r < x_k.$$

Построим оператор

$$R(\mu, r) \equiv \left((y - \mu) Q_1 - (x - r) \frac{Q_1 - \tilde{A}_\lambda^{-1}}{\lambda} \right)^{-1}.$$

Решение задачи (34), (10) имеет вид

$$Q u(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R(\mu, 0) \varphi(\mu) d\mu - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \int_0^x R(\mu, r) \tilde{A}_\lambda^{-1} Q_1 (A - \lambda B)^{-1} f(r, \mu) dr d\mu, \quad (37)$$

в чем нетрудно убедиться непосредственной подстановкой выражения (37) в (34), (10). Итак, получен следующий результат.

Теорема 2. При выполнении условий леммы 7 решение задачи (1), (9), (10) существует, единственно в корневом подпространстве и определяется формулами (32), (33) и (37).

Замечание 2. Число p есть так называемый индекс (см. [15–18]) дифференциального уравнения

$$A \frac{\partial u}{\partial x} = B u(x) + f(x) \quad (38)$$

с необратимой $(n \times n)$ -матрицей A . Иными словами, это длина B -жордановой цепочки присоединенных элементов для A , отвечающей нулевому собственному числу, или «глубина» корневого подпространства оператора $(A - \lambda B)^{-1} A$, $\lambda \in \dot{U}(0)$. В этом корневом подпространстве уравнение (38) алгебраическое, а в прямом дополнении — дифференциальное.

Уравнение (1), рассматриваемое в данной статье, в этом корневом подпространстве является дифференциальным с производными по y , а в прямом дополнении к нему — дифференциальным с производными по x .

7. Пример. В пространстве ℓ_2 решается задача для системы

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_4}{\partial y} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial u_{i+1}}{\partial y} = 0, \quad i = 4, 5, \dots, \quad (39)$$

с условиями (9), (10).

Пучок $A - \lambda B$ регулярен, так как цепочка $v_1, v_2, \dots$, для которой $A v_1 = 0$, $A v_i = B v_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots$, конечна: $v_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $v_2 = (0, 1, 0, \dots)$ и не существует v_3 . Следовательно, $\dim N_1 = 2$.

Вычисления приводят к разложению $\ell_2 = M_1 \dot{+} N_1$, а именно,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_3 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 + u_3 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix};$$

здесь первый вектор справа принадлежит M_1 , второй — N_1 . Условие (9) таково:

$$u_1(x, 0) + u_3(x, 0) = \psi_1(x), \quad u_2(x, 0) = \psi_2(x), \quad (40)$$

а условие (10) —

$$u_i(0, y) = \varphi_i(y), \quad i = 3, 4, \dots \quad (41)$$

Система в N_1 , т.е. система (23), имеет вид

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(u_1 + u_3)}{\partial y} = -\frac{\partial u_2}{\partial x},$$

откуда с учетом условий (40) определяются функции

$$u_2(x, y) = u_2(x) = \psi_2(x), \quad u_1(x, y) + u_3(x, y) = \psi_1(x) - \psi_2'(x)y. \quad (42)$$

Решение задачи в M_1 , построенное по формуле (37), таково:

$$u_i(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} x^j \oint_{\Gamma} \frac{\varphi_{i+j}(\mu)}{(y-\mu)^{j+1}} d\mu, \quad (43)$$

где Γ — окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

Если дополнительно предположить существование непрерывных производных от $\varphi_k(y)$ порядка $k-2$, $k = 3, 4, \dots$, то из (43) следует

$$u_i(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \varphi_{i+j}^{(j)}(y), \quad i = 3, 4, \dots$$

Окончательно, решение задачи (39), (40), (41) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \psi_1(x) - \psi_2'(x) - \varphi_3(y) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{\infty} x^j \oint_{\Gamma} \frac{\varphi_{j+3}(\mu)}{(y-\mu)^{j+1}} d\mu, \\ u_2(x, y) &= \psi_2(x), \\ u_i(x, y) &= \varphi_i(y) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{\infty} x^j \oint_{\Gamma} \frac{\varphi_{i+j}(\mu)}{(y-\mu)^{j+1}} d\mu, \quad i = 3, 4, \dots \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1980.
2. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.
3. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. — М.: МЦНМО, 1998.
4. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.
5. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. — Новосибирск: Научная книга, 1998.
6. Zubova C. П. Сингулярное возмущение линейных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной/ Дисс на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Воронеж, 1973.
7. Zubova C. П. Свойства возмущенного фредгольмовского оператора// в кн.: Решение дифференциального уравнения с фредгольмовским оператором при производной. — Воронеж: ВГУ, 1991.
8. Zubova C. П. Решение задачи Коши для двух дифференциально-алгебраических уравнений с фредгольмовым оператором// Диффер. уравн. — 2005. — 41, № 10. — С. 1410–1412.
9. Zubova C. П. Решение однородной задачи Коши для уравнения с нетеровым оператором при производной// Докл. РАН. — 2009. — 428, № 4. — С. 444–446.
10. Zubova C. П., Чернышов К. И. О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной// в кн.: Дифференциальные уравнения и их применение. — Вильнюс: Ин-т физ. мат. АН Лит. ССР, 1976. — 14. — С. 21–39.

11. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
12. Нгуен Хак Диен, Чистяков В. Ф. О моделировании с использованием дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. програм. — 2013. — 6, № 1. — С. 98–111.
13. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — 18, № 1. — С. 3–50.
14. Чистяков В. Ф., Щеглова А. А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск: Наука, 2003.
15. Campbell S. L. Singular Systems of Differential Equations. — London: Pitman, 1980.
16. Kunkel P., Mehrmann V. Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solutions. — Zürich: EMA, 2006.
17. Poincaré H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation// Acta Math. — 1885. — 7. — P. 259–380.
18. Wade S. M., Paul I. B. A differentiation index for partial differential algebraic equations// SIAM J. Sci. Comp. — 2000. — 21, № 6. — P. 2295–2316.

Зубова Светлана Петровна

Воронежский государственный университет

E-mail: spzubova@mail.ru

Мохамад Абдулфтах Хосни

Воронежский государственный университет

E-mail: abdulftah.hosni90@gmail.com

Усков Владимир Игоревич

Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова

E-mail: vum1@yandex.ru