Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Илолов, Дробные линейные интегро-дифференциальные уравнения Вольterra в банаховых пространствах, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 173, 58–64

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-173-58-64>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:11:10

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 173 (2019). С. 58–64
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-173-58-64

УДК 517.983.5, 517.968.7

ДРОБНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2019 г. М. И. ИЛОЛОВ

Аннотация. В работе представлены основы теории дробных линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра типа свертки в банаховых пространствах. Установлено, что существование дробного резольвентного оператора для таких уравнений равносильно корректности постановки начальной задачи для них. В рамках этого подхода доказана теорема типа Хилле—Иосида.

Ключевые слова: дробная производная Капуто, дробная резольвента, интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра, функция Миттаг-Леффлера, теорема Хилле—Иосида, дробное резольвентное уравнение.

FRACTIONAL LINEAR VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN BANACH SPACES

© 2019 M. I. ILOLOV

ABSTRACT. The paper presents the foundations of the theory of linear fractional Volterra integro-differential equations of convolution type in Banach spaces. It is established that the existence of a fractional resolvent operator for such equations is equivalent to the well-posedness of the formulation of the initial problem for them. Within the framework of this approach, a theorem of the Hille–Yosida type is proved.

Keywords and phrases: Caputo fractional derivative, fractional resolvent, Volterra integro-differential equation, Mittag-Leffler function, Hille–Yosida theorem, fractional resolvent equation.

AMS Subject Classification: 45D05, 34A08

1. Введение. Аппарат дробных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных вполне адекватно описывает эволюцию фрактальных физических явлений и процессов, позволяя учитывать эредитарные свойства типа гистерезиса, усредненно влияющие на текущее состояние системы.

Интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра рассматривались в [5, 8, 9] в качестве интерполяции между моделями обычного потока тепла (параболическая задача) и потока тепла Гуртина—Пипкина (гиперболическая задача). Позднее в [3] рассматривалась иная интерполяционная ситуация, когда начально-краевая задача для уравнения Вольтерра является моделью теории упругости.

В [9] изучались продольные движения упругой балки равномерного поперечного сечения длины l с закрепленными концами. Соответствующая граничная задача для динамического уравнения имеет вид

$$u_{tt}(x, t) = \sigma_x(x, t) + b(x, t), u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

где u — перемещение, σ — напряжение и b — внешние силы. Предполагается, что для $t \leq 0$ балка находится в состоянии покоя. Соотношения, связывающие напряжения $\sigma(x, t)$ и деформации $u_x(x, t)$, являются предметом анализа различных теорий. В линейной теории вязкоупругости определяющим соотношением является уравнение

$$\sigma(x, t) = b_1 u_x(x, t) - \int_0^t a(t - \tau) u_x(x, \tau) d\tau, \quad (2)$$

которое отражает свойство памяти. Здесь b_1 — положительная постоянная и a — положительная невозрастающая функция.

В физике твердого тела таким соотношением является уравнение Кельвина—Фойгта

$$\sigma(x, t) = d u_x(x, t) + c u_{xt}(x, t), \quad (3)$$

где d, c — положительные постоянные.

Подставляя (2) и (3) в уравнение (1), получаем эволюционное уравнение, причем в случае (2) имеем конечную скорость распространения, а в случае (3) — бесконечную. В обоих случаях решения задачи (1) асимптотически устойчиво.

Интерполяционная модель задается формулой

$$\sigma(x, t) = e u_x(x, t) + \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t - \tau)^{-\alpha} b(t - \tau) u_x(x, \tau) d\tau, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4)$$

где $e > 0$, Γ — гамма-функция Эйлера.

В случае $\alpha \rightarrow 0$ формула (4) превращается в (2) с $b_1 = l + b(0)$ и $a(t) = -b(t)$, а в случае $\alpha \rightarrow 1$ — в (3) с $d = e$ и $c = b(0)$.

Подстановка (4) в (1) дает задачу с бесконечной скоростью распространения и асимптотически устойчивым решением, если выполнены соответствующие предположения относительно b .

В [9] дана абстрактная формулировка соответствующей задачи для ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.

В наиболее общей постановке задача типа (4) можно исследовать путем сведения к дробным интегро-дифференциальным уравнениям в банаховом пространстве.

В настоящей работе рассматривается начальная абстрактная задача вида

$${}^c D_t^\alpha u(t) = A u(t) + \int_0^t B(t - s) u(s) ds + f(t), \quad u(0) = u_0, \quad (5)$$

где ${}^c D_t^\alpha$ — дробный дифференциальный оператор Капуто, $0 < \alpha < 1$, A — замкнутый линейный оператор, плотно определенный в банаховом пространстве X , $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ — такое семейство линейных замкнутых операторов, что $D(B(t)) \supset D(A)$ для всех $t \geq 0$, функции $B(t)x$ сильно измеримы по $x \in D(A)$. Соответствующая начальная задача для интегро-дифференциальных уравнений целых порядков подробно изучена в [1, 6, 10]. В [2, 7] рассматриваются различные частные случаи интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка.

Интерес к задачам типа (5) обусловлен их широким применением в различных областях физики, химии, биологии и др. Например, как установлено в [6], дробные дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения описывают аномальную диффузию для различных фрактальных объектов дробной размерности (аморфные полупроводники, сильно пористые неоднородные материалы, космические лучи сверхвысокой энергии) с учетом памяти и других наследственных свойств. Известны также приложения в электрохимии, реологии и популяционной динамике.

2. Предварительные сведения. В этом разделе вводим некоторые определения, обозначения и предварительные факты, необходимые в дальнейшем. Пусть $\alpha > 0$ и $m = [\alpha]$ означает наименьшее целое число, большее или равное α . Пусть X — банахово пространство, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Через

$L^1((0, T); X)$ обозначим пространство всех интегрируемых по Бохнеру функций $u : (0, T) \rightarrow X$, которое является банаховым пространством с нормой

$$\|u\|_1 = \int_0^T \|u(t)\| dt.$$

Обозначим через $C([0, T]; X)$ (соответственно, $C^1([0, T]; X)$) банаховы пространства непрерывных (соответственно, непрерывно дифференцируемых) функций $u : [0, T] \rightarrow X$ ($u' : [0, T] \rightarrow X$) с нормами

$$\|u\|_C = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X, \quad \|u\|_{C^1} = \sup_{t \in [0, T]} (\|u(t)\|_X + \|u'(t)\|_X).$$

Обозначим через $\rho(A)$ резольвентное множество оператора A , т.е. множество всех комплексных чисел λ , для которых $(\lambda I - A)^{-1}$ является линейным ограниченным оператором на X . Оператор $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ называется резольвентным оператором оператора A . Введем обозначение $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Для свертки двух функций f и g используется сокращение

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau.$$

Через I будем обозначать один из промежутков $(0, T)$ или $[0, T]$ либо $\mathbb{R}_+$. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Пространство Соболева определяется следующим образом:

$$W^{m,p}(I, X) = \left\{ u \mid \exists \varphi \in L^1(I, X) : u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} * \varphi(t), t \in I \right\}.$$

Заметим, что здесь $\varphi(t) = u^{(m)}(t)$, $c_k = u^{(k)}(0)$.

Определение 1. Дробный интеграл Римана—Лиувилля порядка α определяется равенством

$$J_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} u(\tau) d\tau, \quad u \in L^1((0, T); X), \quad (6)$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера.

Интеграл Римана—Лиувилля (6) может быть записан в виде

$$J_t^\alpha u(t) = (g_\alpha * u)(t), \quad (7)$$

где

$$g_\alpha = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Полагая $J_t^0 u(t) = u(t)$ и учитывая (7), получим полугрупповое свойство для J_t^α :

$$J_t^\alpha J_t^\beta = J_t^{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \geq 0. \quad (8)$$

Определение 2. Дробная производная Римана—Лиувилля порядка α определяется равенством

$$D_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t (t - \tau)^{m-\alpha-1} u(\tau) d\tau, \quad (9)$$

где $u \in L^1((0, T); X)$, $g_{m-\alpha} * u \in W^{m,1}((0, T); X)$. Если $\alpha = m$, $m \in \mathbb{N}$, то $D_t^m \equiv d^m/dt^m$.

Дифференциальный оператор Римана—Лиувилля D_t^α является левым обратным для интегрального оператора J_t^α , однако в общем случае не является правым обратным, так что

$$D_t^\alpha J_t^\alpha u = u, \quad u \in L^1((0, T); X), \quad (10)$$

$$(J_t^\alpha D_t^\alpha u)(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{\infty} (g_{m-\alpha} * u)^{(k)}(0) g_{\alpha+k+1-m}(t), \quad (11)$$

где $u \in L^1((0, T); X)$, $g_{m-\alpha} * a \in W^{m,1}((0, T); X)$.

Определение 3. Дробная производная Капуто порядка α определяется равенством

$${}^C D_t^\alpha u(t) = D_t^\alpha \left[u(t) - \sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)}(0) g_{k+1}(t) \right], \quad (12)$$

где $u \in L^1((0, T); X) \cap C^{m-1}((0, T); X)$, $g_{m-\alpha} * u \in W^{m,1}((0, T); X)$.

Дифференциальный оператор Капуто также является левым обратным для интегрального оператора J_t^α , однако в общем случае не является правым обратным, так что

$${}^C D_t^\alpha J_t^\alpha u = u, \quad u \in L^1((0, T); X), \quad (13)$$

$$(J_t^\alpha {}^C D_t^\alpha u)(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0) g_{k+1}(t), \quad (14)$$

где $u \in L^1((0, T); X) \cap C^{m-1}((0, T); X)$, $g_{m-\alpha} * u \in W^{m,1}((0, T); X)$.

В равенствах (6), (9) и (12) интегралы понимаются в смысле Бохнера.

Определим преобразование Лапласа для дробной производной Капуто в виде

$$L({}^C D_t^\alpha)(\lambda) = \lambda^\alpha \hat{u}(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0) \lambda^{\alpha-1-k},$$

где $\hat{u}(\lambda)$ — преобразование Лапласа функции $u(t)$, т.е.

$$\hat{u}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(t) dt, \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega,$$

где $\operatorname{Re} \lambda$ — действительная часть комплексного числа λ . Наиболее полезными в дальнейшем являются следующие случаи:

- (1) $0 < \alpha \leq 1$, $L({}^C D_t^\alpha u)(\lambda) = \lambda^\alpha \hat{u}(\lambda) - \lambda^{\alpha-1} u(0)$;
- (2) $1 < \alpha \leq 2$, $L({}^C D_t^\alpha u)(\lambda) = \lambda^\alpha \hat{u}(\lambda) - \lambda^{\alpha-1} u(0) - \lambda^{\alpha-2} u'(0)$.

Определение 4. Функция определенная с помощью равенства

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad z \in \mathbb{C},$$

называется *функцией Миттаг-Леффлера*.

Функция Миттаг-Леффлера связана с интегралом Лапласа следующим образом:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\omega t^\alpha) dt = \frac{\lambda^{\alpha-\beta}}{\lambda^\alpha - \omega}, \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega^{1/\alpha}, \quad \omega > 0.$$

Для этой функции имеют место следующие асимптотические представления:

$$E_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\alpha} z^{1-\beta/\alpha} \exp(z^{1/\alpha}) + e_{\alpha,\beta}(z), \quad |\arg z| \leq \frac{\alpha\pi}{2},$$

$$E_{\alpha,\beta}(t) = e_{\alpha,\beta}(z), \quad |\arg(-z)| < \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\pi,$$

где

$$\varepsilon_{\alpha,\beta}(z) = - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z^{-n}}{\Gamma(\alpha-n)} + O(|z|^{-N}), \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Для операторной функции Миттаг-Леффлера справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $A \in B(X)$. Тогда для любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$ справедливо равенство

$$\mathcal{L}[t^\beta E_{\alpha,\beta}(At^\alpha)] = \lambda^{\alpha-\beta}(\lambda^\alpha - A)^{-1},$$

если $R_{e\lambda} > \|A\|^{1/\alpha}$.

Доказательство. Для $R_{e\lambda} > \|A\|^{1/\alpha}$ имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k \lambda^{-(k+1)} = (\lambda^\alpha - A)^{-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(At^\alpha)] &= \mathcal{L}\left[t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}\right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \mathcal{L}[t^{\alpha k + \beta - 1}]}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \lambda^{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} A^k \lambda^{-(k+1)\alpha} = \lambda^{\alpha-\beta}(\lambda^\alpha - A)^{-1}. \quad \square \end{aligned}$$

Отметим также следующие свойства функции Миттаг-Леффлера:

(E1) Пусть $E_{\alpha_1}(z) = E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}$, $\alpha > 0$. Тогда

$$\frac{dE_\alpha(z)}{dz} = \alpha^{-1} E_{\alpha,\alpha}(z).$$

(E2) Для $0 < \alpha < 1$ и любого действительного числа a справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_0^{t+s} \frac{E_\alpha(a\tau^\alpha) d\tau}{(t+s+\tau)^\alpha} - \int_0^t \frac{E_\alpha(a\tau^\alpha) d\tau}{(t+s+\tau)^\alpha} - \int_0^s \frac{E_\alpha(a\tau^\alpha) d\tau}{(t+s+\tau)^\alpha} = \\ = \alpha \int_0^t \int_0^t \frac{E_\alpha(a\tau_1^\alpha) E_\alpha(a\tau_2^\alpha) d\tau_1 d\tau_2}{(t+s+\tau_1+\tau_2)^\alpha}, \quad t, s \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что экспоненциальная функция $E_{1,1}(z) = e^z$ обладает полугрупповым свойством $e^{z+v} = e^z \cdot e^v$. Функция $E_\alpha(z)$ не обладает этим свойством. Равенство (15) является характеристическим свойством функции Миттаг-Леффлера в связи с разрешимостью дробного дифференциального уравнения.

3. Основные результаты. Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим вновь начальную задачу

$${}^c D_t^\alpha U(t) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + f(t), \quad u(0) = U_0, \quad (16)$$

где ${}^c D_t^\alpha U(t)$ — дробная производная Капуто, $0 < \alpha < 1$, A — замкнутый линейный оператор плотно определенный в X , $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ — семейство таких линейных замкнутых операторов, что $D(B(t)) \supset D(A)$ для всех $t \geq 0$, функции $B(t)x$ сильно измеримы для $x \in D(A)$ и существует такая скалярная функция из $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$, что

$$\|B(t)x\| \leq b(t)(\|x\| + \|Ax\|)$$

для всех $x \in D(A)$, почти всех $t \geq 0$, $f \in C(\mathbb{R}_+, X)$ и $u_0 \in X$.

Определение 5. Семейство линейных ограниченных операторов $\{S_\alpha(t)\}_t \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, называется *дробным резольвентным оператором* для (16), если выполнены следующие условия:

- (S1) $S_\alpha(t)x \in C(\mathbb{R}_+, X)$, для всех $x \in X$, $S_\alpha(0) = I$;
- (S2) $S_\alpha(t)D(A) \subset D(A)$ для всех $t \geq 0$ для $x \in D(A)$, $AS_\alpha(t)x$ непрерывна и $S(t)x$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}_+$;
- (S3) для всех $x \in D(A)$ и $t \geq 0$ выполняются дробные резольвентные уравнения

$${}^c D_t^\alpha S_\alpha(t)x = AS_\alpha(t)x + \int_0^t B(t-s)S_\alpha(s)x ds, \quad (17)$$

$${}^c D_t^\alpha S_\alpha(t)x = S_\alpha(t)Ax + \int_0^t S_\alpha(t-s)B(s)x ds; \quad (18)$$

(S4) имеет место равенство

$$\int_0^{t+s} \frac{S_\alpha(\tau)x d\tau}{(t+s-\tau)^\alpha} - \int_0^t \frac{S_\alpha(\tau)x d\tau}{(t+s-\tau)^\alpha} - \int_0^s \frac{S_\alpha(\tau)x d\tau}{(t+s-\tau)^\alpha} = \alpha \int_0^t \int_0^s \frac{S_\alpha(\tau_1)S_\alpha(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(t+s-\tau_1-\tau_2)^{1+\alpha}}, \quad (19)$$

где интегралы определены в сильной операторной топологии.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Существует не более одного дробного резольвентного оператора для (16).

Теорема 2. Пусть (16) допускает дробный резольвентный оператор $S_\alpha(t)$ и пусть $u_0 \in X$ и $f \in C(J, X)$, где $J = [0, a]$. Если $u(t)$ является решением задачи (16) на J , то

$$u(t) = S_\alpha(t)U_0 + \int_0^t S_\alpha(t-\tau)f(s)ds \quad (20)$$

для всех $t \in J$.

Решение $u(t)$ интегрального уравнения (20) называется *обобщенным решением* задачи (16).

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть (16) допускает дробный резольвентный оператор. Тогда задача (16) корректно поставлена в обобщенном смысле.

Возникает вопрос о том, для каких начальных значений u_0 и функций f обобщенное решение является решением задачи (16).

Теорема 3. Предположим, что $S_\alpha(t)$ — дробный резольвентный оператор задачи (16). Пусть $u_0 \in D(A)$ и $A \in C(Y, X) \cap L^2(J, X)$ или $f \in W^{1,1}(J, X)$. Тогда решение $u(t)$ уравнения (20) является решением задачи (16).

Следующий результат содержит утверждение о существовании дробного резольвентного оператора для (16) и корректности однородного уравнения

$${}^c D_t^\alpha u(t) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds \quad (21)$$

в смысле С. Г. Крейна (см. [4]).

Теорема 4. Задача (16) допускает дробный резольвентный оператор $S_\alpha(t)$ тогда и только тогда, когда уравнение (21) корректно поставлено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В. В., Ву Дж., Кабирова Г. Р. Корректная разрешимость и спектральные свойства абстрактных гиперболических уравнений с последствием// Совр. мат. Фундам. направл. — 2010. — 35. — С. 44–59.
2. Илолов М., Кучакшоев Х. С. Об абстрактных уравнений с неограниченными нелинейностями и их приложений// Докл. РАН. — 2009. — 428, № 3. — С. 310–312.
3. Илолов М., Кучакшоев Х. С., Гулджонов Д. Н. О дробных линейных уравнениях в банаховых пространствах// Докл. АН Респ. Таджикистан. — 2018. — 61, № 2. — С. 113–119.
4. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
5. Da Prato G., Iannelli M. Linear integro-differential equations in Banach spaces// Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1980. — 62. — P. 207–219.
6. Ilolov M., Kuchakshoev Kh., Puchkov V., Yormamadov Sh. Equation of anomalous diffusion of cosmic rays// 34th Int. Cosmic Ray Conf. (Hague Netherlands, 30 July — 6 August, 2015). — P. 1–7.
7. Jun-Min Wang, Bao-Zhu Guo, Meng-Yin Fu Dynamic behavior of a heat equation with memory// Math. Meth. Appl. Sci. — 2009. — 32. — P. 1287–1310.
8. Grimmer R. Resolvent operators for integral equations in a Banach space// Trans. Am. Math. Soc. — 1982. — 273. — P. 333–349.
9. Grimmer R., Pruss J. On linear Volterra equations in Banach spaces// Comput. Math. Appl. — 1983. — 11, № 1–3. — P. 189–205.
10. Hong-Ming Yin The classical solutions for nonlinear integro-differential equations// J. Integral Eqs. Appl. — 1988. — 1, № 2. — P. 249–262.

Илолов Мамадшо Илолович

Академия наук Республики Таджикистан, Душанбе, Таджикистан

E-mail: ilolov.mamadsho@gmail.com