Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Качалов, Голоморфная регуляризация краевых задач для тихоновских систем, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 173, 65–71

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-173-65-71>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:02:28

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 173 (2019). С. 65–71
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-173-65-71

УДК 517.925

ГОЛОМОРФНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТИХОНОВСКИХ СИСТЕМ

© 2019 г. В. И. КАЧАЛОВ

Аннотация. Одним из направлений развития метода регуляризации С. А. Ломова является подход, связанный с голоморфной регуляризацией сингулярно возмущенных задач, с помощью которого можно строить решения таких задач в виде сходящихся в обычном смысле рядов по степеням малого параметра. Для краевых задач весьма актуальной является проблема псевдоголоморфного продолжения решений, чтобы все утверждения носили глобальный характер. В работе исследована краевая задача для тихоновской системы и приведены условия существования ее псевдоголоморфного решения.

Ключевые слова: голоморфная регуляризация, псевдоголоморфное решение, тихоновская система, псевдоголоморфное продолжение, существенно особое многообразие.

HOLOMORPHIC REGULARIZATION OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR TIKHONOV SYSTEMS

© 2019 V. I. KACHALOV

ABSTRACT. One of directions in the development of Lomov's regularization method is the approach related to holomorphic regularization of singularly perturbed problems, which allows one to construct solutions to such problems in the form of series in powers of a small parameter converging in the usual sense. For boundary-value problems, the problem of pseudoholomorphic continuation of solutions is very urgent. In this paper, we examine a boundary-value problem for a Tikhonov system and give conditions for the existence of its pseudoholomorphic solution.

Keywords and phrases: holomorphic regularization, pseudoholomorphic solution, Tikhonov system, pseudoholomorphic continuation, essentially singular manifold.

AMS Subject Classification: 34E05, 34E20

1. Введение. В настоящее время основным асимптотическим методом решения нелинейных сингулярно возмущенных задач является метод пограничных функций Васильевой—Бутузова—Нефедова (см. [1, 2]). Он базируется на теоремах А. Н. Тихонова о предельном переходе (см. [1]) с использованием метода дифференциальных неравенств Чаплыгина и Нагумо (см. [2]). Для решения краевых задач в первую очередь нужно доказать существование решений на всем промежутке задания уравнения. В большинстве случаев это делается с привлечением понятий верхнего и нижнего решений (см. [9]). С другой стороны, весьма актуальным является вопрос о гладкости решений дифференциальных уравнений по сингулярно входящему параметру. В частности, в теоретической физике известен так называемый «аргумент Дайсона» (см. [10]), суть которого состоит в том, что решение сингулярно возмущенной задачи неаналитично по малому параметру (например, по гравитационной постоянной). Метод регуляризации С. А. Ломова (см. [7, 8]) решает эту проблему следующим образом: при выделении существенно особого многообразия, порожденного точкой $\varepsilon = 0$, регулярная часть решения оказывается аналитической в этой точке.

Такие решения названы С. А. Ломовым псевдоаналитическими (псевдоголоморфными; см. [6, 8]), и для их построения привлекался как аппарат теории пространств векторов экспоненциального типа (см. [6]), так и метод голоморфной регуляризации (см. [3, 4]).

В данной работе изучается краевая задача для тихоновской системы с одной медленной и одной быстрой переменной (см. [1]). Для обоснования существования решения на всем промежутке применяется алгоритм псевдоголоморфного продолжения решения. В итоге строится решение в виде ряда по степеням малого параметра, сходящегося в обычном смысле, с коэффициентами, сингулярным образом зависящими от параметра.

2. Обобщение теоремы Пуанкаре о разложении на сингулярно возмущенные системы. Принципиальное отличие теории регулярных возмущений от сингулярной теории в первую очередь состоит в том, что первая является «аналитической», а вторая — «асимптотической». Поясним сказанное. Пусть имеется система

$$v' = f(t, v, \varepsilon), \quad (1)$$

в которой правая часть является аналитической в точке $P_0(t_0, v_0, 0)$. Тогда, как следует из теоремы Пуанкаре о разложении, система уравнений (1) имеет единственное решение $v(t, \varepsilon)$, аналитическое в точке $\tilde{P}_0(t_0, 0)$ и удовлетворяющее начальному условию $v(t_0, \varepsilon) = v_0$. Ожидать того же от системы

$$\varepsilon v' = f(t, v) \quad (2)$$

в общем случае нельзя («аргумент Дайсона»), так как малый параметр ε входит в уравнение сингулярным образом. Поэтому для систем вида (2) строились в основном асимптотические решения, а теорию сингулярных возмущений называли теорией асимптотического интегрирования (см. [1, 7]). Так что же наследует аналитическое (даже целое) вхождение малого параметра в систему (2)? Оказывается, что при достаточно общих ограничениях на вектор-функцию $f(t, v)$ сингулярно возмущенная система (2) имеет аналитические по ε интегралы (см. [3–5]).

Рассмотрим на отрезке $[0, T]$ тихоновскую систему с одной медленной и одной быстрой переменной:

$$\begin{cases} y' = f(t, y, w), \\ \varepsilon w' = g(t, y, w) \end{cases} \quad (3)$$

с краевыми условиями

$$y(0, \varepsilon) = 0, \quad y(T, \varepsilon) = 0. \quad (4)$$

Условие (α). Функции $f(t, y, w)$ и $g(t, y, w)$ являются аналитическими на замкнутой ограниченной односвязной области $\bar{\Omega}_{tyw} \subset \mathbb{R}^3$, $g(t, y, w) \neq 0$ для всех $(t, y, w) \in \Omega_{tyw}$ и $g(t, y, w) = 0$ на границе Λ этой области. Будем также предполагать, что $[0, T] \subset \Omega_{tyw}$.

Обозначим через $\hat{w}(t, y)$ корень уравнения $g(t, y, w) = 0$ и предположим, что начальная задача

$$y' = f(t, y, \hat{w}(t, y)), \quad y(0) = 0 \quad (5)$$

имеет аналитическое на всем отрезке $[0, T]$ решение $\bar{y}(t)$. Назовем это **условием (β)**.

Напомним, что в теории тихоновских систем (см. [1, 2]) задача Коши (5) получается в результате вырождения исходной системы.

В соответствии с методом голоморфной регуляризации (см. [3]) перейдем от нелинейной системы (3) к линейному уравнению ее интегралов

$$\varepsilon LU + g(t, y, w)U_w = 0, \quad (6)$$

где $L = \partial_y + f\partial_y$ — линейный дифференциальный оператор первого порядка в частных производных. Считая оператор L подчиненным оператору $g\partial_w$, будем искать решение уравнения (6) в виде регулярного ряда по степеням малого параметра:

$$U(t, y, w, \varepsilon) = U_0(t, y, w) + \varepsilon U_1(t, y, w) + \dots + \varepsilon^n U_n(t, y, w) + \dots \quad (7)$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, получим серию задач:

$$\begin{aligned}(g\partial_w)U_0 &= 0, \\ (g\partial_w)U_1 &= -LU_0, \\ &\dots\dots\dots \\ (g\partial_w)U_n &= -LU_{n-1}, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}\tag{8}$$

В качестве решения первого уравнения серии (8) возьмем произвольную функцию $\psi(t, y)$, аналитическую на области $\overline{w}_{ty}$, являющуюся проекцией области $\overline{\Omega}_{tyw}$ на плоскость $\mathbb{R}^2$ переменных (t, y) .

Обозначим через $\tilde{w}$ начальное значение быстрой переменной w и потребуем, чтобы $U_n(t, y, \tilde{w}) = 0$ при $n = 1, 2, \dots$. В итоге имеем

$$U_1(t, y, w) = - \int_{\tilde{w}}^w \frac{L_1 \psi dw_1}{g(t, y, w_1)}, \quad L_1 = \partial_t + f(t, y, w_1) \partial_y; \quad (9a)$$

$$U_2(t, y, w) = \int_{\tilde{w}}^w \left(L_1 \int_{\tilde{w}}^{w_1} \frac{L_2 \psi dw_2}{g(t, y, w_2)} \right) \frac{dw_1}{g(t, y, w_1)}, \quad L_2 = \partial_t + f(t, y, w_2) \partial_y; \quad (9b)$$

$$U_3(t, y, w) = - \int_{\tilde{w}}^w \left(L_1 \int_{\tilde{w}}^{w_1} \left(L_2 \int_{\tilde{w}}^{w_2} \frac{L_3 \psi dw_3}{g(t, y, w_3)} \right) \frac{dw_2}{g(t, y, w_2)} \right) \frac{dw_1}{g(t, y, w_1)}, \quad L_3 = \partial_t + f(t, y, w_3) \partial_y. \quad (9c)$$

.....

Введем обозначения, которые позволят нам упростить запись формул (9):

$$h_k = \frac{1}{g(t, y, w_k)}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad I_k z = \int_{\tilde{w}}^{w_k} z(t, y, w_{k+1}) dw_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

положим $w_0 = w$. В этих обозначениях

$$U(t, y, w, \tilde{w}, \varepsilon) = \psi - \varepsilon I_0(h_1 L_1 \psi) + \varepsilon^2 I_0(h_1 L_1 I_1(h_2 L_2 \psi)) - \varepsilon^3 I_0(h_1 L_1 I_1(h_2 L_2 I_2(h_3 I_3 \psi))) + \dots \quad (10)$$

Чтобы доказать сходимость этого степенного ряда, сформулируем комбинаторную лемму, доказываемую методом математической индукции.

Лемма 1. Если в выражении

$$\left(b_n(x) (b_{n-1}(x) (\dots (b_1(x))_x \dots) \right)_x$$

раскрыть скобки по формуле производной произведения и заменить $b_k^{(s)}(x)$ при $1 \leq k \leq n$, $0 \leq s \leq n$ на $s!$, то полученная сумма будет равна $(2n-1)!!$.

Представим коэффициент U_n ряда (7) с помощью введенных обозначений:

$$U_n = (-1)^n (I_0 I_1 \dots I_{n-1}) \left[h_1 \left(L_1 (h_2 (L_2 \dots (h_n L_n \psi) \dots) \right) \right]. \quad (11)$$

Заметим, что оценка модуля U_n определяется в первую очередь порядком производных, и не имеет значения, по какой переменной производится дифференцирование. Поэтому в операторах $L_k = \partial_t + f(t, y, w_k) \partial_y$ переменные t и y заменим на одну переменную x : $\tilde{L}_k = (1 + f(x, x, w_k)) \partial_x$.

Функция $(1 + f(t, y, w))/g(t, y, w)$ является аналитической в области Ω_{tyw} , поэтому для каждого компакта $\mathcal{K} \subset \Omega_{tyw}$ существует такая константа $C_{\mathcal{K}}$, что

$$|\tilde{b}_k^{(s)}(x)| \leq C_{\mathcal{K}}^s \cdot s!,$$

где $\tilde{b}_k(x) = (1 + f(x, x, w))/g(x, x, w)$, $k = \overline{1, n}$. Поскольку функция $\psi(t, y)$ аналитична на компакте $\overline{w}_{ty}$, то для нее существует такая константа C , что $|\psi^{(s)}(x, x)| \leq C^s \cdot s!$.

Пусть теперь $\tilde{C}_K = \max(C_K, C)$; тогда при $|w| \leq M$ на компакте K имеет место оценка

$$|U_n| \leq \left| \int_{\tilde{w}}^w dw_1 \int_{\tilde{w}}^{w_1} dw_2 \cdots \int_{\tilde{w}}^{w_{n-1}} dw_n \right| \cdot \tilde{C}_K^n \cdot (2n-1)!! \leq \frac{\tilde{C}_K^n (2M)^n (2n-1)!!}{n!},$$

из которой следует сходимость ряда (7) в некоторой окрестности значения $\varepsilon = 0$ (зависящей от компакта K).

Получим два независимых интеграла в области Ω_{tyw} . Положим $\psi(t, y)$ быть равной функции $\varphi(t)$, аналитической на отрезке $[0, T]$ и такой, что $\varphi(0) = 0$, а затем быть равной $(y - \bar{y}(t))$:

$$\begin{aligned} U^{[1]}(t, y, w, \tilde{w}, \varepsilon) &= \varphi(t) - \varepsilon I_0(h_1 \varphi') + \varepsilon^2 I_0(h_1 L_1 I_1(h_2 \varphi')) - \varepsilon^3 I_0(h_1 L_1 I_1(h_2 L_2 I_2(h_3 \varphi'))) + \dots; \\ U^{[2]}(t, y, w, \tilde{w}, \varepsilon) &= y - \bar{y}(t) - \varepsilon I_0(L_1(y - \bar{y}(t))) + \varepsilon^2 I_0(h_1 L_1 I_1(h_2 L_2(y - \bar{y}(t)))) - \dots \end{aligned} \quad (12)$$

В итоге доказана следующая теорема.

Теорема 1. При выполнении условий (α) , (β) система (3) имеет два независимых интеграла, аналитических в точке $\varepsilon = 0$.

Таким образом, интегралы сингулярно возмущенной системы (3) наследуют аналитическую зависимость левой части второго уравнения от ε . В этом и состоит распространение теории Пуанкаре с регулярного на сингулярный случай.

3. Существенно особые многообразия и псевдоголоморфные решения. Пусть $\Psi(\eta)$ — целая функция с асимптотическим значением a_0 , а функция $\varphi(t)$ является аналитической на отрезке $[0, T]$, причем $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(t) < 0$ для всех $t \in [0, T]$. Напомним определение существенно особого многообразия, введенное С. А. Ломовым (см. [8]), предполагая для случая вещественнозначных функций.

Определение 1. Множество

$$\mathfrak{M}_\Psi^\varphi = \left\{ q : q = \Psi(\varphi(t)/\varepsilon), t \in [0, T], \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \right\}$$

называется *существенно особым многообразием*, порождаемым функциями Ψ и φ в точке $\varepsilon = 0$.

В теории метода регуляризации доказано, что при специальном подборе регуляризирующих функций $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t)\}$ решения линейных сингулярно возмущенных систем, после выделения существенно особых многообразий, будут представлены степенными рядами (см. [6, 8]).

Определение 2. Решение $(y(t, \varepsilon), w(t, \varepsilon))$ задачи (3), (4) называется *псевдоголоморфным* в точке $\varepsilon = 0$ на отрезке $[0, T]$, если существуют такие функции $Y(t, \eta, \varepsilon)$ и $W(t, \eta, \varepsilon)$, аналитические по третьей переменной в точке $\varepsilon = 0$, при каждом $t \in [0, T]$ и каждом η из неограниченного множества $\mathfrak{N}$, что для всех $t \in [0, T]$ выполняются равенства

$$\begin{cases} y(t, \varepsilon) = Y(t, \varphi(t)/\varepsilon, \varepsilon), \\ w(t, \varepsilon) = W(t, \varphi(t)/\varepsilon, \varepsilon) \end{cases}$$

для некоторой аналитической на отрезке $[0, T]$ функции $\varphi(t)$.

Для того чтобы решить краевую задачу «методом стрельбы», требуется, как известно, доказать глобальную теорему Коши о существовании решения (см. [2]). Опишем алгоритм псевдоголоморфного продолжения, позволяющий за конечное число шагов достичь правого конца отрезка задания краевой задачи.

Лемма 2. Пусть функции $\Psi(\eta)$ и $\varphi(t)$ таковы, что существенно особое многообразие представляет собой полуинтервал: $\mathfrak{M}_\Psi^\varphi = (a_0, \Psi(0)]$. Если выполнены условия (α) (β) и уравнение

$$\varphi'(t) \int_{\tilde{w}}^w \frac{dw_1}{g(t, \bar{y}(t), w_1)} = \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}$$

имеет решение вида $w = W_0(t, \Psi(\varphi(t)/\varepsilon), \tilde{w})$, где функция $W_0(t, q, \tilde{w})$ является ограниченной и аналитической в области $[0, T] \times \mathfrak{M}_\Psi^\varphi$ при каждом $\tilde{w}$ из некоторого отрезка $[\Delta_1, \Delta_2]$, то решение задачи Коши для системы (3) с начальными условиями $y(0, \varepsilon) = 0$, $w(0, \varepsilon) = \tilde{w}$ псевдоголоморфно продолжается на весь отрезок $[0, T]$.

Доказательство. Перепишем первые интегралы системы (3) в следующем виде:

$$\begin{cases} \tilde{U}^{[1]}(t, y, w, \tilde{w}, \varepsilon) = \varphi(t)/\varepsilon, \\ y = \bar{y}(t) + \varepsilon \tilde{U}^{[2]}(t, y, w, \tilde{w}, \varepsilon), \end{cases} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} U^{[1]}(t, y, w, \tilde{w}, \varepsilon) &= I_0(h_1\varphi') - \varepsilon I_0(h_1 L_1 I_1(h_2\varphi')) + \varepsilon^2 I_0(h_1 L_1 I_1(h_2 L_2 I_2(h_3\varphi'))) - \dots; \\ U^{[2]}(t, y, w, \tilde{w}, \varepsilon) &= I_0(L_1(y - \bar{y}(t))) - \varepsilon I_0(h_1 L_1 I_1(h_2 L_2(y - \bar{y}(t)))) + \dots \end{aligned}$$

Вычислим значения функции Ψ от левой и правой частей первого из уравнений системы (13), $\Psi(\tilde{U}^{[1]}(t, y, w, \tilde{w}, \varepsilon)) = q$, где $q = \Psi(\varphi(t)/\varepsilon)$, и выделим главный член в левой части:

$$\begin{cases} \Psi(I_0(h_1\varphi')) + \varepsilon \Phi(t, y, w, \tilde{w}, \varepsilon) = q, \\ y = \bar{y}(t) + \varepsilon \tilde{U}^{[2]}(t, y, w, \tilde{w}, \varepsilon). \end{cases} \quad (14)$$

Возьмем $a > a_0$ очень близким к a_0 , предположим, что $a_0 < \Psi(0)$, и построим параллелепипед $\Pi = [0, T] \times [a, \Psi(0)] \times [\Delta_1, \Delta_2]$. Очевидно, что для системы (14) выполнены все условия теоремы о неявной функции и при $\varepsilon = 0$:

$$\begin{cases} w = W_0(t, q, \tilde{w}), \\ y = \bar{y}(t). \end{cases}$$

Следовательно, в некоторой окрестности $\sigma_{tq\tilde{w}}$ каждой точки $(t, q, \tilde{w}) \in \Pi$ существует решение

$$\begin{cases} w = W(t, q, \tilde{w}, \varepsilon), \\ y = Y(t, q, \tilde{w}, \varepsilon) \end{cases} \quad (15)$$

системы (14), аналитическое в некоторой окрестности значения $\varepsilon = 0$. Выберем из покрытия $\{\sigma_{tq\tilde{w}}\}$ параллелепипеда Π конечное подпокрытие; тогда функции системы (15) будут аналитическими в наименьшей окрестности $|\varepsilon| < \varepsilon_1$, соответствующей этому подпокрытию. Обозначим через π прямоугольник, являющийся проекцией Π на плоскость переменных (t, q) . Если величина параметра ε в системе (3) удовлетворяет неравенству $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ и кривая $\Gamma = \{(t, q) : q = \Psi(\varphi(t)/\varepsilon), t \in [0, T]\}$ целиком принадлежит π , то решение $(y(t, \varepsilon), w(t, \varepsilon))$ системы (3) представимо в следующем виде:

$$\begin{cases} y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n Y_n(t, \Psi(\varphi(t)/\varepsilon), \tilde{w}), \\ w(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n W_n(t, \Psi(\varphi(t)/\varepsilon), \tilde{w}), \end{cases} \quad (16)$$

причем эти ряды сходятся равномерно на отрезке $[0, T]$ при каждом $\tilde{w} \in [\Delta_1, \Delta_2]$. Если же прямоугольнику π принадлежит только часть кривой Γ , соответствующая $t \in [0, t_1]$, $0 < t_1 < T$, то ряды (16) сходятся равномерно лишь на $[0, t_1]$. Обозначим это решение через $(y^{[0]}(t, \varepsilon), w^{[0]}(t, \varepsilon))$. Чтобы продолжить его вправо, решим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{dy^{[1]}}{dt} = f(t, y^{[1]}, w^{[1]}), \\ \varepsilon \frac{dw^{[1]}}{dt} = g(t, y^{[1]}, w^{[1]}), \quad y^{[1]}(t_1, \varepsilon) = y^{[0]}(t_1, \varepsilon), \quad w^{[1]}(t_1, \varepsilon) = w^{[0]}(t_1, \varepsilon). \end{cases} \quad (17)$$

Для этого запишем систему, аналогичную системе (14):

$$\begin{cases} \tilde{U}^{[1]}(t, y^{[1]}, w^{[1]}, w^{[0]}(t_1, \varepsilon), \varepsilon) = (\varphi(t) - \varphi(t_1))/\varepsilon, \\ y = \bar{y}(t) + \varepsilon \tilde{U}^{[2]}(t, y^{[1]}, w^{[1]}, w^{[0]}(t_1, \varepsilon), \varepsilon). \end{cases} \quad (18)$$

Она задает неявно решение $(y^{[1]}(t, \varepsilon), w^{[1]}(t, \varepsilon))$ тихоновской системы (17). В итоге решение $(y^{[0]}(t, \varepsilon), w^{[0]}(t, \varepsilon))$ псевдоголоморфно продолжится на некоторый отрезок $[t_1, t_2]$ и т. д.

Снова предположим, что регуляризирующая функция $\varphi(t)$ строго монотонно убывает на $[0, T]$ (например, в методе погранфункций $\varphi(t) = t$; см. [1, 2]), и пусть Ψ на интервале $(p_0, \Psi(0))$ строго возрастает (в большинстве случаев — это экспонента; см. [1, 7]).

При продолжении с помощью систем, аналогичных (18), возникает следующая цепочка равенств:

$$\frac{\varphi(t_1)}{\varepsilon} = \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{\varepsilon} = \dots = \frac{\varphi(t_m) - \varphi(t_{m-1})}{\varepsilon} = \dots = \frac{\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})}{\varepsilon}.$$

По формуле Лагранжа

$$\varphi'(\tilde{t}_m)(t_m - t_{m-1}) = \varphi(t_1), \quad \tilde{t}_m \in (t_{m-1}, t_m), \quad m = \overline{2, j}.$$

Поскольку $\varphi(t)$ является аналитической на отрезке $[0, T]$, то $|\varphi'(t)| \leq l$ для всех $t \in [0, T]$, где $l > 0$ — некоторая константа; значит,

$$t_m - t_{m-1} \geq \frac{|\varphi(t_1)|}{l}, \quad m = \overline{1, j}.$$

Поэтому точки $t = T$ можно достичь за конечное число шагов, т.е. решение $(y^{[0]}(t, \varepsilon), w^{[0]}(t, \varepsilon))$ будет продолжено на весь отрезок $[0, T]$. При этом под решением задачи Коши для системы (3) будем понимать совокупность элементов $\{(y^{[m]}(t, \varepsilon), w^{[m]}(t, \varepsilon))\}_{m=1}^j$. Лемма 2 доказана. $\square$

Теорема 2. Если выполнены условия леммы 2, то краевая задача (3), (4) будет иметь решение, псевдоголоморфное в точке $\varepsilon = 0$.

Доказательство. Элемент $(y^{[j]}(t, \varepsilon), w^{[j]}(t, \varepsilon))$, как и все остальные, будет зависеть от $\tilde{w}$, т.е.

$$y^{[j]}(t, \varepsilon) = F^{[j]}(t, (\varphi(t) - \varphi(t_{j-1}))/\varepsilon, \tilde{w}),$$

а, значит, уравнение для определения $\tilde{w}$ имеет следующий вид:

$$F^{[j]}(1, (\varphi(1) - \varphi(t_{j-1}))/\varepsilon, \tilde{w}) = 0.$$

Одно из найденных $\tilde{w}$ подставим в формулы элементов $(y^{[m]}(t, \varepsilon), w^{[m]}(t, \varepsilon))$ и получим решение краевой задачи (3), (4). Теорема 2 доказана. $\square$

Пример. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} y' = w, \\ \varepsilon w' = t^2 + y^2/4 + w^2 - 4; \\ y(0, \varepsilon) = y(1, \varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Можно доказать, что интегралы этой системы существуют в области $\Omega_{tyw} = \{(t, y, w) : t^2 + y^2/4 + w^2 < 4\}$, границей Λ которой служит эллипсоид $t^2 + y^2/4 + w^2 = 4$. В результате применения метода голоморфной регуляризации имеем:

$$\begin{aligned} y^{[1]}(t, \varepsilon) &= \bar{y}(t) + \varepsilon \ln \frac{2A(t)e^{-\bar{y}(t)/\varepsilon}}{(\tilde{w} + A(t))e^{-\bar{y}(t)/\varepsilon} - (\tilde{w} - A(t))e^{\bar{y}(t)/\varepsilon}} + \dots, \\ w^{[1]}(t, \varepsilon) &= A(t) \frac{(\tilde{w} + A(t))e^{-\bar{y}(t)/\varepsilon} + (\tilde{w} - A(t))e^{\bar{y}(t)/\varepsilon}}{(\tilde{w} + A(t))e^{-\bar{y}(t)/\varepsilon} - (\tilde{w} - A(t))e^{\bar{y}(t)/\varepsilon}} + \dots, \end{aligned}$$

где $\bar{y}(t)$ — решение задачи Коши

$$\begin{aligned} y'(t) &= \sqrt{4 - t^2 - y^2(t)/4}, & y(0) &= 0; \\ A(t) &= \sqrt{4 - t^2 - \bar{y}^2(t)/4}; & \tilde{w} &= A(1) \operatorname{th} \frac{\bar{y}(1)}{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Заметим, что регуляризирующая функция $\varphi(t)$ совпадает с решением предельной задачи, существование которого на всем отрезке $[0, 1]$ легко доказать с помощью теоремы Нагумо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.
2. Васильева А. Б., Нефедов Н. Н. Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств Чаплыгина. — М.: Изд-во МГУ, 2007.
3. Качалов В. И. Голоморфная регуляризация сингулярно возмущенных задач // Вестн. МЭИ. — 2010. — № 6. — С. 54–62.
4. Качалов В. И. О голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. мат. мат. физики. — 2017. — 57, № 4. — С. 654–661.
5. Качалов В. И. Об одном методе решения сингулярно возмущенных систем тихоновского типа // Изв. вузов. Мат. — 2018. — № 6. — С. 25–31.
6. Качалов В. И., Ломов С. А. Псевдоаналитические решения сингулярно возмущенных задач // Докл. РАН. — 1994. — 334, № 6. — С. 694–695.
7. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
8. Ломов С. А., Ломов И. С. Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Изд-во МГУ, 2011.
9. Chang K. W., Howes F. A. Nonlinear singular perturbation phenomena: Theory and applications. — New York: Springer-Verlag, 1984.
10. Krivoruchenko M. I., Nadyozhin D. K., Yudin A. V. Hydrostatic equilibrium of stars without electroneutrality constraint // Phys. Rev. D. — 2018. — 97, № 15. — P. 1–20.

Качалов Василий Иванович

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

E-mail: vikachalov@rambler.ru