Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Коровина, В. Ю. Смирнов, Метод повторного квантования и его применение к построению асимптотик решений уравнений нефуксова типа с голоморфными коэффициентами, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 173, 72–85

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-173-72-85>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:09:15

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 173 (2019). С. 72–85
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-173-72-85

УДК 577.951

МЕТОД ПОВТОРНОГО КВАНТОВАНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ПОСТРОЕНИЮ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НЕФУКСОВА ТИПА С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2019 г. М. В. КОРОВИНА, В. Ю. СМЕРНОВ

Аннотация. Целью работы является описание методов ресургентного анализа в применении к построению асимптотик решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами, в том числе метода повторного квантования. В статье приводится классификация различных типов асимптотик в зависимости от основного символа дифференциального оператора. С помощью метода повторного квантования строятся асимптотики решений обыкновенного дифференциального уравнения с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечности.

Ключевые слова: линейное дифференциальное уравнение фуксова типа, иррегулярная особая точка, асимптотика, ресургентная функция, преобразование Лапласа–Бореля, основной символ дифференциального оператора, метод повторного квантования.

RE-QUANTIZATION METHOD AND ITS APPLICATION TO THE CONSTRUCTION OF ASYMPTOTICS FOR SOLUTIONS OF NON-FUCHSIAN-TYPE EQUATIONS WITH HOLOMORPHIC COEFFICIENTS

© 2019 M. V. KOROVINA, V. YU. SMIRNOV

ABSTRACT. In this paper, we apply methods of resurgent analysis (including the re-quantization method) to the construction of asymptotics for solutions of linear ordinary differential equations with holomorphic coefficients. We provide a classification of various types of asymptotics depending on the principal symbol of the differential operator. Using the method of repeated quantization, we construct asymptotics for solutions of an ordinary differential equation with holomorphic coefficients in a neighborhood of infinity.

Keywords and phrases: Fuchsian linear differential equation, irregular singular point, asymptotics, resurgent function, Laplace–Borel transform, principal symbol of a differential operator, re-quantization method.

AMS Subject Classification: 34E99

Введение. Работа посвящена рассмотрению методов построения асимптотик решений обыкновенных дифференциальных уравнения голоморфными коэффициентами с вырождениями, а именно, рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения с голоморфными коэффициентами

$$b_n(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^n u(r) + b_{n-1}(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^{n-1} u(r) + \cdots + b_i(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^i u(r) + \cdots + b_0(r) u(r) = 0; \quad (1)$$

здесь $b_i(r)$ — голоморфные функции.

Если коэффициент при старшей производной $b_n(r)$ обращается в нуль в некоторой точке (без ограничения общности можно считать, что это точка $r = 0$), то уравнение (1), вообще говоря, имеет особенность в нуле. В этом случае нуль может быть регулярной или иррегулярной особой точкой. Проблема представления асимптотики решения уравнения с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярной особой точки впервые была сформулирована А. Пуанкаре в [18]. В этой работе впервые было показано, что решение уравнения с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярной особой точки может разлагаться в асимптотический ряд, и была предпринята попытка суммировать этот ряд с помощью интегрального преобразования Лапласа. При этом использовался частный случай асимптотического разложения решения в окрестности бесконечно удаленной особой точки, полученного в работе Томе [23]. На настоящий момент проблема, сформулированная Пуанкаре, в полной мере не решена. Целью этой статьи является представление современных методов, позволяющих приблизиться к решению проблемы и решить ряд важных задач, к примеру, задачу о построении асимптотического разложения решения в окрестности бесконечно удаленной точки, которая является примером иррегулярной особой точки. Именно частный случай этой задачи и рассматривался Томе в той статье, на которую ссылается Пуанкаре.

В [2] показано, что уравнение (1) может быть сведено к уравнению вида

$$\hat{H}u = H \left(r, -r^k \frac{d}{dr} \right) u = 0, \quad (2)$$

где $\hat{H}$ — дифференциальный оператор с голоморфными коэффициентами

$$H(r, p) = \sum_{i=0}^n a_i(r) p^i, \quad a_n(0) \neq 0,$$

и получена формула для вычисления минимального значения k . В зависимости от этого значения k можно разбить уравнения на три типа, каждому из которых соответствует свой тип асимптотик. К первому типу отнесем те уравнения, для которых $k = 0$; в этом случае имеем невырожденные дифференциальные уравнения, не имеющие особенности в нуле, а их решения являются голоморфными функциями. В случае $k = 1$ уравнения называются уравнениями фуксова типа, являются вырожденными и сводятся к уравнениям с регулярными особенностями. Как известно (см., например, [5]), асимптотики решения в нуле являются конормальными. Они представимы в виде суммы слагаемых вида $(\ln r)^m r^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$, где ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ являются асимптотическими. К третьему типу относятся те уравнения, для которых $k > 1$; это случай уравнений с иррегулярными особенностями, которые называются уравнениями нефуксова типа и подразделяются два класса. К первому классу относятся такие уравнения, что многочлен $H(0, p)$, называемый основным символом, имеет только простые корни; такие уравнения назовем нефуксовыми уравнениями первого типа. Ко второму классу относятся остальные уравнения, т.е. такие нефуксовы уравнения, что основной символ имеет не только простые, но и кратные корни; назовем их нефуксовыми уравнениями второго типа.

Ранее случай нефуксовых уравнений первого типа для линейных уравнений и их систем рассматриваются, например, в таких классических книгах, как [4, 11, 13] и многих других работах. В [1] приводится обзор результатов для случая линейных дифференциальных уравнений и системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В упомянутых работах построены

асимптотические разложения решений нефуксовых уравнения первого типа; они были получены в виде произведений соответствующих экспонент на расходящиеся степенные ряды:

$$\sum_{j=1}^n \exp \left(\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{k-i}^j}{r^{k-i}} \right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i. \quad (3)$$

В частном случае эта асимптотика имеет вид

$$u = \sum_{i=1}^n e^{\alpha_i/r} r^{\sigma_i} \sum_{k=0}^{\infty} a_i^k r^k,$$

где α_i , $i = 1, \dots, n$, — корни полинома $H_0(p)$, σ_j и a_i^k — некоторые комплексные числа.

Однако в случае, если асимптотическое разложение

$$u \approx u_1 + u_2 + \dots + u_n = e^{\lambda_1/r} r^{\sigma_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_1^k r^k + e^{\lambda_2/r} r^{\sigma_2} \sum_{k=0}^{\infty} a_2^k r^k + \dots + e^{\lambda_n/r} r^{\sigma_n} \sum_{k=0}^{\infty} a_n^k r^k \quad (4)$$

имеет, по крайней мере, два слагаемых, отвечающих значениям λ_1 и λ_2 с различными вещественными частями (для определенности будем считать, что $\Re \lambda_1 > \Re \lambda_2$), возникает существенная трудность при интерпретации полученного разложения. Дело в том, что все слагаемые, входящие в первый элемент, отвечающий значению λ_1 (доминантный элемент), имеют больший порядок при $r \rightarrow 0$, чем любое из слагаемых второго (рецессивного) элемента. Поэтому для интерпретации разложения (4) необходимо просуммировать (вообще говоря, расходящийся) ряд, отвечающий доминантному элементу. Рассмотрение рецессивных компонент разложения решения u уравнения (2) важно, в частности, для построения равномерных асимптотик решений в комплексном случае, когда точка r движется по комплексной плоскости, и роли доминантной и рецессивной компонент разложения могут меняться местами. Иными словами, плоскость условно делится на секторы, в которых одна из компонент является главной, а другая рецессивной, а при переходе из одного сектора в другой имеет место смена лидерства (рецессивная становится главной и наоборот). Однако в окрестности границ этих секторов несколько компонент имеют равный порядок, и ни одной из них нельзя пренебречь. Это явление возникает, например, при рассмотрении примера Эйлера (см. [22]), а также при построении асимптотики решения для задачи (1) и вообще для всех нефуксовых асимптотик (3). Это приводит к тому, что исследование асимптотических разложений решений уравнения (1) требует введения регулярного метода суммирования расходящихся рядов для построения равномерных асимптотик решений по переменной r , т.е. представляющие асимптотические разложения не только в определенных секторах, но и во всей окрестности рассматриваемой особой точки.

В конце 1980-х гг. был получен аппарат, пригодный для суммирования подобных рядов, основанный на преобразовании Лапласа—Бореля и понятии ресургентной функции, впервые введенном французским математиком Ж. Экалем (см. [14]). Впоследствии данный аппарат активно применялся в работах Б.-В. Шульце, Б. Ю. Стернина и В. Е. Шаталова для исследования вырождающихся уравнений, получающихся при рассмотрении эллиптических уравнений на многообразиях с особенностями типа клюва, а также для построений асимптотик уравнений с малым параметром. В некоторых случаях им удалось для уравнений с параметром и уравнений с вырождением типа клюва построить асимптотики решений в весовых пространствах Соболева (см. [12, 19, 20]).

Однако в дальнейшем от рассмотрений асимптотик в весовых пространствах Соболева пришлось отказаться. Главная причина состоит в том, что преобразование Лапласа—Бореля, которое является основным в ресургентном анализе, неестественно рассматривать в этих пространствах, поэтому попытки получения существенных результатов при этом подходе вызывали ряд принципиальных сложностей.

В дальнейшем был выбран другой подход, начало которому положила книга [22] В. Е. Шаталова и Б. Ю. Стернина. В этой книге впервые было определено преобразование Лапласа—Бореля, действующее в пространстве функций экспоненциального роста.

Аппарат для интерпретации и построения асимптотических разложений вида (4), основанный на преобразовании Лапласа—Бореля, называется ресургентным анализом. Основная идея ресургентного анализа заключается в том, что формальные преобразования Бореля $\tilde{u}_1(p), \tilde{u}_2(p), \dots$ представляют собой степенные ряды по двойственной переменной p , сходящиеся в окрестности точек $p = \lambda_j$. Обратное преобразование Бореля при этом дает регулярный способ суммирования рядов (3). Однако при этом необходимо доказать бесконечную продолжимость функций $\tilde{u}_j(p)$, т.е. продолжимость вдоль любого пути на римановой поверхности $\tilde{u}_j(p)$, не проходящего через некоторое дискретное множество, зависящее от функции (точное определение понятия бесконечной продолжимости дано ниже). Доказательство этого факта, как правило, представляло большую трудность при применении ресургентного анализа к построению асимптотик решений дифференциальных уравнений. Для уравнений с вырождениями доказательство бесконечной продолжимости получено в работах В. Е. Шаталова и М. В. Коровиной [6, 9, 10]. Этот результат позволяет применять методы ресургентного анализа к построению асимптотик решений линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами.

Благодаря этому результату в [7, 9] были построены равномерные асимптотики решений для случая, когда корни старшего символа $H_0(p) = H(0, p)$ являются простыми. Тем самым вопрос о построении равномерных асимптотик решений для этого случая был закрыт с помощью прямого применения преобразования Лапласа—Бореля к соответствующему уравнению.

Однако методы которые использовались для построения асимптотик решений в случае, когда основной символ имел простые корни, оказались неприменимыми в случае кратных корней, кроме случая уравнений второго порядка. В [16] вопрос о построении асимптотик решений для уравнения второго порядка с произвольными голоморфными коэффициентами решен в общем случае. Также в этой работе решена задача о построении асимптотик решений для уравнения Лапласа на многообразии с особенностью типа клюва.

Для решения проблемы кратных корней в последние годы был создан метод повторного квантования (см. [8]). Этот метод применяется в том случае, когда интегро-дифференциальное уравнение в двойственном пространстве не решается методом последовательных приближений и сводится, в свою очередь, к уравнению с вырождениями типа клюва. В этом случае доказывается теорема о бесконечной продолжимости решения (для обыкновенных дифференциальных уравнений это доказано) и далее еще раз применяется преобразование Лапласа—Бореля и для полученного уравнения строятся асимптотики, которые позволяют найти асимптотики исходного уравнения. С помощью этого метода в настоящее время решен ряд задач для уравнений с вырождениями в случае кратных корней. К примеру, в [15] решена задача о построении асимптотик для случая, когда символ дифференциального оператора, записанный в виде

$$H(r, p) = \sum_{i=0}^n a_i^0 p^i + r \sum_{i=0}^n a_i^1 p^i + r^2 \sum_{i=1}^n a_i^2(r) p^i,$$

где $a_i^2(r)$, $i = 0, \dots, n$, — голоморфные функции, а коэффициенты a_i^j , $j = 1, 2$, $i = 0, \dots, n$, таковы, что все корни многочленов $\sum_{i=0}^n a_i^0 p^i$ и $\sum_{i=0}^n a_i^1 p^i$ различны.

Особый интерес представляет собой вопрос о построении асимптотик решений уравнений с голоморфными коэффициентами на бесконечности

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + a_{n-1}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x) + \dots + a_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i u(x) + \dots + a_0(x) u(x) = 0. \quad (5)$$

Случай бесконечно удаленной особой точки является примером иррегулярной особенности. Эта задача сводится к задаче о построении асимптотики решения в окрестности нуля для линейных дифференциальных уравнений с особенностью типа клюва второго порядка. Задача о построении асимптотик решений обыкновенных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами на бесконечности является классической задачей аналитической теории линейных

Рис. 1. Область голоморфности преобразования Лапласа—Бореля и вычисление обратного преобразования.

дифференциальных уравнений. Одной из первых работ является [23]; позднее в [21] были построены асимптотики для частного случая этой задачи, а именно, для случая, когда основной символ $H_0(p)$ оператора $\hat{H}$, равный $H_0(p) = H(0, p)$, имеет простые корни.

Целью этой статьи является обзор применений методов ресургентного анализа к построению асимптотик решений уравнений с голоморфными коэффициентами, в том числе метода повторного квантования, который применяется для построения асимптотик решений в окрестности бесконечности.

1. Основные определения. В этом разделе даны определения некоторых понятий ресургентного анализа, которые понадобятся ниже. Рассмотрим сектор

$$S_{R, \varepsilon} = \left\{ r \mid -\varepsilon < \arg r < \varepsilon, |r| < R \right\}.$$

Будем говорить, что функция f , аналитическая на $S_{R, \varepsilon}$, имеет не более чем k -экспоненциальный рост, если существуют такие неотрицательные константы C и α , что в секторе $S_{R, \varepsilon}$ выполнено неравенство $|f| < Ce^{\alpha|r|^{-k}}$. Обозначим через $E_k(S_{R, \varepsilon})$ пространство функций, голоморфных в $S_{R, \varepsilon}$ и k -экспоненциально растущих в нуле.

Основным техническим средством для построения теории ресургентных функций является преобразование Лапласа—Бореля. В [22] описано определение и свойства этого преобразования в классе гиперфункций k -экспоненциального роста при $k = 1$.

Обозначим через $E(\tilde{\Omega}_{R, \varepsilon})$ пространство голоморфных функций экспоненциального роста в области

$$\tilde{\Omega}_{R, \varepsilon} = \left\{ p \mid -\frac{\pi}{2} - \varepsilon < \arg p < \frac{\pi}{2} + \varepsilon, |p| > R \right\};$$

через $E(C)$ будет обозначаться пространство целых функций экспоненциального роста.

k -Преобразованием Лапласа—Бореля функции $f(r) \in E_k(S_{R, \varepsilon})$ называется отображение

$$B_k : E_k(S_{R, \varepsilon}) \rightarrow E(\tilde{\Omega}_{R, \varepsilon})/E(C), \quad B_k f = \int_0^{r_0} e^{-p/r^k} f(r) \frac{dr}{r^{k+1}}.$$

Обратное k -преобразование Лапласа—Бореля определяется формулой

$$B_k^{-1} \tilde{f} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} e^{p/r^k} \tilde{f}(p) dp.$$

Контур $\tilde{\gamma}$ изображен на рис. 1. Заметим, что для k -преобразования Лапласа—Бореля верны формулы

$$B_k \circ \left(-\frac{1}{k} r^{k+1} \frac{\partial}{\partial r} \right) f(r) = p B_k f, \quad \frac{\partial}{\partial p} \circ B_k f = -B_k \left(\frac{1}{r^k} f(r) \right). \quad (6)$$

Определение 1. Функция $\tilde{f}$ называется *бесконечно продолжимой*, если для любого числа R существует такое дискретное множество точек Z_R в $\mathbb{C}$, что функция $\tilde{f}$ аналитически продолжается из первоначальной области определения вдоль любого пути длины $< R$, не проходящего через Z_R .

Определение 2. Элемент f пространства $E_k(S_{R,\varepsilon})$ называется *k -ресургентной функцией*, если его k -преобразование Лапласа—Бореля $\tilde{f} = B_k f$ является бесконечно продолжимым.

2. Решение задачи о построении асимптотик решений уравнений с голоморфными коэффициентами в случае простых корней основного символа. Рассмотрим уравнение вида

$$H \left(r, -r^k \frac{d}{dr} \right) u = 0, \quad (7)$$

где символ оператора $\hat{H}$ имеет вид

$$H(r, p) = \sum_{k=0}^m a_k(r) p^k.$$

Назовем основным символом оператора $\hat{H}$ функцию $H_0(p) = H(0, p)$.

Теорема 1 ((см. [6, 7]). *Решение уравнения (7) является ресургентной функцией. Если полином $H_0(p)$ имеет корни первого порядка в точках $p_1, \dots, p_m$, то асимптотика решения однородного уравнения имеет*

$$u(r) = \sum_{j=0}^m \exp \left(\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{k-i}^j}{r^{k-i}} \right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i, \quad (8)$$

где сумма берется по объединению всех корней полинома $H_0(p)$.

Эта теорема доказывается с помощью метода последовательных приближений, который применяется к уравнению (7), которое преобразовано с помощью преобразования Лапласа—Бореля. Запишем

$$H \left(r, -r^k \frac{d}{dr} \right) = H_0 \left(-r^k \frac{d}{dr} \right) + \sum_{j=0}^{k-1} r^j H_j \left(-r^k \frac{d}{dr} \right) + r^k H_k \left(r, -r^k \frac{d}{dr} \right);$$

здесь $H_j(p) = \sum_{i=0}^m \alpha_i^j p^i$ — многочлен с числовыми коэффициентами α_i^j и $H_m \left(r, -r^k \frac{d}{dr} \right)$ — соответствующий дифференциальный оператор с голоморфными коэффициентами. Выполнив k -преобразование Лапласа Бореля получим уравнение

$$H_0(p) \tilde{u}(p) + B_{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} r^j H_j \left(-r^k \frac{d}{dr} \right) u(r) + B_{k-1} r^k H \left(r, \left(r^k \frac{d}{dr} \right) \right) g(r) = \tilde{f}(p). \quad (9)$$

Если корни многочлена $H_0(p)$ являются простыми, то для построения асимптотик решений уравнения (9) можно применить метод последовательных приближений (см. [7, 9]).

3. Решение задачи о построении асимптотик решений уравнений с голоморфными коэффициентами в случае кратных корней основного символа. Метод повторного квантования. В этом разделе мы применим метод повторного квантования к решению задачи о построении асимптотик решений уравнения (5) с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечно удаленной особой точки.

Будем считать, что коэффициенты $a_i(x)$ регулярны на бесконечности; это означает, что существует такая внешность круга $|x| > a$, в которой функции $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, разлагаются в сходящиеся степенные ряды

$$a_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_i^j}{x^j}.$$

Целью нашего исследования является построение асимптотики решения уравнения (5) в окрестности бесконечности. Эта задача в теории обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо известна; частные случаи этой задачи рассматриваются, например, в [11, 13, 18, 21, 23] и др. Сложность решения этой задачи обусловлена тем, что бесконечно удаленная точка для этого уравнения является иррегулярной особой точкой. Одним из методов, используемых для построения асимптотик решений уравнений с иррегулярными особенностями является ресургентный анализ, который основан на интегральном преобразовании Лапласа—Бореля. Применим этот метод для доказательства основной теоремы в настоящей работе.

Задача (5) путем замены $x = 1/r$ сводится к уравнению с вырождением типа клова второго порядка в нуле, которое можно записать в виде

$$H\left(r, -r^2 \frac{d}{dr}\right) u = 0, \quad \text{где} \quad H(r, p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(r) p^i. \quad (10)$$

Здесь, как и ранее, через $a_i(r)$ обозначены функции, голоморфные в некоторой окрестности нуля.

Это уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^n u + a_0 r^m \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^k u + a_1 r^{m+1} \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^{k-1} u + a_2 r^{m+2} \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^{k-2} u + \\ & + \dots + b_{k+1} r^{m+k} u + \sum_{i=1}^m r^i \sum_{j=h_i}^{n-1} b_j^i \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^j u + r^{h+1} \sum_{i=0}^{n-1} a_i(r) \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^i u = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

здесь $h_j + j > m_k + k$. Назовем число $h = m_k + k$ *индексом сингулярности*; иными словами, члены вида $a_j^i r^j \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^i$ являются младшими членами при $j + i > h$. Разделим младшие члены на два типа. К первому типу отнесем члены, для которых $h \geq j$, а ко второму — такие, что $h < j$.

Без ограничения общности будем считать, что в уравнение входит только одно слагаемое первого типа и одно слагаемое второго типа, а именно,

$$\begin{aligned} & \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^n u + a_0 r^m \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^k u + a_1 r^2 \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^{k-1} u + \\ & + a_2 r^3 \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^{k-2} u + \dots + a_{i-1} r^i \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^{k-i+1} u + \dots + a_k r^{k+1} u + \\ & + b_1 r^i \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^{k-i+m+\beta_1} u + b_2 r^{k+1+\beta_2} \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^{m_0} u = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь два последних слагаемых относятся к младшим членам; при этом одно из них относится к первому типу, а другое — ко второму. Будем искать асимптотику решения уравнения (12) в окрестности нуля с помощью метода повторного квантования.

Выполнив преобразование Лапласа—Бореля уравнения (12), получим уравнение

$$\begin{aligned}
& p^n u(p) + a_0(-1)^m \int \dots \int p^k u(p) dp_m + a_1(-1)^{m+1} \int \dots \int p^{k-1} u(p) dp_{m+1} + \dots + \\
& + a_{i-1} \int \dots \int p^{k-i+m} u(p) dp_1 \dots dp_i + \dots + a_{k+1} \int \dots \int u(p) dp_1 \dots dp_{k+m} + \\
& + b_1 \int \dots \int p^{k-i+m+\beta_1} u(p) dp_1 \dots dp_i + b_2 \int \dots \int p^{m_0+m} u(p) dp_1 \dots dp_{k+\beta_2+1} = f(p). \quad (13)
\end{aligned}$$

Здесь через $f(p)$ обозначена произвольная голоморфная функция.

Продифференцировав уравнение $k+m$ раз по p , получим

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d}{dp}\right)^{k+m} p^n u(p) + a_0(-1)^m \left(\frac{d}{dp}\right)^k p^k u(p) + a_1 \left(\frac{d}{dp}\right)^{k-1} p^{k-1} u(p) + \dots + \\
& + a_{i-1} \left(\frac{d}{dp}\right)^{k-i} p^{k-i} u + \dots + a_k \frac{d}{dp} p u(p) + a_{k+1} u(p) + \\
& + b_1 \left(\frac{d}{dp}\right)^{k+m-i} p^{k-i+m+\beta_1} u + b_2 \int \dots \int p^{m_0+m} u(p) dp_1 \dots dp_{\beta_2} = \left(\frac{d}{dp}\right)^{m+k} f(p). \quad (14)
\end{aligned}$$

Домножив на $p^{k(n-k-m)/m}$, можно переписать уравнение (14) в виде

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{m}{n-k-m} p^{(n-k)/m} \frac{d}{dp}\right)^{k+m} u_1(p) + c \left(-\frac{m}{n-k-m} p^{(n-k)/m} \frac{d}{dp}\right)^k u(p) + \\
& + a_1^1 p^{(n-k-m)/m} \left(\frac{m}{n-k-m} p^{(n-k)/m} \frac{d}{dp}\right)^{k-1} u(p) + \\
& + a_2^1 p^{2(n-k-m)/m} \left(\frac{m}{n-k-m} p^{(n-k)/m} \frac{d}{dp}\right)^{k-2} u(p) + \dots + a_k^1 p^{k(n-k-m)/m} m u(p) + \\
& + \sum_{j=0}^{k+m-i} b_1^j p^{\beta_1-(m-j-i)(n-k-m)/m} \left(\frac{m}{n-k-m} p^{(n-k)/m} \frac{d}{dp}\right)^{k+m-i-j} u + \\
& + p^{k(n-k-m)/m} b_2 \int \dots \int p^{m_0} u(p) dp_1 \dots dp_{\beta_2} = p^{k(n-k-1)/m} f_1(p). \quad (15)
\end{aligned}$$

Здесь

$$c = a_0 \left(\frac{n-k-m}{m}\right)^m,$$

a_i^1 ($i = 1, \dots, k$), b_1^j ($j = 0, \dots, k-i$) — соответствующие числа. Если выполнено условие

$$\beta_1 > (m-i) \frac{n-k-m}{m}, \quad (16)$$

то основной символ дифференциального оператора, стоящего в левой части уравнения (15), равен $p^{k+m} + c p^k$. Назовем этот случай *нерезонансным*. При условии $\beta_1 = (m-i)(n-k-m)/m$ в основной символ добавляется еще одно слагаемое, а именно, основной символ в этом случае будет равен $p^{k+m} + c p^k + b_1^0 p^{k+m-i}$. В этих двух случаях уравнение (15) отличается от уравнения с вырождением типа клюва порядка $(n-k)/m$ только наличием интегрального члена

$$p^{k(n-k-m)/m} b_2 \int \dots \int p^{m_0} u(p) dp_1 \dots dp_{\beta_2}.$$

В [8] доказано, что

$$B \left(\int_{q_0}^p u(p) dp \right) = -\frac{1}{q} \int_{q_0}^q \int_{q_0}^{q_2} \tilde{u}(q_1) dq_1 dq_2,$$

отсюда следует что преобразование Бореля увеличивает кратность интеграла, поэтому доказательство резургентности решения, приведенное в [6, 9], можно без изменения перенести на уравнение (15). Таким образом, решение уравнения (15) является резургентной функцией. Отсюда следует, что к этому уравнению можно применять преобразование Лапласа—Бореля аналогично тому, как это было сделано для уравнения (10). Назовем случай

$$\beta_1 \leq (m-i) \frac{n-k-m}{m}$$

резонансным.

Вначале рассмотрим резонансный случай. Для построения асимптотики решения уравнения (15) в окрестности нуля применим метод повторного квантования (см. [8]). Для этого в уравнении (15) сделаем $(n-k)/m$ -преобразование Лапласа—Бореля. Основной символ равен $q^k(q^m+c)$. Этот многочлен имеет ненулевые простые корни $q_i = c_i, i = 1, \dots, m$, где $c_i = c^{1/m} e^{2\pi i/m}$. Каждый из корней является особой точкой для решения уравнения (15). Построим асимптотику решения уравнения (15) в точках c_i .

Без ограничения общности будем считать, что коэффициент $a_1^1 = 0$ (этого можно добиться с помощью замены $\hat{u}_1(p) = p^\sigma \hat{u}(p)$).

Преобразование Лапласа—Бореля функции $p^{k(n-k-1)/m} f_1(p)$ имеет особенность в нуле, асимптотика функции $B_{(n-k-m)/m} p^{k(n-k-m)/m} f_1(p)$ является конормальной (см. [2]), причем степень при логарифме равна либо нулю, либо единице.

Выполнив это, а также преобразование Лапласа—Бореля, получим уравнение

$$\begin{aligned} q^k(q^m+c)u(q) + a_2 \int q^{k-2} \tilde{u}(q) dq + \dots + a_k \int \dots \int \tilde{u}(q) dq_1 \dots dq_k + \\ + B_{(n-k-m)/m} \sum_{j=0}^{m-i} b_1^j p^{\beta_1-(m-i-j)(n-k-m)/m} B_{(n-k)/m}^{-1} q^{k+m-i-j} \tilde{u}(q) + \\ + b_2 B_{(n-k-m)/m} p^{k(n-k-m)/m} \int \dots \int p^{m_0} u(p) dp_1 \dots dp_{\beta_2} = G(q). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь функция $G(q)$ представима в виде конормальной асимптотики. Перепишем уравнение (17) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}(q) = -\frac{a_2}{q^k(q^m+c)} \int_1^q \int_1^{q_2} q_1^{k-2} \tilde{u}(q_1) dq_1 dq_2 - \dots - \\ - \frac{a_{k-1}}{q^k(q^m+c)} \int_1^q \dots \int_1^{q_2} q_1 \tilde{u}(q_1) dq_1 \dots dq_{k-1} - \frac{a_k}{q^k(q^m+c)} \int_1^q \dots \int_1^{q_2} \tilde{u}(q_1) dq_1 \dots dq_k - \\ - \frac{1}{q^k(q^m+c)} B_{(n-k)/m} \sum_{j=0}^{m-i} b_1^j p^{\beta_1-(m-i-j)(n-k-m)/m} B_{(n-k-m)/m}^{-1} q^{k+m-i-j} \tilde{u}(q) - \\ - \frac{b_2}{q^k(q^m+c)} B_{(n-k)/m} p^{k(n-k-m)/m} \int \dots \int p^{m_0} u(p) dp_1 \dots dp_{\beta_2} + \frac{G(q)}{q^k(q^m+c)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Особенности решения уравнения (18) расположены в точках $q = 0$ и $q = c_i$ ($i = 1, \dots, m$). Вначале построим асимптотику решения уравнения (18) в точках c_i . Заметим, что корни c_i имеют первый порядок. Асимптотики в этих точках строятся методом последовательных приближений аналогично тому, как это сделано в [7]. Можно доказать следующее утверждение.

Лемма 1. Асимптотика функции $\tilde{u}(q)$ в окрестности точки $q = c_k$ имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n-k-m} (q - c_k)^{jm/(n-k-m)} G_j(q - c_k) + \ln(q + c) G_0(q - c_k), \quad (19)$$

где G_j — голоморфная функция.

Теперь построим асимптотики в нуле. Имеем уравнение

$$\begin{aligned}
 q^{k+m}\tilde{u}(q) + cq^k\tilde{u}(q) + a_1^1 \int q^{k-1}\tilde{u}(q)dq + \\
 + a_2^1 \int_1^q \int_1^{q_2} q_1^{k-2}\tilde{u}(q_1)dq_1dq_2 + \dots + a_k^1 \int_1^q \dots \int_1^{q_2} \tilde{u}(q_1)dq_1 \dots dq_k + \\
 + \sum_{j=0}^{k+m-i} b_1^j B_{(n-k-m)/m} p^{\beta_1-(m-j-i)(n-k-m)/m} \left(p^{n-k} \frac{d}{dp} \right)^{k+m-i-j} \tilde{u}(q) + \\
 + B_{(n-k-m)/m} p^{k(n-k-m)/m} b_2 \int_1^p \dots \int_1^{p_2} p_1^{m_0} \hat{u}(p_1) dp_1 \dots dp_{\beta_2} = G(q). \quad (20)
 \end{aligned}$$

Заметим, что при отсутствии интегральных младших членов уравнение, путем k -кратного дифференцирования по q преобразуется к уравнению с конической особенностью, правая часть которого является конормальной асимптотикой. Как известно, решением таких уравнений являются конормальные асимптотики. Было бы естественно предположить, что и в общем случае, т.е. при наличии младших членов, решение также будет иметь вид конормальной асимптотики. Это можно показать, преобразовав интегралы в левой части уравнения (20), а именно, показать, что существуют такие ненулевые числа $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, что уравнение (20) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 q^{k+m} q^{\sigma_1} \int_1^q \dots \int_1^{q_4} q_3^{\sigma_{k-1}} \int_1^{q_3} q_2^{\sigma_k} \int_1^{q_2} \tilde{u}_k(q_1) dq_1 dq_2 \dots dq_k - c \int_1^q \dots \int_1^{q_2} q_1^{k+\sum_{i=1}^k \sigma_i} \tilde{u}_k(q_1) dq_1 \dots dq_k + \\
 + b_1 B_{(n-k-m)/m} p^{\beta_1} p^{i(n-k-1)} \\
 \left(p^{n-k} \frac{d}{dp} \right)^{k-i} B_{(n-k-m)/m}^{-1} \left(q^{\sigma_1} \int_1^q \dots \int_1^{q_4} q_3^{\sigma_{k-1}} \int_1^{q_3} q_2^{\sigma_k} \int_1^{q_2} \tilde{u}_k(q_1) dq_1 \dots dq_k \right) + \\
 + B_{(n-k-m)/m} p^{k(n-k-1)} b_2 \int_1^p \dots \int_1^{p_2} p_1^{m_0} \\
 B_{(n-k-m)/m}^{-1} \left(q^{\sigma_1} \int_1^q \dots \int_1^{q_4} q_3^{\sigma_{k-1}} \int_1^{q_3} q_2^{\sigma_k} \int_1^{q_2} \tilde{u}_k(q_1) dq_1 \dots dq_k \right) dp_1 \dots dp_{\beta_2} = G(q), \quad (21)
 \end{aligned}$$

где

$$\tilde{u}_k(q) = \frac{d}{dq} q^{\sigma_k} \dots \frac{d}{dq} q^{\sigma_1} \tilde{u}(q). \quad (22)$$

Преобразуем уравнение (20), выразив из него $\tilde{u}_k(q)$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_k(q) = -\frac{1}{c} q^{-k-\sum_{i=1}^k \sigma_i} \left(\frac{d}{dq} \right)^k G(q) + \\
 + \frac{1}{c} q^{-k-\sum_{i=1}^k \sigma_i} \left(\frac{d}{dq} \right)^k q^{k+m} q^{\sigma_1} \int_1^q \dots \int_1^{q_4} q_3^{\sigma_{k-1}} \int_1^{q_3} q_2^{\sigma_k} \int_1^{q_2} \tilde{u}_k(q_1) dq_1 dq_2 \dots dq_k + \\
 + \frac{b_1}{c} q^{-k-\sum_{i=1}^k \sigma_i} \left(\frac{d}{dq} \right)^k B_{(n-k-m)/m} p^{\beta_1} p^{i(n-k-1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(p^{n-k} \frac{d}{dp} \right)^{k-i} B_{n-k}^{-1} \left(q^{\sigma_1} \int_1^q \dots \int_1^{q_4} q_3^{\sigma_{k-1}} \int_1^{q_3} q_2^{\sigma_k} \int_1^{q_2} \tilde{u}_k(q_1) dq_1 \dots dq_k \right) + \\
& + \frac{b_2}{c} q^{-k - \sum_{i=1}^k \sigma_i} \left(\frac{d}{dq} \right)^k B_{(n-k-m)/m} p^{k(n-k-1)} \int_1^p \dots \int_1^{p_2} p_1^{m_0} \\
& B_{n-k}^{-1} \left(q^{\sigma_1} \int_1^q \dots \int_1^{q_4} q_3^{\sigma_{k-1}} \int_1^{q_3} q_2^{\sigma_k} \int_1^{q_2} \tilde{u}_k(q_1) dq_1 \dots dq_k \right) dp_1 \dots dp_{\beta_2}.
\end{aligned}$$

Для того, чтобы найти асимптотику функции $\tilde{u}_k(q)$ при $q \rightarrow 0$, применим метод последовательных приближений. Можно показать, что верно следующее утверждение.

Лемма 2. Асимптотика функции $\tilde{u}_k(q)$ при $q \rightarrow 0$ является конормальной.

Как известно (см. [3]) обратное преобразование от конормальной асимптотики является конормальной асимптотикой. Отсюда и из формулы (22) следует, что асимптотика решения уравнения (20) в окрестности нуля является конормальной.

Выполним обратное преобразование Бореля (19):

$$\begin{aligned}
B_{(n-k)/m}^{-1} \sum_{i=1}^{n-k-m-1} (q - c_j)^{im/(n-k-m)} G_i(q - c_j) + \ln(q + c) G(q - c_j) = \\
= e^{c_j/p^{(n-k-m)/m}} \sum_{k=1}^{n-k-m-1} p^{\sigma_k} \sum_{i=0}^{\infty} C_{i,k}^j p^i, \quad j = 1, \dots, m. \quad (23)
\end{aligned}$$

Осталось вычислить обратное преобразование Лапласа—Бореля от (23). Решение этой задачи дается следующей теоремой.

Теорема 2 (см. [17]). Асимптотика функции $B^{-1} e^{-\alpha/p^{k/n}} g(p)$ в окрестности нуля имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n+k} \exp \left(\sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i^j}{r^{i/(n+k)}} \right) r^{\sigma_j/(n+k)} \sum_l c_l^j r^{l/(n+k)}. \quad (24)$$

Здесь α_{n-1}^j , $j = 1, \dots, k$, — корни полинома $p^{n+k} + \left(\frac{n+k}{k} \right)^{n+k} (-1)^{n+1} \left(\frac{\alpha k}{n} \right)^n$, c_i^j — некоторые константы.

Назовем асимптотики типа (24) обобщенными асимптотиками нефуксова типа. Они отличаются от нефуксовых асимптотик тем, что показатели экспонент содержат не только целые степени r , но и дробные.

Из теоремы 2 следует, что

$$B^{-1} e^{c/p^{(n-k-m)/m}} p^{\sigma} \sum_{i=0}^{\infty} C_i p^i = \sum_{j=1}^{n-k} \exp \left(\sum_{i=1}^{n-k-m} \frac{\alpha_i^j}{r^{i/(n-k)}} \right) r^{-\sigma_i/(n-k)} \sum_l A_l^j r^{-l/(n-k)}.$$

Таким образом, мы построили асимптотики решения уравнения (11) при условии (16). Таким образом, доказано, что если выполнено неравенство

$$h_i + i - h > (m - i) \frac{n - k - m}{m},$$

то верна следующая теорема.

Теорема 3. Асимптотика решения уравнения (11) в окрестности бесконечности имеет вид

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^{n-k} \exp \left(\sum_{i=1}^{n-k-m} \frac{\alpha_i^j}{r^{i/(n-k)}} \right) r^{-\sigma_i/(n-k)} \sum_l A_l^j r^{-l/(n-k)} + \sum_{j=0}^{k_0} \left(\ln \frac{1}{r} \right)^j r^{\alpha_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^{-i},$$

где α_{n-k-m}^j , $j = 1, \dots, n-k$, — корни полинома $p^{n-k} + \left(\frac{n-k}{n-k-m}\right)^{n-k} a_0$, a , A_l^j , σ_i , b_i^j , k_0 , α_i^j , $j = 1, \dots, n-k-1$, — некоторые числа.

Предположим, что неравенство (16) не выполнено и

$$\beta_1 - (m-i+1)\frac{n-k-m}{m} = 0. \quad (25)$$

Из (14) следует, что в этом случае уравнение (16) с помощью преобразования Лапласа—Бореля можно привести к виду

$$\begin{aligned} q^{k+m}\tilde{u}(q) + cq^k\tilde{u}(q) + a_1^1 \int_1^q q^{k-1}\tilde{u}(q)dq + a_2^1 \int_1^q \int_1^{q_2} q_1^{k-2}\tilde{u}(q_1)dq_1dq_2 + \dots + a_k^1 \int_1^q \dots \int_1^{q_2} \tilde{u}(q_1)dq_1 \dots dq_k + \\ + b_1 q^{k+m-i} \frac{d}{dq} u + b_1^0 q^{k+m-i-1} \tilde{u}(q) + \sum_{j=1}^q b_1^j \int_1^q \dots \int_1^{q_2} q_1^{k+m-i-j-1} \tilde{u}(q_1)dq_1 \dots dq_j + \\ + b_2 \int_1^q \dots \int_1^{q_2} B_{(n-k-m)/m} \int_1^p \dots \int_1^{p_2} p_1^{m_0} \hat{u}(p_1) dp_1 \dots dp_{\beta_2} dq_1 \dots dq_k = G(q). \end{aligned} \quad (26)$$

Преобразуем уравнение (26) к виду

$$\begin{aligned} q^{k+m} \left(\frac{d}{dq}\right)^k \tilde{u}(q) + cq^k \left(\frac{d}{dq}\right)^k \tilde{u}(q) + a_1^1 \left(\frac{d}{dq}\right)^{k-1} q^{k-1} \tilde{u}(q) dq + \dots + a_k^1 \tilde{u}(q_1) + \\ + b_1 q^{k+m-i} \left(\frac{d}{dq}\right)^{k+1} u + b_1^0 q^{k+m-i-1} \left(\frac{d}{dq}\right)^k \tilde{u}(q) + \sum_{j=1}^q b_1^j \int_1^q \dots \int_1^{q_2} q_1^{k+m-i-j-1} \tilde{u}(q_1) dq_1 \dots dq_{j-k} + \\ + b_2 B_{(n-k-m)/m} \int_1^p \dots \int_1^{p_2} p_1^{m_0} \hat{u}(p_1) dp_1 \dots dp_{\beta_2} dq_1 = \left(\frac{d}{dq}\right)^k G(q). \end{aligned}$$

Домножив на $q^{k(m-i-1)}$, получим

$$\begin{aligned} q^m \left(q^{m-i} \frac{d}{dq}\right)^k \tilde{u}(q) + c \left(q^{m-i} \frac{d}{dq}\right)^k \tilde{u}(q) + a_1^1 q^{m-i-1} \left(q^{m-i} \frac{d}{dq}\right)^{k-1} \tilde{u}(q) + \dots + a_k^1 q^{k(m-i-1)} \tilde{u}(q) + \\ + b_1 \left(q^{m-i} \frac{d}{dq}\right)^{k+1} u + b_1^0 q^{m-i-1} \left(q^{m-i} \frac{d}{dq}\right)^k \tilde{u}(q) + b_1^1 q^{2(m-i-1)} \left(q^{m-i} \frac{d}{dq}\right)^{k-1} \tilde{u}(q) + \dots + \\ + b_1^k q^{(k+1)(m-i-1)} \tilde{u}(q) + \\ + b_2 q^{k(m-i-1)} B_{(n-k-m)/m} \int_1^p \dots \int_1^{p_2} p_1^{m_0} \hat{u}(p_1) dp_1 \dots dp_{\beta_2} = q^{k(m-i-1)} \left(\frac{d}{dq}\right)^k G(q). \end{aligned}$$

Это уравнение аналогично уравнению (15), поэтому можно построить асимптотику его решения аналогично тому, как это делалось для этого уравнения. Асимптотика является обобщенной нефуксовой асимптотикой.

Если же равенство (24) не выполнено, то путем умножения на $p^{-k(n-k-m)/m+\beta k/(m-i-1)}$ и применения преобразования $B_{\beta/(m-i-1)}$ уравнение (15) приводится к уравнению вида (26). Отсюда следует, что и в этом случае асимптотики будут обобщенными фуксовыми асимптотиками.

Если основной символ не является однородной функцией и имеет несколько корней $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, то необходимо, последовательно сдвигая каждый из корней в нуль, путем замены $u_1(r) = e^{\lambda_i/r} u(r)$ для каждого из корней вычислить индекс сингулярности и для каждого из корней построить асимптотику методом, изложенным выше.

Таким образом мы показали, что асимптотики решения линейного дифференциального уравнения с аналитическими коэффициентами в окрестности бесконечности в общем случае представимы в виде суммы конормальных асимптотик, нефуксовых асимптотик и обобщенных нефуксовых асимптотик. Тот же результат был получен и для уравнений второго порядка с голоморфными коэффициентами с вырождениями в нуле (см. [16]).

Было бы естественно предположить, что это верно для уравнений любого порядка. Иными словами, можно сформулировать гипотезу о том, что *асимптотики решений любого обыкновенного дифференциального уравнения с аналитическими коэффициентами в окрестности иррегулярной особой точки представимы в виде суммы конормальных асимптотик, нефуксовых асимптотик и обобщенных нефуксовых асимптотик*. В настоящее время эта гипотеза не доказана.

В заключение авторы выражают глубокую признательность В. Е. Шаталову за плодотворные обсуждения на протяжении всей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И., Ильющенко Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения// в кн.: Динамические системы-1/ Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл.. — М.: ВИНТИ, 1985. — 1. — С. 7–140.
2. Кац Д. С. Вычисление асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями коэффициентов// Диффер. уравн. — 2015. — 51, № 12. — С. 1612–1617.
3. Кац Д. С. Коэффициенты рядов в асимптотических разложениях решений уравнений с вырождениями// Int. J. Open Inform. Tech. — 2016. — 4, № 9. — С. 1–7.
4. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.
5. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в конических областях// Докл. АН СССР. — 1963. — 153, № 1. — С. 27–29.
6. Коровина М. В. Существование ресургентного решения для уравнений с вырождением высших порядков// Диффер. уравн. — 2011. — 47, № 3. — С. 349–357.
7. Коровина М. В. Асимптотики решений уравнений с высшими вырождениями// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 3. — С. 302–304.
8. Коровина М. В. Метод повторного квантования и его применения к построению асимптотик решений уравнений с вырождениями// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 1. — С. 60–77.
9. Коровина М. В., Шаталов В. Е. Дифференциальные уравнения с вырождением и ресургентный анализ// Диффер. уравн. — 2010. — 46, № 9. — С. 1259–1277.
10. Коровина М. В., Шаталов В. Е. Дифференциальные уравнения с вырождением// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 1. — С. 16–19.
11. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. — М.: Наука, 1990.
12. Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Дифференциальные уравнения в пространствах с асимптотиками на многообразиях с особенностями типа клюва// Диффер. уравн. — 2002. — 38, № 12. — С. 1664–1672.
13. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964.
14. Ecalle J. Cinq applications des fonctions résurgentes// Prepub. Math. d'Orsay. — 1984. — 84T62. — P. 110.
15. Korovina M. V., Smirnov V. Yu. Construction of asymptotics of solutions of differential equations with cusp-type degeneration in the coefficients in the case of multiple roots of the highest-order symbol// Differ. Eqs. — 2018. — 54, № 1. — P. 28–37.
16. Korovina M. V., Smirnov V. Yu. Linear differential equations with holomorphic coefficients on manifold with cuspidal singularities and Laplace's equation// Mech. Mat. Sci. Eng. — 2018. — 19. — P. 1–9.
17. Korovina M. V., Smirnov I. N., Smirnov V. On a problem arising in application of the re-quantization method to construct asymptotics of solutions to linear differential equations with holomorphic coefficients at infinity// Math. Comput. Appl. — 2019. — 24, № 1. — 16.
18. Poincaré H. Sur les integrales irregulieres des equations lineaires// Acta Math. — 1886. — 8. — P. 295–344.
19. Schulze B. W., Sternin B., Shatalov V. Asymptotic Solutions to Differential Equations on Manifolds with Cusps/ preprint MPI 96-89. — Bonn: Max-Planck-Institut für Mathematik, 1996.

20. *Schulze B. W., Sternin B., Shatalov V.* An Operator Algebra on Manifolds with Cusp-Type Singularities// Ann. Glob. Anal. Geom. — 1998. — 16, № 2. — P. 101–140.
21. *Sternberg W.* Über die asymptotische Integration von Differentialgleichungen. — Berlin: Spriger-Verlag, 1920.
22. *Sternin B., Shatalov V.* Borel–Laplace Transform and Asymptotic Theory. Introduction to Resurgent Analysis. — CRC Press, 1996.
23. *Thomé L. W.* Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen// J. Reine Angew. Math. — 1884. — 96, № 3. — P. 185–281.

Коровина Мария Викторовна

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: betelgeuser@yandex.ru

Смирнов Владимир Юрьевич

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

E-mail: vl-smirnov@mail.ru