Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Атанов, А. В. Лобода, Разложимые пятимерные алгебры Ли в задаче о голоморфной однородности в $\mathbb{C}^3$, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 173, 86–115

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-173-86-115>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 12:33:13

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 173 (2019). С. 86–115
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-173-86-115

УДК 517.765, 515.172.2, 512.816

РАЗЛОЖИМЫЕ ПЯТИМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ В ЗАДАЧЕ О ГОЛОМОРФНОЙ ОДНОРОДНОСТИ В $\mathbb{C}^3$

© 2019 г. А. В. АТАНОВ, А. В. ЛОВОДА

Аннотация. В связи с задачей описания голоморфно-однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$ изучаются пятимерные вещественные алгебры Ли, реализуемые как алгебры голоморфных векторных полей на таких многообразиях. Доказано, что если на голоморфно-однородной вещественной гиперповерхности M пространства $\mathbb{C}^3$ имеется разложимая разрешимая пятимерная алгебра Ли голоморфных векторных полей, имеющая полный ранг вблизи некоторой точки $P \in M$, то эта поверхность либо вырождена по Леви (вблизи P), либо является голоморфным образом аффинно-однородной поверхности.

Ключевые слова: однородное многообразие, голоморфное преобразование, разложимая алгебра Ли, векторное поле, вещественная гиперповерхность в $\mathbb{C}^3$.

DECOMPOSABLE FIVE-DIMENSIONAL LIE ALGEBRAS IN THE PROBLEM ON HOLOMORPHIC HOMOGENEITY IN $\mathbb{C}^3$

© 2019 А. В. АТАНОВ, А. В. ЛОВОДА

ABSTRACT. In connection with the problem of describing holomorphically homogeneous real hypersurfaces in the space $\mathbb{C}^3$, we study five-dimensional real Lie algebras realized as algebras of holomorphic vector fields on such manifolds. We prove that if on a holomorphically homogeneous real hypersurface M of the space $\mathbb{C}^3$, there is a decomposable, solvable, five-dimensional Lie algebra of holomorphic vector fields having a full rank near some point $P \in M$, then this surface is either degenerate near P in the sense of Levy or is a holomorphic image of an affine-homogeneous surface.

Keywords and phrases: homogeneous manifold, holomorphic transformation, decomposable Lie algebra, vector field, real hypersurface in $\mathbb{C}^3$.

AMS Subject Classification: 32V40, 53B25, 17B66

1. Введение. В настоящей статье изучается задача описания (локально) однородных вещественных гиперповерхностей трехмерного комплексного пространства. Базируется такое изучение на рассмотрении пятимерных алгебр Ли голоморфных векторных полей, касательных к однородным гиперповерхностям. Сами такие поверхности предполагаются невырожденными по Леви (в некоторой, а значит, и в любой близкой точке).

Обозначенные ограничения на размерность алгебр Ли, отвечающих однородным поверхностям, а также требование Леви-невырожденности изучаемых многообразий фактически не являются ограничениями в сегодняшнем состоянии исследуемой задачи. Они лишь отделяют ее нерешенные фрагменты от уже изученных.

Работа А. В. Лободы выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00592-а).

Уточним в связи с этим, что однородные вырожденные по Леви гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^3$ полностью описаны в [22]. Для так называемых сферических гиперповерхностей, являющихся голоморфными образами двух (невырожденных по Леви) квадрик

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2, \quad v = |z_1|^2 - |z_2|^2 \quad (1.1)$$

в $\mathbb{C}^3$, размерности транзитивно действующих на них групп Ли (а следовательно, и соответствующих алгебр Ли) равны 15 (см. [18]). Размерность же локальной группы $G(M)$ голоморфных преобразований, транзитивно действующей на несферической невырожденной гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^3$, удовлетворяет (см. [8]) двусторонней оценке $5 \leq \dim_{\mathbb{R}} G(M) \leq 8$.

При этом все однородные поверхности с семимерными и восьмимерными алгебрами Ли описаны в [9, 10]; случай шестимерных алгебр полностью изучен в [21].

Подход, используемый в статье, связан с реализацией абстрактных пятимерных алгебр Ли в виде алгебр голоморфных векторных полей в пространстве $\mathbb{C}^3$. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы такая алгебра имела в качестве интегрального многообразия именно пятимерную вещественную (голоморфно-однородную) гиперповерхность, является, в силу теоремы Фробениуса (см. [4]), полнота ранга этой алгебры.

В [16] предложена техническая идея перехода от произвольной абстрактной пятимерной алгебры Ли к соответствующим этой алгебре однородным поверхностям. Именно эта идея является стержнем настоящей статьи. Отметим, однако, что количество алгебраически различных пятимерных алгебр достаточно велико: в списке [13, 14] (см. также [7]) содержится 67 типов таких алгебр, при этом многие типы включают в себя не только отдельные (точечные) алгебры, но и семейства алгебр, зависящие от параметров (в количестве от одного до трех).

Поэтому оправданным в заявленной задаче является изучение не всего множества пятимерных алгебр Ли, а их отдельных совокупностей. Так, в [1] изучены голоморфные реализации пятимерных нильпотентных алгебр Ли и описаны однородные (Леви-невырожденные) гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$, отвечающие таким алгебрам. Нильпотентных алгебр имеется девять, а соответствующих им невырожденных поверхностей оказалось (с точностью до голоморфной эквивалентности) всего две: положительно определенная и индефинитная квадрики (1.1).

Целью настоящей работы является изучение еще одного естественного семейства пятимерных алгебр Ли, а именно, разложимых алгебр. В списке [14] таких алгебр имеется 27, а потому потребовалась выработка дополнительных обобщающих подходов к изучению не отдельных алгебр, а подсемейств обозначенного достаточно обширного семейства. Авторы выражают благодарность И. Г. Коссовскому за обсуждение таких идей и подходов, с помощью которых была практически полностью реализована поставленная задача о 27 алгебрах.

В то же время в настоящую статью не вошло описание неразрешимых разложимых пятимерных алгебр Ли. Изучение авторами голоморфных реализаций всех таких четырех алгебр практически завершено, однако развернутое описание соответствующих результатов (анонсированных в [2]) планируется изложить в отдельной работе.

Сформулируем в обобщенной форме основной результат настоящей статьи.

Теорема 1.1. *Если на голоморфно однородной вещественной гиперповерхности M пространства $\mathbb{C}^3$ имеется разложимая разрешимая пятимерная алгебра Ли голоморфных векторных полей, имеющая полный ранг вблизи некоторой точки $P \in M$, то эта поверхность либо вырождена по Леви (вблизи P), либо является голоморфным образом аффинно-однородной поверхности.*

Отметим, что свойство аффинной однородности в этой формулировке можно заменить трубчатостью. Напомним в связи с этим, что в двумерном случае (см. [11]) и в большинстве известных примеров в $\mathbb{C}^3$ голоморфная однородность трубчатой поверхности означает аффинную (вещественную) однородность ее основания. При этом среди голоморфно-однородных поверхностей с рассмотренными в статье алгебрами Ли имеется семейство, для всех представителей которого трубчатость и аффинная однородность достигаются в разных координатных системах.

Еще одним свойством изученных разложимых пятимерных алгебр является наличие в них «скрытых симметрий»: каждая невырожденная орбита такой алгебры имеет размерность полной алгебры симметрий, строго большую чем 5.

Приведенная формулировка теоремы 1.1 и комментарии к ней являются следствиями описания (см. теоремы 5.1 и 6.1, а также предложения 4.1 и 7.1) всех однородных невырожденных поверхностей, ассоциированных с каждой из обсуждаемых алгебр. Еще одной переформулировкой основного результата, вытекающей из проведенного исследования, является утверждение об *отсутствии новых* однородных поверхностей, связанных с изученным семейством алгебр. Это утверждение и результат работы [1] в некотором смысле противоположны выводу о «большом количестве» однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$, фактически обозначенному в [16].

В целом семейство таких поверхностей достаточно велико, но в рамках развиваемого в настоящей статье подхода вполне реальным является получение полного описания этого семейства в ближайшей перспективе.

2. Список пятимерных разложимых алгебр Ли. Классификационная статья Г. М. Мубаракзянова [14] о пятимерных алгебрах Ли начинается со списка 27 типов разложимых алгебр. Каждая из них содержит несколько маломерных слагаемых и имеет соответствующий условный номер, ссылающийся на другую статью [13] того же автора. Ниже мы приводим в табличной форме явное описание всех этих алгебр.

Каждая строка таблицы 1 представляет собой набор коммутационных соотношений для соответствующего типа алгебр. Элементы e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 представляют собой базис каждой абстрактной алгебры Ли, коммутатор двух (базисных) элементов e_i, e_j алгебры обозначается традиционной квадратной скобкой $[e_i, e_j]$. Пустая клетка для коммутатора $[e_i, e_j]$ означает, что он равен нулю.

Параметры, присутствующие в коммутационных соотношениях некоторых алгебр, удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_7, \mathfrak{m}_{14} : & \quad -1 \leq s < 1, s \neq 0, \\ \mathfrak{m}_8, \mathfrak{m}_{15}, \mathfrak{m}_{23}, \mathfrak{m}_{26} : & \quad p \geq 0, \\ \mathfrak{m}_{19}, \mathfrak{m}_{23} : & \quad \alpha \neq 0, \\ \mathfrak{m}_{22} : & \quad -1 \leq \gamma \leq \beta \leq 1, \beta\gamma \neq 0, \\ \mathfrak{m}_{25} : & \quad |q| \leq 1. \end{aligned}$$

Для упорядочения отдельных типов алгебр мы снабжаем их номерами в сплошной нумерации от $\mathfrak{m}_1$ до $\mathfrak{m}_{27}$. Соответствие этих номеров и типов алгебр из списка [14] устанавливается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_1 &= 5g_1, & \mathfrak{m}_2 &= g_2 + 3g_1, & \mathfrak{m}_3 &= 2g_2 + g_1, \\ \mathfrak{m}_j &= g_{3,j-3} + 2g_1 & (j &= 4, \dots, 10), \\ \mathfrak{m}_k &= g_{3,k-10} + g_2 & (k &= 11, \dots, 17), \\ \mathfrak{m}_l &= g_{4,l-17} + g_1 & (l &= 18, \dots, 27). \end{aligned}$$

После установления такого соответствия все обсуждения статьи строятся только на базе таблицы 1. Отметим сразу, что из внесенных в нее типов четыре алгебры

$$\mathfrak{m}_9, \mathfrak{m}_{10}, \mathfrak{m}_{16}, \mathfrak{m}_{17}$$

являются неразрешимыми. Эти алгебры, как было сказано, мы исключаем из рассмотрения в настоящей работе.

3. Схема исследования голоморфной однородности. При обсуждении реализаций произвольной пятимерной алгебры Ли с базисом e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 в виде алгебры голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^3$ будем записывать каждый элемент этого базиса в виде

$$e_k = f_k(z_1, z_2, w) \frac{\partial}{\partial z_1} + g_k(z_1, z_2, w) \frac{\partial}{\partial z_2} + h_k(z_1, z_2, w) \frac{\partial}{\partial w}, \quad k = 1, \dots, 5, \quad (3.1)$$

Таблица 1. Классификация пятимерных разложимых алгебр Ли (см. [13, 14])

Алгебры	$[e_1, e_2]$	$[e_1, e_3]$	$[e_1, e_4]$	$[e_1, e_5]$	$[e_2, e_3]$	$[e_2, e_4]$	$[e_2, e_5]$	$[e_3, e_4]$	$[e_3, e_5]$	$[e_4, e_5]$
$\mathfrak{m}_1$										
$\mathfrak{m}_2$	e_1									
$\mathfrak{m}_3$	e_1							e_3		
$\mathfrak{m}_4$					e_1					
$\mathfrak{m}_5$		e_1			$e_1 + e_2$					
$\mathfrak{m}_6$		e_1			e_2					
$\mathfrak{m}_7$		e_1			se_2					
$\mathfrak{m}_8$		$pe_1 - e_2$			$e_1 + pe_2$					
$\mathfrak{m}_9$	e_1	$2e_2$			e_3					
$\mathfrak{m}_{10}$	e_3	$-e_2$			e_1					
$\mathfrak{m}_{11}$					e_1					e_4
$\mathfrak{m}_{12}$		e_1			$e_1 + e_2$					e_4
$\mathfrak{m}_{13}$		e_1			e_2					e_4
$\mathfrak{m}_{14}$		e_1			se_2					e_4
$\mathfrak{m}_{15}$		$pe_1 - e_2$			$e_1 + pe_2$					e_4
$\mathfrak{m}_{16}$	e_1	$2e_2$			e_3					e_4
$\mathfrak{m}_{17}$	e_3	$-e_2$			e_1					e_4
$\mathfrak{m}_{18}$						e_1		e_2		
$\mathfrak{m}_{19}$			αe_1			e_2		$e_2 + e_3$		
$\mathfrak{m}_{20}$			e_1					e_2		
$\mathfrak{m}_{21}$			e_1			$e_1 + e_2$		$e_2 + e_3$		
$\mathfrak{m}_{22}$			e_1			βe_2		γe_3		
$\mathfrak{m}_{23}$			αe_1			$pe_2 - e_3$		$e_2 + pe_3$		
$\mathfrak{m}_{24}$			$2e_1$		e_1	e_2		$e_2 + e_3$		
$\mathfrak{m}_{25}$			$(1 + q)e_1$		e_1	e_2		qe_3		
$\mathfrak{m}_{26}$			$2pe_1$		e_1	$pe_2 - e_3$		$e_2 + pe_3$		
$\mathfrak{m}_{27}$		e_1	$-e_2$		e_2	e_1				

с голоморфными (вблизи обсуждаемой точки поверхности) функциональными коэффициентами f_k, g_k, h_k . Будем использовать также записи вида $e_k = (f_k, g_k, h_k)$ для сокращения формулы (3.1).

Через z_1, z_2, w здесь и далее обозначаются координаты в пространстве $\mathbb{C}^3$. Их вещественные и мнимые части будем обозначать через $x_k = \operatorname{Re} z_k, y_k = \operatorname{Im} z_k, k = 1, 2, u = \operatorname{Re} w, v = \operatorname{Im} w$. Пару координат (z_1, z_2) мы часто будем объединять в двумерный комплексный вектор z .

Свойство однородности вещественной пятимерной гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^3$ всюду в статье обсуждается в локальном смысле и понимается как наличие на такой поверхности вещественной алгебры Ли $g(M)$ голоморфных (касательных к M) векторных полей, имеющей вблизи обсуждаемой точки ранг, равный 5. При этом обсуждаемую точку однородной поверхности M будем считать совпадающей с началом координат пространства $\mathbb{C}^3$.

Сопутствующая задача, решаемая в процессе голоморфной реализации конкретной алгебры Ли, — получить за счет голоморфных преобразований по возможности «простой» вид функциональных коэффициентов f_k, g_k, h_k для всей базисной пятерки полей.

Напомним, что согласно «основной теореме» теории обыкновенных дифференциальных уравнений (справедливой и в голоморфном случае), любое гладкое векторное поле можно выпрямить вблизи неособой точки подходящим координатным диффеоморфизмом. Всюду ниже мы считаем, что базисное поле e_1 имеет упрощенный (выпрямленный) вид $e_1 = \partial/\partial w$. Коэффициенты такого выпрямленного поля являются константами и не зависят ни от каких координат трехмерного пространства, в котором это поле рассматривается.

Используя технику работы [16], развивающей идеи Э. Картана (см. [17]), мы будем упрощать несколько базисных полей одновременно. Одна из возможностей таких упрощений — уменьшение количества аргументов у функциональных коэффициентов f_k, g_k, h_k полей вида (3.1). Во многих обсуждениях статьи удается доводить наборы аргументов у таких функций до двух переменных (например, до $z = (z_1, z_2)$) или до одной. В последнем случае в роли такой единственной переменной, как правило, выступает z_2 , а соответствующие функции мы обозначаем через $\hat{f}_k(z_2), \hat{g}_k(z_2), \hat{h}_k(z_2)$.

При этом мы обсуждаем в статье только невырожденные по Леви поверхности. Определяющие функции таких поверхностей зависят от всех трех комплексных переменных и, более того, матрица Гессе вторых производных, суженная на комплексную касательную плоскость к такой поверхности, является невырожденной эрмитовой матрицей.

Для алгебр векторных полей на однородных поверхностях оказываются справедливыми следующие свойства, связанные с одновременным упрощением или выпрямлением нескольких базисных полей.

Лемма 3.1. *Если на невырожденной по Леви гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^3$ имеется пара коммутирующих голоморфных векторных полей e_1 и e_2 , линейно независимых над $\mathbb{R}$, то голоморфной заменой координат эта пара может быть выпрямлена, т.е. приведена (вблизи некоторой точки поверхности) к виду*

$$e_1 = (0, 0, 1), \quad e_2 = (1, 0, 0).$$

Лемма 3.2. *Пусть $M \subset \mathbb{C}^3$ — вещественно-аналитическая гиперповерхность, невырожденная по Леви, $g(M)$ — пятимерная алгебра касательных к M голоморфных векторных полей, имеющая полный ранг (вблизи некоторой точки поверхности M), $g^*(M) = \langle e_i, e_j, e_k \rangle$ — трехмерная абелева подалгебра в $g(M)$. Тогда голоморфным преобразованием базис этой подалгебры можно привести (вблизи некоторой точки поверхности M) к одному из двух видов:*

$$\begin{aligned} (1) \quad & e_i = (1, 0, 0), \quad e_j = (0, 1, 0), \quad e_k = (0, 0, 1), \\ (2) \quad & e_i = (1, 0, 0), \quad e_j = (0, 0, 1), \quad e_k = (\hat{f}_k(z_2), 0, \hat{h}_k(z_2)). \end{aligned}$$

Лемма 3.3 (И. Г. Коссовский). *Пусть в пятимерной алгебре $g(M)$ голоморфных векторных полей на вещественной гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^3$ имеется четырехмерная абелева подалгебра. Тогда M вырождена по Леви.*

Лемма 3.4. *Если четверка базисных голоморфных полей пятимерной алгебры $g(M)$ полного ранга имеет вблизи некоторой точки M вид*

$$\begin{aligned} e_1 &= (f_1(z_1, z_2, z_3), 0, h_1(z_1, z_2, z_3)), \\ e_2 &= (f_2(z_1, z_2, z_3), 0, h_2(z_1, z_2, z_3)), \\ e_3 &= (f_3(z_1, z_2, z_3), 0, h_3(z_1, z_2, z_3)), \\ e_4 &= (f_4(z_1, z_2, z_3), 0, h_4(z_1, z_2, z_3)), \end{aligned} \tag{3.2}$$

то поверхность M является вырожденной по Леви (вблизи обсуждаемой точки).

Ниже мы приводим доказательства этих фактов. Отметим при этом естественную перестановку в порядке следования доказательств, так как утверждение леммы 3.4 является одним из аргументов при обсуждении леммы 3.3. Кроме того, зафиксируем в виде замечаний два технических утверждения из [16], необходимых для доказательства сформулированных лемм.

Замечание 3.1. Если вблизи некоторой точки пространства $\mathbb{C}^3$ заданы два голоморфных векторных поля $e_1 = (0, 0, 1)$ и $e_2 = (f_2(z_1, z_2), g_2(z_1, z_2), h_2(z_1, z_2))$ и пара (f_2, g_2) не обращается в нуль в обсуждаемой точке, то голоморфной заменой координат можно выпрямить поле e_2 вблизи этой точки (например, до вида $e_2 = (1, 0, 0)$) с сохранением выпрямленного поля e_1 .

Замечание 3.2. Назовем голоморфное векторное поле Z в пространстве $\mathbb{C}^3$ *линеаризованным по паре переменных* z_1, w (в обсуждаемой системе координат), если оно имеет вид

$$Z = (\alpha z_1 + \beta w + \hat{f}(z_2), \hat{g}(z_2), \gamma z_1 + \delta w + \hat{h}(z_2)) \quad (3.3)$$

с некоторыми голоморфными функциями $\hat{f}, \hat{g}, \hat{h}$ и комплексными константами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

В [16] доказано утверждение о существовании (локальной) голоморфной замены, сохраняющей пару выпрямленных полей $e_1 = (0, 0, 1)$, $e_2 = (1, 0, 0)$ и упрощающей линеаризованное поле

$$e_3 = (l(z_1, w) + \hat{f}_3(z_2), \hat{g}_3(z_2), L(z_1, w) + \hat{h}_3(z_2))$$

до состояния

$$e_3 = (l(z_1, w), 1, L(z_1, w))$$

с теми же линейными функциями $l(z_1, w), L(z_1, w)$.

Достаточным условием существования такой замены является неравенство $\hat{g}_3 \neq 0$ вблизи обсуждаемой точки. Отметим также, что эта замена сохраняет линейные функции $\alpha z_1 + \beta w, \gamma z_1 + \delta w$ и вид (3.3) (с измененными функциями $\hat{f}(z_2), \hat{g}(z_2), \hat{h}(z_2)$) любого другого поля, линеаризованного по паре переменных z_1, w .

Доказательство леммы 3.1. Первое из двух обсуждаемых в лемме полей можно сразу считать имеющим вид

$$e_1 = (0, 0, 1) = \frac{\partial}{\partial w}.$$

В силу коммутирования полей e_1 и e_2 компоненты $f_2(z_1, z_2, w), g_2(z_1, z_2, w), h_2(z_1, z_2, w)$ второго поля

$$e_2 = f_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + g_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + h_2 \frac{\partial}{\partial w}$$

не зависят от переменной w .

Рассмотрим теперь два случая, связанные с парой компонент $f_2(z_1, z_2), g_2(z_1, z_2)$ поля e_2 .

Первый случай, когда обе они тождественно нулевые (вблизи некоторой точки M), означает наличие на поверхности M двух линейно независимых над $\mathbb{R}$ полей вида

$$e_1 = (0, 0, h_1(z_1, z_2, w)), \quad e_2 = (0, 0, h_2(z_1, z_2, w)). \quad (3.4)$$

Для таких полей (3.4) определитель

$$\begin{vmatrix} \operatorname{Re} h_1 & \operatorname{Im} h_1 \\ \operatorname{Re} h_2 & \operatorname{Im} h_2 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Условия же касания полями e_1, e_2 обсуждаемой поверхности M означают выполнение двух равенств

$$\operatorname{Re} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial w} \Phi(z_1, z_2, w) \Big|_M \right) = 0, \quad \operatorname{Re} \left(h_2 \frac{\partial}{\partial w} \Phi(z_1, z_2, w) \Big|_M \right) = 0.$$

Отсюда следует тождественное равенство нулю производных $\partial \Phi / \partial u$ и $\partial \Phi / \partial v$, т.е. независимость определяющей функции $\Phi(z_1, z_2, w)$ от переменной w и, следовательно, вырожденность по Леви обсуждаемой поверхности M .

Тем самым, единственно возможным для невырожденной по Леви поверхности является второй случай, в рамках которого на поверхности M найдется точка, где хотя бы одна из пары функций $f_2(z_1, z_2)$, $g_2(z_1, z_2)$ отлична от нуля. Завершает доказательство леммы 3.1 ссылка на замечание 3.1. $\square$

Доказательство леммы 3.2. Пользуясь леммой 3.1, выпрямим два базисных поля подалгебры $g^*(M)$ до состояния

$$e_i = (1, 0, 0), \quad e_j = (0, 0, 1). \quad (3.5)$$

Тогда в силу равенства нулю коммутаторов $[e_i, e_k]$ и $[e_j, e_k]$ компоненты f_k, g_k, h_k третьего базисного поля

$$e_k = (f_k, g_k, h_k) = f_k \frac{\partial}{\partial z_1} + g_k \frac{\partial}{\partial z_2} + h_k \frac{\partial}{\partial w}$$

этой подалгебры могут зависеть только от переменной z_2 . Если при этом компонента $g_2(z_2)$ не является тождественно нулевой вблизи некоторой точки поверхности, то (вблизи этой точки) согласно замечанию 3.2 это третье поле также можно выпрямить до состояния $e_k = (0, 1, 0)$. Выпрямленный вид (3.5) двух первых полей также сохраняется. Такая ситуация соответствует случаю 1 леммы 3.2.

Если же компонента $g_2(z_2)$ тождественно нулевая вблизи некоторой точки поверхности, то мы получаем случай 2 доказываемой леммы. $\square$

Доказательство леммы 3.4. Обозначим через $\Phi(z_1, z_2, w)$ определяющую функцию интегрального многообразия $M = \{\Phi = 0\}$ алгебры g , проходящего через начало координат. Условия касания вещественной гиперповерхности M базисными полями алгебры g имеют вид

$$\operatorname{Re}(e_k(\Phi)|_M) \equiv 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (3.6)$$

Например, для поля e_1 получаем

$$\operatorname{Re}\left(f_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + h_1 \frac{\partial \Phi}{\partial w}\right) = 0$$

или в развернутой форме

$$\operatorname{Re}(f_1) \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \operatorname{Im}(f_1) \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + \operatorname{Re}(h_1) \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \operatorname{Im}(h_1) \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0.$$

Аналогичным развернутым образом можно записать и остальные четыре условия (3.6). Совокупность первых четырех таких равенств будем рассматривать как систему линейных уравнений относительно производных

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_1}\right), \quad \operatorname{Im}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_1}\right), \quad \operatorname{Re}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial w}\right), \quad \operatorname{Im}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial w}\right).$$

Коэффициентами системы являются наборы координат первых четырех полей (3.2). Условие полноты ранга этого набора полей означает, что такие координаты образуют невырожденную (вблизи выделенной точки) (4×4) -матрицу. Тогда интересующие нас производные тождественно равны нулю вблизи обсуждаемой точки поверхности M . Это означает, что интегральная поверхность M вырождена по Леви. Лемма 3.4 доказана. $\square$

Доказательство леммы 3.3. Предположим, что поверхность M невырожденная и рассмотрим произвольную независимую над $\mathbb{R}$ тройку полей e_1, e_2, e_3 из четырехмерной абелевой подалгебры T исходной алгебры.

Согласно лемме 3.2 либо (I) вся эта тройка выпрямляется, либо (II) выпрямляется только пара полей e_1, e_2 , а третье при этом примет вид $(\hat{f}_3, 0, \hat{h}_3)$.

В первом случае коммутирование четвертого базисного поля e_4 подалгебры T с тремя выпрямленными полями означает, что все компоненты e_4 — константы. Рассматривая вместо e_4 линейную комбинацию этого поля с полями e_1, e_2, e_3 , можно получить в подалгебре T элемент $e_4^* = (ia, ib, ic)$ с чисто мнимыми постоянными компонентами.

Но и поле $e_1^* = (a, b, c)$ также является касательным к M . Выпрямляя теперь поле e_1^* до состояния $\partial/\partial w$, получим в новых координатах $e_4^* = i\partial/\partial w$. Наличие на поверхности двух таких

полей означает независимость ее уравнения от переменной w , а значит, вырождение по Леви в противоречии с допущением о невырожденности.

В условиях второго случая рассмотрим пару выпрямленных полей $e_1 = \partial/\partial z_1$, $e_2 = \partial/\partial w$, поле $e_3 = (f_3, g_3, h_3)$ и линейную оболочку $V = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$.

Компоненты любого поля $e_4 = (f_4, g_4, h_4)$ из $T \setminus V$ зависят (в силу его коммутирования с полями e_1, e_2) не более чем от переменной z_2 . Если бы в $T \setminus V$ нашлось поле, для которого $g_4(z_2) \neq 0$, то согласно замечанию 3.2 такое поле можно выпрямить с сохранением полей e_1, e_2 . Выше показано, что первый случай, к которому свелась такая ситуация, противоречит невырожденности.

В рамках же второго случая все поля из T имеют тождественно нулевую вторую компоненту. Но в силу леммы 3.4 наличие такой четверки полей, касательных к поверхности M , снова означает ее вырожденность по Леви. Лемма 3.3 доказана. $\square$

Теперь обозначим схему исследования (с использованием доказанных лемм) однородных невырожденных по Леви поверхностей, отвечающих разложимым неразрешимым алгебрам из таблицы 1 и, тем самым, доказательства теоремы 1.1.

Во-первых, заметим, что алгебры $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_4, \mathfrak{m}_{18}$ из этого перечня являются нильпотентными. Наличие у них только вырожденных по Леви интегральных поверхностей зафиксировано в [1].

Большинство оставшихся алгебр из упомянутых 27 типов (как, впрочем, и три упомянутые нильпотентные алгебры) имеет абелевы подалгебры размерности ≥ 3 . Более точно, справедливы следующие утверждения.

Предложение 3.1. *Тринадцать типов алгебр из таблицы 1 содержат четырехмерные абелевы идеалы.*

Доказательство. Для доказательства укажем такие идеалы для десяти алгебр, не являющихся нильпотентными:

$$\begin{aligned} \text{алгебра } \mathfrak{m}_2 &: \langle e_1, e_3, e_4, e_5 \rangle, \\ \text{алгебры } \mathfrak{m}_5, \mathfrak{m}_6, \mathfrak{m}_7, \mathfrak{m}_8 &: \langle e_1, e_2, e_4, e_5 \rangle, \\ \text{алгебры } \mathfrak{m}_{19}, \mathfrak{m}_{20}, \mathfrak{m}_{21}, \mathfrak{m}_{22}, \mathfrak{m}_{23} &: \langle e_1, e_2, e_3, e_5 \rangle. \end{aligned}$$

Предложение 3.1 доказано. $\square$

С учетом леммы 3.3 получаем следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Для 13 из 23 типов разложимых разрешимых пятимерных алгебр утверждение теоремы 1.1 верно.*

Предложение 3.2. *Все оставшиеся 10 типов алгебр из таблицы 1 содержат трехмерные абелевы подалгебры.*

Доказательство. Достаточно непосредственно проверить следующие факты:

$$\begin{aligned} \text{алгебра } \mathfrak{m}_3 &: \langle e_1, e_3, e_5 \rangle \text{ — абелев идеал,} \\ \text{алгебры } \mathfrak{m}_{11}, \mathfrak{m}_{12}, \mathfrak{m}_{13}, \mathfrak{m}_{14}, \mathfrak{m}_{15} &: \langle e_1, e_2, e_4 \rangle \text{ — абелев идеал,} \\ \text{алгебры } \mathfrak{m}_{24}, \mathfrak{m}_{25}, \mathfrak{m}_{26} &: \langle e_1, e_2, e_5 \rangle, \langle e_1, e_3, e_5 \rangle \text{ — абелевы подалгебры,} \\ \text{алгебры } \mathfrak{m}_{27} &: \langle e_1, e_2, e_5 \rangle \text{ — абелев идеал.} \end{aligned}$$

$\square$

Исследование именно этих десяти типов алгебр составляет содержание оставшейся части статьи. Доказанная выше лемма 3.2 дает возможность изучать для каждой из таких алгебр лишь два упомянутых в ней подслучая (вместо пяти, рассматривавшихся, например, в [1]).

Дополнительные упрощения рассуждений возникают при разбиении совокупности этих 10 типов на блоки, сформированные в предложении 3.2 и связанные с выделяемыми в этих блоках абелевыми идеалами и подалгебрами.

4. Голоморфные реализации алгебры $\mathfrak{m}_3$. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{m}_3$, определяемую коммутационными соотношениями

$$[e_1, e_2] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_3.$$

Предложение 4.1. *С точностью до голоморфной эквивалентности любая голоморфная реализация алгебры $\mathfrak{m}_3$ допускает невырожденные по Леви интегральные поверхности лишь из семейства*

$$v = \ln y_1 + \alpha \ln y_2, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4.1)$$

Доказательство. Алгебра $\mathfrak{m}_3$ содержит трехмерную абелеву подалгебру $\langle e_1, e_3, e_5 \rangle$. Поэтому, основываясь на лемме 3.2, для построения голоморфных реализаций данной алгебры будем рассматривать наборы базисных полей двух видов:

$$\begin{aligned} \text{Случай 1: } e_1 &= (1, 0, 0), \\ e_2 &= (f_2(z_1, z_2, w), g_2(z_1, z_2, w), h_2(z_1, z_2, w)), \\ e_3 &= (0, 1, 0), \\ e_4 &= (f_4(z_1, z_2, w), g_4(z_1, z_2, w), h_4(z_1, z_2, w)), \\ e_5 &= (0, 0, 1); \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \text{Случай 2: } e_1 &= (1, 0, 0), \\ e_2 &= (f_2(z_1, z_2, w), g_2(z_1, z_2, w), h_2(z_1, z_2, w)), \\ e_3 &= (\hat{f}_3(z_2), 0, \hat{h}_3(z_2)), \\ e_4 &= (f_4(z_1, z_2, w), g_4(z_1, z_2, w), h_4(z_1, z_2, w)), \\ e_5 &= (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Рассмотрим случай 1. Из соотношений $[e_1, e_2] = e_1$, $[e_2, e_3] = 0$, $[e_2, e_5] = 0$ следует, что поле e_2 в (4.2) имеет вид

$$e_2 = (z_1 + A_2, B_2, C_2)$$

с некоторыми комплексными коэффициентами A_2, B_2, C_2 . Аналогично, используя равенства $[e_1, e_4] = 0$, $[e_3, e_4] = e_3$, $[e_4, e_5] = 0$, получаем следующий вид поля e_4 в наборе (4.2):

$$e_4 = (A_4, z_2 + B_4, C_4).$$

Коммутационное соотношение $[e_2, e_4] = 0$ приводит к векторному равенству

$$(-A_4, B_2, 0) = (0, 0, 0),$$

из которого следует, что $A_4 = 0$ и $B_2 = 0$.

Используя замены $z_1^* = z_1 + A_2$, $z_2^* = z_2 + B_4$ и рассматривая вместо получающихся полей e_2 и e_4 их линейные комбинации с полем e_5 , приходим к окончательному виду базиса (4.2) в случае 1 (знаки «*» опускаем):

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0), \\ e_2 &= (z_1, 0, ia), \\ e_3 &= (0, 1, 0), \\ e_4 &= (0, z_2, ib), \\ e_5 &= (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (4.4)$$

В записи (4.4) $a = \operatorname{Im} C_2$, $b = \operatorname{Im} C_4$.

Интегральная поверхность алгебры с базисом (4.4), очевидно, является трубчатой с уравнением вида $\Phi(y_1, y_2, v) = 0$, которое можно записать в виде $v = F(y_1, y_2)$. Касание векторными полями e_2 и e_4 обсуждаемой интегральной поверхности эквивалентно выполнению системы двух равенств

$$y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} - a = 0, \quad y_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} - b = 0.$$

Решая эту систему, получаем уравнение искомой интегральной поверхности:

$$v = a \ln y_1 + b \ln y_2.$$

Так как нас интересуют только невырожденные поверхности, то в нем $a \neq 0$, $b \neq 0$. Тогда растяжением переменной $w^* = w/a$ это уравнение сводится к (4.1).

Перейдем теперь к рассмотрению случая 2, то есть набора базисных полей (4.3). Используя соотношения $[e_1, e_4] = 0$, $[e_4, e_5] = 0$, получаем, что функции f_4 , g_4 , h_4 не зависят от переменных z_1 и w . Таким образом,

$$e_4 = (\hat{f}_4(z_2), \hat{g}_4(z_2), \hat{h}_4(z_2)).$$

Если допустить, что $\hat{g}_4(z_2)$ тождественно обращается в нуль, то в базисе (4.3) окажется четыре поля с тождественно нулевыми вторыми компонентами, что, согласно лемме 3.4, приводит к вырождению по Леви соответствующей интегральной поверхности. Поэтому можем считать, что (возможно, после сдвига начала координат) $\hat{g}_4(0) \neq 0$. Следовательно, пользуясь замечанием 3.2, поле e_4 можно привести к виду $e_4 = (0, 1, 0)$. Тогда из соотношений

$$[e_1, e_2] = e_1, \quad [e_2, e_4] = 0, \quad [e_2, e_5] = 0$$

следует, что поле e_2 в (4.3) имеет вид $e_2 = (z_1 + A_2, B_2, C_2)$. Используя равенство $[e_3, e_4] = e_3$, получаем следующее соотношение:

$$(-\hat{f}'_3(z_2), 0, -\hat{h}'_3(z_2)) = (\hat{f}_3(z_2), 0, \hat{h}_3(z_2)),$$

откуда $\hat{f}_3 = A_3 e^{-z_2}$, $\hat{h}_3 = C_3 e^{-z_2}$. Последнее неиспользованное коммутационное соотношение $[e_2, e_3] = 0$ приводит к векторному равенству

$$(-A_3(B_2 + 1)e^{-z_2}, 0, -B_2 C_3 e^{-z_2}) = (0, 0, 0).$$

Таким образом, должна выполняться система уравнений

$$A_3(B_2 + 1) = 0, \quad B_2 C_3 = 0.$$

Ее решениями являются три набора:

$$(1) B_2 = 0, A_3 = 0; \quad (2) A_3 = 0, C_3 = 0; \quad (3) B_2 = -1, C_3 = 0.$$

Очевидно, что при подстановке любого из этих трех наборов в пятерку

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0), \\ e_2 &= (z_1 + A_2, B_2, C_2), \\ e_3 &= (A_3 e^{-z_2}, 0, C_3 e^{-z_2}), \\ e_4 &= (0, 1, 0), \\ e_5 &= (0, 0, 1), \end{aligned}$$

в ней всегда найдется пара полей, гарантирующая либо вырождение по Леви интегральной поверхности, либо ранг алгебры, меньший пяти. Предложение 4.1 доказано. $\square$

5. Голоморфные реализации алгебр $\mathfrak{m}_{11}$ – $\mathfrak{m}_{15}$. Содержание этого раздела посвящено доказательству следующего утверждения.

Теорема 5.1. *Любая невырожденная по Леви однородная гиперповерхность, ассоциированная с одной из алгебр типов $\mathfrak{m}_{11}$ – $\mathfrak{m}_{15}$, либо является сферической индефинитной поверхностью, либо голоморфно эквивалентна одной из трубчатых поверхностей*

$$(i) v = y_1^2 + \varepsilon \ln y_2 \quad (\varepsilon = \pm 1) \quad \text{или} \quad (ii) v \sin y_2 + y_1 \cos y_2 = e^{py_2} \quad (p \in \mathbb{R}).$$

Замечание 5.1. Поверхности из теоремы 5.1 являются известными трубками. При этом поверхности из п. (i) имеют аффинно-однородные основания и семимерные алгебры симметрий, описанные в [21]. Семейство из п. (ii) также имеется в [21], но «максимальные» алгебры симметрий для них имеют размерность 6, а основания этих трубок не являются аффинно-однородными.

Доказательные обсуждения теоремы 5.1 начнем с напомнимания о наличии у каждой алгебры из обсуждаемого списка абелева идеала $\langle e_1, e_2, e_4 \rangle$. Ссылаясь на лемму 3.2, изучение голоморфных реализаций этих алгебр можно свести к двум случаям, связанным с упрощением именно тройки полей e_1, e_2, e_4 .

Отметим также, что абелевой подалгеброй (но не идеалом) любой из пяти алгебр $\mathfrak{m}_{11}-\mathfrak{m}_{15}$ является линейная оболочка другой тройки базисных полей $\mathfrak{m}_{11}-\mathfrak{m}_{15}$, а именно, $\langle e_1, e_2, e_5 \rangle$. Это замечание также будет использовано в дальнейшем, но начнем мы с тройки полей e_1, e_2, e_4 .

Первый случай леммы 3.2. В этом случае тройку e_1, e_2, e_4 можно считать (для любой из пяти алгебр $\mathfrak{m}_{11}-\mathfrak{m}_{15}$) выпрямленной и имеющей вид

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_4 = (0, 0, 1). \quad (5.1)$$

Для рассмотрения в едином ключе всех пяти алгебр перейдем к универсальной форме имеющих в них коммутационных соотношений. Несложно убедиться, что для любой из этих алгебр содержательные соотношения можно описать тремя формулами

$$[e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda e_1 + \mu e_2, \quad [e_4, e_5] = e_4. \quad (5.2)$$

Наборы вещественных коэффициентов $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ для всех пяти типов алгебр описываются при этом следующей таблицей:

	α	β	λ	μ
$\mathfrak{m}_{11}$	0	0	1	0
$\mathfrak{m}_{12}$	1	0	1	1
$\mathfrak{m}_{13}$	1	0	0	1
$\mathfrak{m}_{14}$	1	0	0	s
$\mathfrak{m}_{15}$	p	-1	1	p

Предложение 5.1. *Если базис пятимерной алгебры $\mathfrak{g}$ голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^3$ удовлетворяет условиям (5.1), а отличные от (5.2) коммутационные соотношения в $\mathfrak{g}$ являются тривиальными, то базис $\mathfrak{g}$ имеет вид*

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0), \\ e_3 &= (\alpha z_1 + \lambda z_2 + A_3, \beta z_1 + \mu z_2 + B_3, 0), \\ e_4 &= (0, 0, 1), \\ e_5 &= (A_5, B_5, w + C_5) \end{aligned} \quad (5.3)$$

с некоторыми комплексными постоянными A_k, B_k, C_k . При этом выполняются два дополнительных соотношения

$$\alpha A_5 + \lambda B_5 = 0, \quad \beta A_5 + \mu B_5 = 0. \quad (5.4)$$

Доказательство. Три тривиальных коммутационных соотношения (из десяти, имеющих в произвольной пятимерной алгебре) использованы нами для выпрямления базисной тройки полей e_1, e_2, e_4 . Для уточнения вида поля e_5 рассмотрим еще три соотношения

$$[e_1, e_5] = 0, \quad [e_2, e_5] = 0, \quad [e_4, e_5] = e_4.$$

Два первых из них означают, что компоненты поля

$$e_5 = (f_5(z_1, z_2, w), g_5(z_1, z_2, w), h_5(z_1, z_2, w))$$

не зависят от переменных z_1, z_2 . Третье соотношение можно записать в виде векторного равенства

$$\left(\frac{\partial f_5}{\partial w}, \frac{\partial g_5}{\partial w}, \frac{\partial h_5}{\partial w} \right) = (0, 0, 1).$$

Ясно, что из него следует заявленный в предложении 5.1 вид поля e_5 .

Аналогичное рассмотрение трех коммутационных соотношений, содержащих поле e_3 , т.е. $[e_3, e_4] = 0$, а также двух первых соотношений из набора (5.2), приводят к пошаговому упрощению вида этого поля.

Так, из соотношения $[e_3, e_4] = 0$ получаем первое упрощение:

$$e_3 = (f_3(z_1, z_2), g_3(z_1, z_2), h_3(z_1, z_2));$$

затем из соотношения $[e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2$ — второе:

$$e_3 = (\alpha z_1 + \hat{f}_3(z_2), \beta z_1 + \hat{g}_3(z_2), \hat{h}_3(z_2));$$

и, наконец, из соотношения $[e_2, e_3] = \lambda e_1 + \mu e_2$ — третье:

$$e_3 = (\alpha z_1 + \lambda z_2 + A_3, \beta z_1 + \mu z_2 + B_3, C_3).$$

Для завершения доказательства предложения 5.1 рассмотрим коммутатор $[e_3, e_5] = 0$ для упрощенных полей e_3 и e_5 . Здесь возникает векторное равенство

$$C_3(0, 0, 1) - A_5(\alpha, \beta, 0) - B_5(\lambda, \mu, 0) = (0, 0, 0).$$

Из рассмотрения его отдельных компонент вытекают равенство $C_3 = 0$ и соотношения (5.4). Предложение 5.1 доказано. $\square$

Предложение 5.2. *Интегральная поверхность любой алгебры векторных полей с базисом вида (5.3)–(5.4) является трубкой над аффинно-однородным основанием.*

Доказательство. Определяющая функция $\Phi(z_1, z_2, w)$ интегральной поверхности

$$M = \{\Phi(z_1, z_2, w) = 0\}$$

произвольной пятимерной алгебры g голоморфных векторных полей с базисом e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 удовлетворяет общеизвестным условиям касания

$$\operatorname{Re}(e_k(\Phi)|_M) \equiv 0, \quad k = 1, \dots, 5. \quad (5.5)$$

В случае базиса (5.3), содержащего три тривиальных дифференцирования $\partial/\partial z_1, \partial/\partial z_2, \partial/\partial w$, условия (5.5) означают независимость функции $\Phi(z_1, z_2, w)$ от трех вещественных переменных $x_1 = \operatorname{Re} z_1, x_2 = \operatorname{Re} z_2, u = \operatorname{Re} w$. Другими словами, поверхность M является трубкой над поверхностью

$$\Gamma = \{\Phi(y_1, y_2, v) = 0\} \quad (5.6)$$

из вещественного трехмерного пространства с координатами y_1, y_2, v . С учетом этого два оставшихся соотношения (5.5) превращаются в систему двух уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left((\alpha y_1 + \lambda y_2 + \operatorname{Im} A_3) \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + (\beta y_1 + \mu y_2 + \operatorname{Im} B_3) \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \right) &= 0, \\ \operatorname{Re} \left((\operatorname{Im} A_5) \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + (\operatorname{Im} B_5) \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} + (v + \operatorname{Im} C_5) \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Эта система означает, что поверхность (5.6) является аффинно-однородной интегральной поверхностью для (абелевой) алгебры аффинных векторных полей с базисом

$$\begin{aligned} E_3 &= (\alpha y_1 + \lambda y_2 + \operatorname{Im} A_3) \frac{\partial}{\partial y_1} + (\beta y_1 + \mu y_2 + \operatorname{Im} B_3) \frac{\partial}{\partial y_2}, \\ E_5 &= (\operatorname{Im} A_5) \frac{\partial}{\partial y_1} + (\operatorname{Im} B_5) \frac{\partial}{\partial y_2} + (v + \operatorname{Im} C_5) \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned}$$

Предложение 5.2 доказано. $\square$

Уточним полученное общее утверждение за счет более подробного рассмотрения алгебр $\mathfrak{m}_{11}-\mathfrak{m}_{15}$ в обсуждаемом первом случае.

Предложение 5.3. *Всякая однородная невырожденная поверхность, ассоциированная в первом случае с алгеброй $\mathfrak{m}_{11}$, голоморфно эквивалентна одной из поверхностей семейства*

$$v = y_1^2 + \varepsilon \ln y_2 \quad (\varepsilon = \pm 1); \quad (5.7)$$

алгебрам $\mathfrak{m}_{12}$ – $\mathfrak{m}_{15}$ соответствуют в первом случае лишь вырожденные по Леви поверхности.

Доказательство. Рассмотрим сначала соотношения (5.4) для алгебр $\mathfrak{m}_{12}$ – $\mathfrak{m}_{15}$. С учетом таблицы значений коэффициентов α , β , λ , μ для всех этих четырех типов алгебр получаем равенства $A_5 = B_5 = 0$. В таком случае наличие в любой из этих алгебр полей $e_5 = (0, 0, w + C_5)$ и $e_4 = (0, 0, 1)$ означает вырожденность по Леви любой интегральной поверхности таких алгебр.

Теперь обсудим алгебру $\mathfrak{m}_{11}$. Для нее с учетом соотношений (5.4) получаем поля e_3 , e_5 в виде

$$e_3 = (z_2 + A_3, B_3, 0), \quad e_5 = (A_5, 0, w + C_5). \quad (5.8)$$

Заменяя эти поля их комбинациями с полями из выпрямленной тройки e_1 , e_2 , e_4 , можно считать, что все константы в формулах (5.8) — чисто мнимые. Система дифференциальных уравнений в частных производных, соответствующая двум этим полям и уравнениям $v = F(y_1, y_2)$ искомым однородных поверхностей, имеет вид

$$(y_2 + a_3) \frac{\partial F}{\partial y_1} + b_3 \frac{\partial F}{\partial y_2} = 0, \quad a_5 \frac{\partial F}{\partial y_1} = F + c_5. \quad (5.9)$$

Все константы в этих уравнениях являются мнимыми частями одноименных констант из формул (5.8), обозначенных заглавными буквами.

Отметим, что при $a_5 = 0$ или $b_3 = 0$ решение системы (5.9) очевидно приводит к вырожденным поверхностям.

При ненулевых коэффициентах a_5 , b_3 сначала получаем решение второго уравнения в виде

$$F = -c_5 + H(y_2)e^{y_1/a_5}$$

с произвольной аналитической функцией $H(y_2)$. Тогда первое уравнение (5.9) примет вид (после деления обеих его частей на e^{y_1/a_5})

$$H'(y_2) = N(y_2 + a_3)H(y_2), \quad N = -\frac{1}{a_5 b_3}.$$

Отсюда получаем общее решение системы (5.9) в виде

$$F = -c_5 + D \exp\left(\frac{N}{2}(y_2 + a_3)^2\right) e^{y_1/a_5}$$

с произвольной константой D . Логарифмируя теперь уравнение $v = F$ (при положительном D), получим его вариант

$$\ln(v + c_5) = \frac{N}{2}(y_2 + a_3)^2 + \frac{1}{a_5}y_1 + \ln D,$$

который сводится к (5.7) несложными аффинными преобразованиями. Предложение 5.3 доказано. $\square$

Второй случай леммы 3.2. Будем рассматривать базис любой из пяти алгебр $\mathfrak{m}_{11}$ – $\mathfrak{m}_{15}$, считая, что тройка элементов e_1 , e_2 , e_4 этого базиса упрощена до состояния

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 0, 1), \quad e_4 = (\hat{f}_4, 0, \hat{h}_4).$$

Замечание 5.2. Здесь мы выпрямляем поля и связываем их с координатными дифференцированиями в порядке, отличном от обсуждений предыдущего раздела. На окончательный итог обсуждений такие перестановки, разумеется, не влияют, но некоторые фрагменты рассуждений упрощаются за счет таких перестановок.

Напомним, что поле e_5 коммутирует с полями e_1, e_2 . Это означает, что при выпрямленных e_1, e_2 поле e_5 имеет следующий упрощенный вид:

$$e_5 = (\hat{f}_5(z_2), \hat{g}_5(z_2), \hat{h}_5(z_2)).$$

При этом в силу леммы 3.4 для четверки базисных (линейно независимых над $\mathbb{R}$!) полей

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_2 &= (1, 0, 0), \\ e_4 &= (\hat{f}_4, 0, \hat{h}_4), \\ e_5 &= (\hat{f}_5(z_2), \hat{g}_5(z_2), \hat{h}_5(z_2)) \end{aligned} \quad (5.10)$$

на невырожденной по Леви поверхности невозможно тождественное равенство нулю столбца из их вторых компонент. Осуществим (если необходимо) малый сдвиг в точку на поверхности, в которой $\hat{g}_5 \neq 0$. Далее, пользуясь замечанием 3.2, выпрямим поле e_5 до состояния $(0, 1, 0)$. При этом вид выпрямленных ранее полей e_1, e_2 также сохранится.

После этого мы имеем базис голоморфной реализации любой из пяти алгебр $\mathfrak{m}_{11}$ – $\mathfrak{m}_{15}$ в виде

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_2 &= (1, 0, 0), \\ e_3 &= (f_3(z_1, z_2, w), g_3(z_1, z_2, w), h_3(z_1, z_2, w)), \\ e_4 &= (\hat{f}_4, 0, \hat{h}_4), \\ e_5 &= (0, 1, 0). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Невырожденные по Леви интегральные поверхности (если они существуют) любой алгебры с таким базисом являются трубчатыми в связи с наличием в алгебре трех дифференцирований по отдельным координатам. При этом имеют место два следующих утверждения.

Предложение 5.4. *Если алгебра g голоморфных векторных полей в пространстве $\mathbb{C}^3$ имеет базис вида (5.11) и структуру одной из четырех алгебр $\mathfrak{m}_{11}$ – $\mathfrak{m}_{14}$, то всякая интегральная поверхность такой алгебры является вырожденной по Леви.*

Предложение 5.5. *Пусть алгебра g голоморфных векторных полей в пространстве $\mathbb{C}^3$ имеет базис вида (5.11) и структуру $\mathfrak{m}_{15}$, а M — интегральная поверхность такой алгебры. Тогда M либо является вырожденной по Леви, либо голоморфно эквивалентна одной из следующих аффинно-однородных индефинитных поверхностей:*

$$v = \arg(y_1 + iy_2), \quad (5.12)$$

$$y_1 x_2 - v y_2 = |z_2| e^{B \arg z_2}, \quad B \in \mathbb{R}. \quad (5.13)$$

Замечание 5.3. Поверхность (5.12) голоморфно эквивалентна сферической (см. [6]) поверхности $v = y_1 \operatorname{tg} y_2$.

Замечание 5.4. Поверхности из семейства (5.13) не являются трубчатыми. В то же время любая из них голоморфно эквивалентна одной из трубок

$$v \cos y_2 + y_1 \sin y_2 = e^{p y_2}, \quad p \geq 0. \quad (5.14)$$

Замечание 5.5. Основание трубчатой поверхности (5.14), описываемое этим же уравнением в пространстве трех вещественных переменных y_1, y_2, v не является аффинно-однородной поверхностью. В работе [21], посвященной изучению голоморфно-однородных поверхностей с богатыми алгебрами симметрии, построено несколько семейств таких «странных» трубок и, в частности, семейство (5.14).

Доказательство предложения 5.4. Изучим еще не рассмотренные коммутационные соотношения. Например, из равенства $[e_4, e_5] = 0$ для полей вида (5.11) получаем уточненный вид поля

$$e_4 = e^{-z_2}(A_4, 0, C_4)$$

с некоторыми комплексными постоянными. Далее, равенство $[e_3, e_5] = 0$ означает, что компоненты поля e_3 не зависят от переменной z_2 . Из рассмотрения коммутаторов

$$[e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda e_1 + \mu e_2$$

получаем следующий вид поля e_3 :

$$e_3 = (\beta w + \mu z_1 + A_3, B_3, \alpha w + \lambda z_1 + C_3)$$

с некоторыми (комплексными) константами A_3, B_3, C_3 .

Отметим, что для алгебр, допускающих невырожденные интегральные поверхности, коэффициент $B_3 \neq 0$ по аналогии с уже обсуждавшейся выше четверкой полей (5.10).

Остается рассмотреть последнее коммутационное соотношение $[e_3, e_4] = 0$ с учетом полученной информации о полях e_3, e_4 . Из него получаем векторное равенство

$$-B_3 e^{-z_2}(A_4, 0, C_4) - e^{-z_2}(A_4(\mu, 0, \lambda) + C_4(\beta, 0, \alpha)) = (0, 0, 0).$$

Две компоненты этого равенства являются содержательными и имеют вид

$$A_4(B_3 + \mu) + C_4\beta = 0, \quad A_4\lambda + C_4(B_3 + \alpha) = 0. \quad (5.15)$$

Проверим совместность этих условий с видом полученных базисов

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_2 &= (1, 0, 0), \\ e_3 &= (\beta w + \mu z_1 + A_3, B_3, \alpha w + \lambda z_1 + C_3), \\ e_4 &= (A_4 e^{-z_2}, 0, C_4 e^{-z_2}), \\ e_5 &= (0, 1, 0) \end{aligned} \quad (5.16)$$

обсуждаемых алгебр и с требованием невырожденности интегральных поверхностей таких алгебр.

I. Для алгебры $\mathfrak{m}_{11}$ с набором $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = (0, 0, 1, 0)$ система уравнений (5.15) превращается в систему

$$A_4 B_3 = 0, \quad A_4 + C_4 B_3 = 0.$$

При $B_3 \neq 0$ из нее следуют равенства $A_4 = C_4 = 0$, невозможные для базисного поля e_4 обсуждаемой алгебры.

II. Для алгебры $\mathfrak{m}_{12}$ с набором $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = (1, 0, 1, 1)$ система двух уравнений (5.15) превращается в систему

$$A_4(B_3 + 1) = 0, \quad A_4 + C_4(B_3 + 1) = 0.$$

Заметим, что для любого решения этой системы выполняется равенство $A_4 = 0$. В то же время при таком условии в алгебре с базисом (5.16) мы имеем два комплексно пропорциональных поля e_1 и e_4 . Это приводит к вырождению по Леви любой интегральной поверхности такой алгебры.

III. Для алгебры $\mathfrak{m}_{13}$ с набором $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = (1, 0, 0, 1)$ система двух уравнений (5.15) превращается в систему

$$A_4(B_3 + 1) = 0, \quad C_4(B_3 + 1) = 0.$$

При $B_3 \neq -1$ из этой системы следует одновременное обращение в нуль коэффициентов A_3, B_3 , что невозможно для базисного поля e_4 , как отмечалось выше в случае $\mathfrak{m}_{11}$. При $B_3 = -1$ четверка линейно независимых над $\mathbb{R}$ полей $e_1, e_2, e_3 + e_5, e_4$ из базиса (5.16) имеет тождественно нулевые вторые компоненты. Как и при рассмотрении базиса (5.10), это несовместимо с невырожденностью по Леви интегральных поверхностей такой алгебры.

IV. Для алгебры $\mathfrak{m}_{14}$ с набором $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = (1, 0, 0, s)$ система двух уравнений (5.15) превращается в систему

$$A_4(B_3 + s) = 0, \quad C_4(B_3 + 1) = 0. \quad (5.17)$$

Напомним, что здесь выполняется неравенство $s \neq 1$ для параметра s . Тогда из (5.17) следует, что либо $A_4 = 0$, либо $C_4 = 0$. В каждом из этих случаев в базисе (5.16) найдется пара комплексно

пропорциональных полей (e_1 и e_4 или e_2 и e_4). Как и в предыдущем случае, это ведет к вырождению по Леви любой интегральной поверхности соответствующей алгебры. Предложение 5.4 доказано. $\square$

Доказательство предложения 5.5. Для алгебры $\mathfrak{m}_{15}$ с набором $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = (p, -1, 1, p)$ получаем систему (5.15) в виде

$$A_4(B_3 + p) - C_4 = 0, \quad A_4 + C_4(B_3 + p) = 0. \quad (5.18)$$

При каждом фиксированном p имеется ровно две возможности для выполнения этих равенств с ненулевыми значениями A_4, C_4 . Обе эти возможности связаны с равенством $(B_3 + p)^2 = -1$ и описываются в итоге соотношениями

$$B_3 = -p + \varepsilon i \quad (\varepsilon = \pm 1). \quad (5.19)$$

Базисы соответствующих алгебр имеют в этих ситуациях вид

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_2 &= (1, 0, 0), \\ e_3 &= (-w + pz_1 + A_3, -p + i\varepsilon, pw + z_1 + C_3), \\ e_4 &= (A_4 e^{-z_2}, 0, C_4 e^{-z_2}), \\ e_5 &= (0, 1, 0). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Такой набор полей допускает еще несколько простых преобразований. Например, сдвиги переменных

$$z_1^* = z_1 + \frac{A_3 p - C_3}{1 + p^2}, \quad w^* = w + \frac{C_3 p - A_3}{1 + p^2}$$

освобождают формулы (5.20) от констант A_3, C_3 . Рассмотрение вместо поля e_3 комбинации $e_3 + p e_5$ еще более упрощает формулу для e_3 и приводит ее к виду

$$e_3 = (-w + pz_1, \varepsilon i, pw + z_1).$$

Поскольку из (5.18) и (5.19) следует, что $C_4 = i\varepsilon A_4$, и для базисного поля e_4 коэффициенты C_4, A_4 не могут быть нулевыми, то растяжением можно привести это поле к виду

$$e_4 = (e^{it} e^{-z_2}, 0, i\varepsilon e^{it} e^{-z_2}) = (e^{it-z_2}, 0, i\varepsilon e^{it-z_2}).$$

Еще одним сдвигом $z_2^* = z_2 - it$ приводим базисы обсуждаемых алгебр к виду

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_2 &= (1, 0, 0), \\ e_3 &= (-w + pz_1, i\varepsilon, pw + z_1), \\ e_4 &= (e^{-z_2}, 0, i\varepsilon e^{-z_2}), \\ e_5 &= (0, 1, 0). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Интегральная поверхность M любой такой алгебры, очевидно, является трубчатой поверхностью и может быть задана уравнением $v = F(y_1, y_2)$. Непосредственное интегрирование алгебры (5.21) сводится к решению системы двух уравнений в частных производных

$$(-F + py_1) \frac{\partial F}{\partial y_1} + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial y_1} = (pF + y_1), \quad -e^{-x_2} \sin y_2 \frac{\partial F}{\partial y_1} = \varepsilon e^{-x_2} \cos y_2 \quad (5.22)$$

относительно функции $F(y_1, y_2)$. Решение системы (5.22) имеет вид

$$F = \varepsilon y_1 \frac{\cos y_2}{\sin y_2} + \frac{C}{\sin y_2} e^{\varepsilon p y_2},$$

где C — произвольная вещественная константа. Соответствующие уравнения однородных поверхностей (после очевидных упрощений) можно записать в виде

$$v \sin y_2 + y_1 \cos y_2 = C e^{\varepsilon p y_2}. \quad (5.23)$$

При $C = 0$ уравнение поверхности (5.23) простыми переобозначениями переменных превращается в уравнение известной (см., например, [20]) трубчатой поверхности (5.12) с аффинно-однородным

основанием. При ненулевых C растяжение переменных $z_1 = \varepsilon C z_1^*$, $z_2 = \varepsilon z_2^*$, $w = C w^*$ приводит уравнение (5.23) к виду (5.13), т.е.

$$v \sin y_2 + y_1 \cos y_2 = e^{py_2}.$$

Завершая доказательство предложения 5.5, заметим, что при голоморфной замене координат $z_2^* = e^{-z_2}$ поля базиса (5.21) приобретают вид

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_2 &= (1, 0, 0), \\ e_3 &= (-w + pz_1, -i\varepsilon z_2, pw + z_1), \\ e_4 &= (z_2, 0, i\varepsilon z_2), \\ e_5 &= (0, -z_2, 0) \end{aligned}$$

и все они становятся аффинными векторными полями. Это означает, что интегральные поверхности такой аффинной алгебры являются аффинно-однородными. Уравнения таких поверхностей (приведенные без подробного вывода) имеют вид

$$y_1 x_2 - v y_2 = |z_2| e^{B \arg z_2}, \quad B \in \mathbb{R}. \quad (5.24)$$

При этом в отличие от трубок над аффинно-однородными вещественными основаниями, коэффициенты аффинных отображений, преобразующих поверхности (5.24) в себя, являются, вообще говоря, комплексными, а не вещественными. Предложение 5.5 доказано. $\square$

6. Голоморфные реализации алгебр $\mathfrak{m}_{24}$ – $\mathfrak{m}_{26}$. Сформулируем основное утверждение этого раздела.

Теорема 6.1. *Любая невырожденная по Леви однородная гиперповерхность, ассоциированная с одной из алгебр типов $\mathfrak{m}_{24}$ – $\mathfrak{m}_{26}$, либо является сферической поверхностью, либо голоморфно эквивалентна трубчатой поверхности*

$$v = y_1 y_2 + y_2 \ln y_2.$$

Доказательство этой теоремы проводится по описанной выше схеме и начинается (общим образом для всех трех алгебр) с упрощения базиса абелевой подалгебры $\langle e_1, e_3, e_5 \rangle$. Обсуждения любого из этих трех типов алгебр начинаем с выпрямления (по лемме 3.2) двух полей e_1 , e_3 и рассмотрения после этого двух случаев, связанных со свойствами поля e_5 .

В первом случае леммы 3.2 для всех трех алгебр будем обсуждать пятерку базисных полей вида

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_3 &= (1, 0, 0), \\ e_5 &= (0, 1, 0), \\ e_2 &= (f_2, g_2, h_2), \\ e_4 &= (f_4, g_4, h_4) \end{aligned}$$

с некоторыми голоморфными функциями f_k, g_k, h_k ($k = 2, 4$).

Схема уточнения свойств этих функций связана с коммутационными соотношениями, имеющимися в этих алгебрах, и является общей как для первого, так и для второго случаев. Два первых шага этой схемы связаны с рассмотрением тройки («универсально устроенных») коммутаторов

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_5] = 0, \quad (6.1)$$

получаемых с участием поля e_2 (первый шаг), и аналогичной тройки, связанной с полем e_4 (второй шаг). На втором шаге три алгебры $\mathfrak{m}_{24}$, $\mathfrak{m}_{25}$, $\mathfrak{m}_{26}$ имеют заметные различия:

$$\mathfrak{m}_{24} : [e_1, e_4] = 2e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2 + e_3, \quad [e_4, e_5] = 0, \quad (6.2)$$

$$\mathfrak{m}_{25} : [e_1, e_4] = (1 + q)e_1, \quad [e_3, e_4] = qe_3, \quad [e_4, e_5] = 0 \quad (|q| \leq 1), \quad (6.3)$$

$$\mathfrak{m}_{26} : [e_1, e_4] = 2pe_1, \quad [e_3, e_4] = e_2 + pe_3, \quad [e_4, e_5] = 0 \quad (p \geq 0). \quad (6.4)$$

Завершающим шагом общей схемы является рассмотрение последнего коммутационного соотношения, связывающего поля e_2 и e_4 :

$$\mathfrak{m}_{24}, \mathfrak{m}_{25} : [e_2, e_4] = e_2, \quad (6.5)$$

$$\mathfrak{m}_{26} : [e_2, e_4] = pe_2 - e_3. \quad (6.6)$$

Первый шаг для всех трех алгебр обсудим общим образом. Здесь нулевые коммутаторы из тройки (6.1) означают, что компоненты f_2, g_2, h_2 поля e_2 не зависят от переменных z_2, w . Третье равенство $[e_2, e_3] = e_1$ из (6.1) приводит к формуле

$$e_2 = (A_2, B_2, -z_1 + C_2) \quad (6.7)$$

с некоторыми комплексными константами A_2, B_2, C_2 .

В итоге, различия в обсуждении трех алгебр в случае 1 леммы 3.2 начинаются с базисов, имеющих вид

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_3 &= (1, 0, 0), \\ e_5 &= (0, 1, 0), \\ e_2 &= (A_2, B_2, -z_1 + C_2), \\ e_4 &= (f_4, g_4, h_4). \end{aligned} \quad (6.8)$$

6.1. Алгебра $\mathfrak{m}_{24}$. Коммутационные соотношения в алгебре $\mathfrak{m}_{24}$ имеют вид

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = 2e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = e_2 + e_3.$$

Предложение 6.1. *Любая голоморфная реализация алгебры $\mathfrak{m}_{24}$ допускает лишь вырожденные по Леви пятимерные орбиты.*

Доказательство. В первом случае леммы 3.2 рассмотрение тройки (6.2) для алгебры $\mathfrak{m}_{24}$ приводит к формуле

$$e_4 = \left((A_2 + 1)z_1 + A_4, B_2z_1 + B_4, -\frac{1}{2}(z_1 - C_2)^2 + 2w + C_4 \right) \quad (6.9)$$

с некоторыми комплексными константами A_4, B_4, C_4 . Выписывая покомпонентно последний (из десяти) коммутатор $[e_2, e_4] = e_2$ обсуждаемой алгебры, получаем, с учетом формул (6.7) и (6.9), систему трех уравнений

$$A_2(A_2 + 1) = A_2, \quad A_2B_2 = B_2, \quad -A_2(z_1 - C_2) - 2(z_1 - C_2) + (A_2 + 1)z_1 + A_4 = -(z_1 - C_2).$$

Из этих равенств следует, что $A_2 = B_2 = 0, A_4 = -C_2$. В таком случае для поля e_2 получаем координатное представление

$$e_2 = (0, 0, -(z_1 - C_2)). \quad (6.10)$$

Остается заметить, что наличие на обсуждаемой поверхности M пары полей e_2 вида (6.10) и $e_1 = (0, 0, 1)$ означает независимость определяющей функции Φ такой поверхности от переменной w . Как следствие, поверхность M вырождена по Леви в первом случае.

Во втором случае леммы 3.2 мы имеем пять базисных полей вида

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_3 &= (1, 0, 0), \\ e_5 &= (\hat{f}_5(z_2), 0, \hat{h}_5(z_2)), \\ e_2 &= (f_2, g_2, h_2), \\ e_4 &= (f_4, g_4, h_4). \end{aligned}$$

Здесь из рассмотрения двух коммутаторов

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_2, e_3] = e_1$$

получаем упрощенный вид компонент поля

$$e_2 = (\hat{f}_2(z_2), \hat{g}_2(z_2), -z_1 + \hat{h}_2(z_2))$$

и, в частности, факт их независимости от переменной w . Далее рассмотрим два подслучая, связанных с компонентой $\hat{g}_2(z_2)$ этого поля.

В первом подслучае, считая, что $\hat{g}_2(z_2) \equiv 0$ в некоторой окрестности обсуждаемой точки, мы получаем на поверхности M четверку полей с нулевой второй компонентой

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_3 &= (1, 0, 0), \\ e_5 &= (\hat{f}_5(z_2), 0, \hat{h}_5(z_2)), \\ e_2 &= (\hat{f}_2, 0, -z_1 + \hat{h}_2). \end{aligned}$$

По лемме 3.4 такая поверхность M вырождена по Леви.

Во втором подслучае будем считать, что функция $\hat{g}_2(z_2)$ принимает отличное от нуля значение (в исходной точке поверхности или вблизи нее). Тогда по замечанию 3.2 это поле можно упростить за счет голоморфной замены до состояния

$$e_2 = (0, 1, -z_1). \quad (6.11)$$

Поля e_1, e_3, e_5 при этом сохраняют свой вид. Вычисляя с учетом формулы (6.11) коммутатор

$$[e_2, e_5] = (\hat{f}'_5, 0, \hat{h}'_5) - \hat{f}_5(0, 0, -1) = 0,$$

получаем еще более упрощенный вид поля

$$e_5 = (A_5, 0, -A_5 z_2 + C_5), \quad (6.12)$$

где A_5, C_5 — некоторые комплексные константы.

Рассмотрим в этой ситуации три коммутатора (6.2). Из равенства $[e_1, e_4] = 2e_1$ получаем первое упрощение поля e_4 до вида

$$e_4 = (f_4(z_1, z_2), g_4(z_1, z_2), 2w + h_4(z_1, z_2)).$$

Второе из равенств (6.2) дает очередное его упрощение до состояния

$$e_4 = \left(z_1 + \hat{f}_4(z_2), z_1 + \hat{g}_4(z_2), 2w - \frac{1}{2}z_1^2 + \hat{h}_4(z_2) \right).$$

Переходя к последнему коммутатору из (6.2), получаем

$$[e_4, e_5] = (z_1 + \hat{g}_4)(0, 0, -A_5) - (A_5(1, 1, -z_1) + (-A_5 z_2 + C_5)(0, 0, 2)) = (0, 0, 0).$$

Из первой (как и из второй) компоненты этого равенства получается условие $A_5 = 0$. При таком условии касание полем (6.12) поверхности M и наличие на этой поверхности поля $e_1 = (0, 0, 1)$ возможно лишь (по аналогии с рассмотрениями первого случая) в ситуации вырожденной по Леви поверхности M . Предложение 6.1 доказано полностью. $\square$

6.2. Алгебра $\mathfrak{m}_{25}$. Коммутационные соотношения в алгебре $\mathfrak{m}_{25}$ имеют вид

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = (1 + q)e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = qe_3, \quad |q| \leq 1.$$

Предложение 6.2. Любая пятимерная Леви-невыврожденная орбита голоморфной реализации любой алгебры из семейства $\mathfrak{m}_{25}$ либо является сферической поверхностью, либо голоморфно эквивалентна индефинитной трубке

$$v = y_1 y_2 + y_2 \ln y_2$$

с аффинно-однородным основанием.

Доказательство. Первый случай леммы 3.2. Рассмотрим тройку соотношений (6.3) для базиса (6.8)

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_3 &= (1, 0, 0), \\ e_5 &= (0, 1, 0), \\ e_2 &= (A_2, B_2, -z_1 + C_2), \\ e_4 &= (f_4, g_4, h_4). \end{aligned}$$

Из соотношения $[e_4, e_5] = 0$ получаем независимость поля e_4 от переменной z_2 . Соотношение $[e_3, e_4] = qe_3$ означает, что для компонент поля e_4 выполняются следующие равенства:

$$\frac{\partial f_4}{\partial z_1} = q, \quad \frac{\partial g_4}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial h_4}{\partial z_1} = 0,$$

так что $e_4 = (qz_1 + \hat{f}_4(w), \hat{g}_4(w), \hat{h}_4(w))$. Наконец, из $[e_1, e_4] = (1 + q)e_1$ имеем:

$$\frac{\partial \hat{f}_4}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial \hat{g}_4}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial \hat{h}_4}{\partial w} = (1 + q).$$

Это означает, что предыдущая формула для e_4 еще более упростится и примет вид

$$e_4 = (qz_1 + A_4, B_4, (1 + q)w + C_4). \quad (6.13)$$

На третьем шаге применения общей схемы в этом случае рассмотрим коммутатор $[e_2, e_4] = e_2$ для полей e_2, e_4 , заданных, соответственно, формулами (6.7) и (6.13). Имеем здесь векторное равенство

$$A_2(q, 0, 0) + (-z_1 + C_2)(0, 0, 1 + q) - (qz_1 + A_4)(0, 0, -1) = (A_2, B_2, -z_1 + C_2).$$

Из отдельных компонент этого равенства получаем:

$$A_2q = A_2, \quad 0 = B_2, \quad (-z_1 + C_2)(1 + q) + (qz_1 + A_4) = -z_1 + C_2.$$

Это означает, что

$$A_2(q - 1) = 0, \quad B_2 = 0, \quad A_4 = -qC_2.$$

Первое из этих равенств порождает два типа базисов в случае 1, а именно базисы

$$\begin{array}{ll} e_1 = (0, 0, 1), & e_1 = (0, 0, 1), \\ e_3 = (1, 0, 0), & e_3 = (1, 0, 0), \\ e_5 = (0, 1, 0), & \text{и} \quad e_5 = (0, 1, 0), \\ e_2 = (0, 0, -z_1 + C_2), & e_2 = (A_2, 0, -z_1 + C_2), \\ e_4 = (q(z_1 - C_2), B_4, (1 + q)w + C_4) & e_4 = (z_1 - C_2, B_4, 2w + C_4). \end{array}$$

Отметим, впрочем, что первый тип из-за наличия в базисе векторов $e_1 = (0, 0, 1)$, $e_2 = (0, 0, -z_1 + C_2)$ приводит к независимости определяющей функции изучаемых поверхностей от переменной w , а значит, к их вырожденности по Леви. Поэтому имеет смысл рассмотрение лишь второго типа, удовлетворяющего условию $q = 1$. Располагая поля базиса естественным образом и производя сдвиги переменных

$$z_1^* = z_1 - C_2, \quad w^* = w - \frac{C_4}{2},$$

получим (после отбрасывания знаков «*») базис

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_2 &= (A_2, 0, -z_1), \\ e_3 &= (1, 0, 0), \\ e_4 &= (z_1, B_4, 2w), \\ e_5 &= (0, 1, 0). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Замечание 6.1. Можно считать, что здесь параметры A_2 и B_4 чисто мнимые (за счет рассмотрения вместо полей e_2, e_4 их линейных комбинаций, соответственно, с полями e_3 и e_5). Введем для них упрощенные обозначения: $A_2 = ia, B_4 = ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ясно, что любая интегральная поверхность алгебры с базисом (6.14) является трубчатой поверхностью, уравнение которой $\Phi(y_1, y_2, v) = 0$ не зависит от вещественных координат x_1, x_2, u и может быть записано в виде

$$v = F(y_1, y_2).$$

Содержательная часть системы (двух оставшихся) уравнений в частных производных, отвечающая такой алгебре, имеет, как несложно проверить, следующий вид

$$a \frac{\partial F}{\partial y_1} + y_1 = 0, \quad y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + b \frac{\partial F}{\partial y_2} - 2F = 0.$$

Ее интегрирование не представляет большого труда. Случай $a = 0$, в котором поля e_1 и e_2 пропорциональны, мы не рассматриваем. При $a \neq 0$ из первого уравнения получаем

$$F = -\frac{1}{2a} y_1^2 + G(y_2)$$

с произвольной аналитической функцией $G(y_2)$. Подстановка этой формулы во второе уравнение системы дает нам ОДУ

$$bG'(y_2) = 2G(y_2),$$

имеющее общим решением функцию $G(y_2) = Ce^{(2/b)y_2}$ с произвольной константой C . Тогда с точностью до очевидных растяжений комплексных переменных все невырожденные по Леви однородные поверхности, отвечающие алгебрам с базисами случая 1, совпадают с трубками

$$v = y_1^2 \pm e^{y_2}. \quad (6.15)$$

Обе эти поверхности, как известно (см., например, [6, 19]), являются сферическими, т.е. каждая из них голоморфно эквивалентна одной из (аффинно-однородных) квадрик (1.1).

Второй случай леммы 3.2. В данном случае рассмотрения можно начинать с базиса

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_3 &= (1, 0, 0), \\ e_5 &= (A_5, 0, -A_5 z_2 + C_5), \\ e_2 &= (0, 1, -z_1), \\ e_4 &= (f_4, g_4, h_4), \end{aligned}$$

полученного при рассмотрении алгебры $\mathfrak{m}_{24}$ (за счет использования трех «универсальных» коммутационных соотношений).

Далее рассмотрим три коммутатора $[e_1, e_4], [e_3, e_4], [e_4, e_5]$. Из соотношения $[e_1, e_4] = (1+q)e_1$ имеем формулу

$$e_4 = (f_4(z), g_4(z), (1+q)w + h_4(z)). \quad (6.16)$$

Равенство $[e_3, e_4] = qe_3$ позволяет уточнить формулу (6.16) до вида

$$e_4 = (qz_1 + \hat{f}_4(z_2), \hat{g}_4(z_2), (1+q)w + \hat{h}_4(z_2)).$$

Тогда коммутатор $[e_4, e_5] = 0$ дает нам векторное равенство

$$\hat{g}_4(0, 0, -A_5) - A_5(q, 0, 0) - (-A_5 z_2 + C_5)(0, 0, 1+q) = (0, 0, 0).$$

Вторая компонента этого равенства выполняется тождественно, а первая и третья имеют вид

$$A_5 q = 0, \quad -g_4 A_5 + (1+q)(A_5 z_2 - C_5) = 0.$$

Заметим, что при $A_5 = 0$ наличие пары полей $e_1 = (1, 0, 0)$ и $e_5 = (0, 0, C_5)$ гарантированно сводит обсуждение либо к неполному рангу алгебры, либо к вырождению по Леви интегральной поверхности. Интересуясь только невырожденным случаем, можно считать поэтому, что

$$q = 0, \quad e_4 = \left(\hat{f}_4(z_2), z_2 - \frac{C_5}{A_5}, w + \hat{h}_4(z_2) \right).$$

Последний коммутатор $[e_2, e_4] = e_2$ дает теперь очередное векторное ограничение

$$(\hat{f}'_4, 1, \hat{h}'_4) - z_1(0, 0, 1) - \hat{f}_4(0, 0, -1) = (0, 1, -z_1). \quad (6.17)$$

Из него следует, что

$$\hat{f}_4 = A_4 = \text{const}, \quad \hat{h}_4 = -A_4 z_2 + C_4$$

с некоторыми комплексными константами A_4, C_4 , а еще одно тождественное скалярное равенство $1 = 1$ составляет третью компоненту (6.17).

В итоге после сдвигов $z_2^* = z_2 - C_5/A_5$, $w^* = w + C_4^*$ мы получаем (отбрасывая знаки «*») следующий вид базиса алгебры $\mathfrak{m}_{25}$ во втором случае:

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_3 &= (1, 0, 0), \\ e_5 &= (A_5, 0, -A_5 z_2), \\ e_2 &= (0, 1, -z_1), \\ e_4 &= (A_4, z_2, w - A_4 z_2). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Любая такая алгебра оказывается аффинной и, следовательно, все интегральные поверхности таких алгебр являются *аффинно-однородными*. Этого достаточно для подтверждения справедливости теоремы 1.1 в рассматриваемом случае 2 семейства алгебр $\mathfrak{m}_{25}$.

Прокомментируем кратко решение системы трех уравнений в частных производных, соответствующей алгебре Ли с таким базисом и уравнениям искомых однородных поверхностей вида $v = F(y_1, x_2, y_2)$. После разложения коэффициентов A_4, A_5 на вещественные и мнимые части $A_k = a_k + ib_k$ ($a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 4, 5$) эта система принимает вид

$$b_5 \frac{\partial F}{\partial y_1} + (b_5 x_2 + a_5 y_2) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -y_1, \quad b_4 \frac{\partial F}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} = F - (b_4 x_2 + a_4 y_2). \quad (6.19)$$

Подробную процедуру решения этой системы мы здесь не приводим. Отметим лишь, что наиболее значимым среди ее коэффициентов является b_5 : при нулевом значении этого коэффициента однородные поверхности, связанные с базисом (6.18) и системой (6.19), являются вырожденными по Леви. При ненулевом b_5 в процессе решения системы возникает параметр $R = a_5/b_5$, входящий в итоговую формулу для уравнений искомых однородных поверхностей. После простейших аффинных замен переменных эта формула приобретет вид

$$v = y_1(x_2 - Ry_2) + y_2 \ln y_2. \quad (6.20)$$

Однако квадратичная замена переменной $w^* = w - z_1 z_2$ преобразует уравнение (6.20) в

$$v + x_1 y_2 + x_2 y_1 = y_1(x_2 - Ry_2) + y_2 \ln y_2 \iff v = -y_2(x_1 + Ry_1) + y_2 \ln y_2.$$

Еще одно аффинное преобразование $z_1^* = -(i + R)z_1$ превращает его в уравнение

$$v = y_1 y_2 + y_2 \ln y_2$$

индефинитной аффинно-однородной трубки, имеющей семимерную алгебру симметрий. На этом доказательство предложения 6.2 завершено. $\square$

6.3. Алгебра $\mathfrak{m}_{26}$. Коммутационные соотношения в алгебре $\mathfrak{m}_{26}$ имеют вид

$$[e_1, e_4] = 2pe_1, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_4] = pe_2 - e_3, \quad [e_3, e_4] = e_2 + pe_3 \quad (p \geq 0).$$

Предложение 6.3. *Любая пятимерная Леви-невыврожденная орбита голоморфной реализации любой алгебры из семейства $\mathfrak{m}_{26}$ является сферической поверхностью.*

Доказательство. Первый случай леммы 3.2. Здесь удобно считать, что все три поля e_1, e_3, e_5 выпрямлены до состояния

$$e_1 = (0, 0, 1), \quad e_3 = (0, 1, 0), \quad e_5 = (1, 0, 0).$$

Такой их вид означает, в частности, что все обсуждаемые в этом случае интегральные поверхности алгебры $\mathfrak{m}_{26}$ являются трубчатыми поверхностями.

Для упрощения вида двух оставшихся полей (и, тем самым, для получения формул, описывающих основания обсуждаемых трубок) воспользуемся коммутационными соотношениями, имеющимися в алгебре $\mathfrak{m}_{26}$. Так, из поочередного рассмотрения коммутаторов

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_2, e_5] = 0, \quad [e_2, e_3] = e_1$$

получаем для поля e_2 , имевшего первоначально общий вид

$$e_2 = (f_2(z_1, z_2, w), g_2(z_1, z_2, w), h_2(z_1, z_2, w)),$$

постепенные упрощения. Из равенства

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial w}, \frac{\partial g_2}{\partial w}, \frac{\partial h_2}{\partial w} \right) = (0, 0, 0)$$

имеем

$$e_2 = (f_2(z_1, z_2), g_2(z_1, z_2), h_2(z_1, z_2)).$$

Аналогично, за счет рассмотрения коммутатора $[e_2, e_5] = 0$, компоненты поля e_2 освобождаются от переменной z_1 , так что

$$e_2 = (\hat{f}_2(z_2), \hat{g}_2(z_2), \hat{h}_2(z_2)).$$

Тогда из $[e_2, e_3] = e_1$ получаем

$$-(\hat{f}_2'(z_2), \hat{g}_2'(z_2), \hat{h}_2'(z_2)) = (0, 0, 1),$$

откуда

$$e_2 = (A_2, B_2, -z_2 + C_2) \tag{6.21}$$

с некоторыми комплексными константами A_2, B_2, C_2 . Аналогичное поочередное рассмотрение тройки коммутаторов

$$[e_1, e_4] = 2pe_1, \quad [e_4, e_5] = 0, \quad [e_3, e_4] = e_2 + pe_3$$

упрощает поле e_4 до вида

$$e_4 = \left(A_2 z_2 + A_4, (p + B_2)z_2 + B_4, 2pw - \frac{1}{2}z_2^2 + C_2 z_2 + C_4 \right). \tag{6.22}$$

В самом деле, сначала получаем

$$e_4 = (f_4(z_1, z_2), g_4(z_1, z_2), 2pw + h_4(z_1, z_2)).$$

Затем из соотношения $[e_4, e_5] = 0$ имеем

$$e_4 = (\hat{f}_4(z_2), \hat{g}_4(z_2), 2pw + \hat{h}_4(z_2)).$$

Наконец, используя такой вид поля e_4 при рассмотрении коммутатора $[e_3, e_4] = e_2 + pe_3$, приходим к векторному равенству

$$(\hat{f}_4', \hat{g}_4', \hat{h}_4') = (A_2, B_2 + p, -z_2 + C_2).$$

Интегрируя его покомпонентно, получаем (6.22).

Остается рассмотреть последнее коммутационное соотношение $[e_2, e_4] = pe_2 - e_3$ для полученных полей e_2 и e_4 , т.е.

$$\begin{aligned} B_2(A_2, p + B_2, -z_2 + C_2) + (-z_2 + C_2)(0, 0, 2p) - ((p + B_2)z_2 + B_4)(0, 0, -z_2 + C_2) = \\ = (pA_2, pB_2 - 1, p(-z_2 + C_2)). \end{aligned}$$

В трех отдельных компонентах этого векторного равенства получаем

$$\begin{aligned} B_2 A_2 &= pA_2, \quad B_2(p + B_2) = pB_2 - 1, \\ B_2(-z_2 + C_2) + 2p(-z_2 + C_2) + ((p + B_2)z_2 + B_4) &= p(-z_2 + C_2) \end{aligned}$$

или

$$B_2^2 = -1, \quad A_2(B_2 - p) = 0, \quad B_4 = -C_2(B_2 + p). \tag{6.23}$$

Таким образом, в первом случае базис голоморфной реализации алгебры $\mathfrak{m}_{26}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_2 &= (0, i\varepsilon, -z_2 + C_2), \\ e_3 &= (0, 1, 0), \\ e_4 &= (A_4, (p + i\varepsilon)(z_2 - C_2), 2pw - (z_2 - C_2)^2/2 + C_4^*), \\ e_5 &= (1, 0, 0), \end{aligned}$$

где $C_4^* = C_4 + C_2^2/2$, $\varepsilon = \pm 1$.

Осуществим сдвиг переменной $z_2 - C_2 = z_2^*$ и отбросим знак «*» у этой переменной и у коэффициента C_4^* . С учетом чисто мнимого характера коэффициентов $A_4 = ia_4$, $C_4 = ic_4$, получаем существенно упрощенный вид такого базиса:

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_2 &= (0, i\varepsilon, -z_2), \\ e_3 &= (0, 1, 0), \\ e_4 &= (ia_4, (p + i\varepsilon)z_2, 2pw - z_2^2/2 + ic_4), \\ e_5 &= (1, 0, 0). \end{aligned} \tag{6.24}$$

Система уравнений в частных производных, отвечающая двум нетривиальным полям из набора (6.24) и уравнению $v = F(y_1, y_2)$ любой искомой трубчатой поверхности, имеет вид

$$\varepsilon \frac{\partial F}{\partial y_2} = -y_2, \quad a_4 \frac{\partial F}{\partial y_1} + (\varepsilon x_2 + py_2) \frac{\partial F}{\partial y_2} = 2pF - x_2 y_2 + c_4. \tag{6.25}$$

Заметим, что группа слагаемых из второго уравнения, содержащих множителем x_2 , удаляется из него за счет использования первого уравнения. Еще одно соображение касается обращения в нуль хотя бы одного из двух коэффициентов a_4 или p этого уравнения. В каждом из этих случаев интегральная поверхность обсуждаемой алгебры Ли, отвечающая решениям системы (6.25), оказывается, как несложно проверить, вырожденной по Леви. При ненулевых a_4 и p решение системы (6.25) также не представляет сложностей. Сначала получаем

$$F = -\frac{\varepsilon}{2} y_2^2 + G(y_1).$$

Функция $G(y_1)$ с точностью до постоянного слагаемого равна $\exp(2py_1/a_4)$. Это означает, что уравнения невырожденных однородных поверхностей, отвечающих первому случаю для алгебры $\mathfrak{m}_{26}$, имеют (с точностью до тривиальных аффинных преобразований) вид

$$v = y_2^2 \pm e^{y_1}.$$

Как было отмечено выше (см. формулу (6.15)), такие поверхности являются сферическими.

Замечание 6.2. Совпадение (с точностью до голоморфной эквивалентности) интегральных поверхностей, отвечающих разным пятимерным алгебрам $\mathfrak{m}_{25}$ и $\mathfrak{m}_{26}$, вполне объяснимо. Обе эти алгебры являются подалгебрами 15-мерных алгебр квадрат (1.1).

Второй случай леммы 3.2. Здесь мы воспользуемся тем, что у любой алгебры со структурой $\mathfrak{m}_{26}$ можно указать две различные абелевы подалгебры. Помимо обсуждавшейся выше линейной оболочки $\langle e_1, e_3, e_5 \rangle$ абелевой подалгеброй является и $\langle e_1, e_2, e_5 \rangle$. Поэтому, имея упрощенный до вида

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_5 &= (1, 0, 0), \\ e_3 &= (\hat{f}_3, 0, \hat{h}_3) \end{aligned}$$

базис одной из этих двух подалгебр, обсудим дополнительное упрощение поля e_2 . Из двух соотношений

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_2, e_5] = 0$$

легко получается следующее представление:

$$e_2 = (\hat{f}_2, \hat{g}_2, \hat{h}_2).$$

Если при этом функция $\hat{g}_2(z_2)$ тождественно равна нулю (в некоторой окрестности начала координат), то все интегральные поверхности алгебры с таким базисом оказываются вырожденными.

Рассматривая случай алгебр с невырожденными интегральными поверхностями, будем считать что $\hat{g}_2(0) \neq 0$. Тогда, пользуясь техникой, предложенной в [16], выпрямим поле e_2 до состояния

$$e_2 = (0, 1, 0) = \frac{\partial}{\partial z_2}. \quad (6.26)$$

Выпрямленные поля e_1, e_5 , а также поле e_3 сохранят при этом свой упрощенный вид.

Дальнейшие упрощения базиса проводим по стандартной схеме. Из равенства $[e_2, e_3] = e_1$ с учетом (6.26) получим представление поля

$$e_3 = (A_3, 0, z_2 + C_3).$$

Рассматривая теперь коммутаторы $[e_1, e_4] = 2pe_1$, $[e_4, e_5] = 0$ с участием поля e_4 , имеем

$$e_4 = (\hat{f}_4, \hat{g}_4, 2pw + \hat{h}_4).$$

Тогда равенство $[e_2, e_4] = pe_2 - e_3$ означает, что

$$(\hat{f}'_4, \hat{g}'_4, \hat{h}'_4) = (-A_3, p, -(z_2 + C_3)),$$

так что

$$e_4 = \left(-A_3 z_2 + A_4, pz_2 + B_4, 2pw - \frac{1}{2}(z_2 + C_3)^2 + C_4 \right).$$

Остается теперь заметить, что последнее из имеющихся в обсуждаемой алгебре коммутационных соотношений

$$[e_3, e_4] = e_2 + pe_3 \quad (6.27)$$

является в такой ситуации противоречивым, так как вторая компонента векторного равенства (6.27) имеет вид $0 = 1$. Это противоречие означает, что во втором случае алгебры со структурой $\mathfrak{m}_{26}$ не имеют реализаций с невырожденными по Леви однородными гиперповерхностями. Предложение 6.3 доказано. $\square$

7. Голоморфные реализации алгебры $\mathfrak{m}_{27}$. Алгебра $\mathfrak{m}_{27}$ с четырьмя нетривиальными коммутационными соотношениями

$$[e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2, \quad [e_1, e_4] = -e_2, \quad [e_2, e_4] = e_1$$

имеет абелев идеал $\langle e_1, e_2, e_5 \rangle$. Выпрямление полей и рассмотрение связанных с ним двух случаев мы начнем именно с базисной тройки этого идеала.

Предложение 7.1. *Любая пятимерная Леви-невырожденная орбита голоморфной реализации алгебры $\mathfrak{m}_{27}$ либо является индефинитной сферической поверхностью, либо голоморфно эквивалентна одной из поверхностей семейства*

$$v = \alpha \arg(y_1 + iy_2) + \ln(y_1^2 + y_2^2), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (7.1)$$

Замечание 7.1. Индефинитные аффинно-однородные поверхности (7.1) имеются в известном списке [20]. Отметим, кроме того, что размерность максимальной алгебры голоморфных векторных полей, связанной с каждой из этих поверхностей, равна 7 (см. [21]).

Доказательство предложения 7.1.

Первый случай леммы 3.2. Считаем, что все три поля e_1, e_2, e_5 выпрямлены до состояния

$$e_1 = (0, 0, 1), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_5 = (1, 0, 0). \quad (7.2)$$

Из поочередного рассмотрения коммутаторов

$$[e_1, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_5] = 0, \quad [e_2, e_3] = e_2$$

получаем постепенные упрощения поля e_3 :

$$\begin{aligned} e_3 &= (f_3(z_1, z_2), g_3(z_1, z_2), w + h_3(z_1, z_2), \\ e_3 &= (\hat{f}_3(z_2), \hat{g}_3(z_2), w + \hat{h}_3(z_2)), \\ e_3 &= (A_3, z_2 + B_3, w + C_3) \end{aligned}$$

с некоторыми комплексными константами A_3, B_3, C_3 . Аналогичное рассмотрение тройки коммутаторов

$$[e_1, e_4] = -e_2, \quad [e_4, e_5] = 0, \quad [e_2, e_4] = e_1$$

приводит к формуле

$$e_4 = (A_4, -w + B_4, z_2 + C_4).$$

Из последнего имеющегося в алгебре $\mathfrak{m}_{27}$ соотношения $[e_3, e_4] = 0$ выводятся равенства

$$C_3 + B_4 = 0, \quad B_3 - C_4 = 0$$

и очередное упрощение пары полей e_3 и e_4 :

$$e_3 = (A_3, z_2 + B_3, w + C_3), \quad e_4 = (A_4, -(w + C_3), z_2 + B_3).$$

После сдвига переменных $z_2^* = z_2 + B_3$, $w^* = w + C_3$ набор базисных полей алгебры $\mathfrak{m}_{27}$ примет вид

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_2 &= (0, 1, 0), \\ e_5 &= (1, 0, 0), \\ e_3 &= (A_3, z_2, w), \\ e_4 &= (A_4, -w, z_2). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Рассматривая при этом вместо полей e_3, e_4 их комбинации с полем e_5 , можно считать константы A_3, A_4 в (7.3) чисто мнимыми. Обозначим для удобства $A_3 = ia_3$, $A_4 = ia_4$ ($a_3, a_4 \in \mathbb{R}$).

Любая орбита алгебры с базисом (7.3), очевидно, является трубчатой. Основание такой трубки является аффинно однородным (в силу коммутирования полей e_3 и e_4) и удовлетворяет следующей достаточно простой системе двух уравнений в частных производных относительно определяющей функции $v = F(y_1, y_2)$:

$$a_3 \frac{\partial F}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} = F, \quad a_4 \frac{\partial F}{\partial y_1} - F \frac{\partial F}{\partial y_2} = y_2. \tag{7.4}$$

Отметим, что при одновременном обращении в нуль обоих коэффициентов a_3, a_4 любая интегральная поверхность алгебры (7.3) является вырожденной в силу леммы 3.4. Рассмотрение ненулевых наборов (a_3, a_4) естественно разделить (за счет возможного растяжения переменной z_1) на два подслучая: (i) $a_3 = 0$, $a_4 = 1$ и (ii) $a_3 = 1$, $a_4 \in \mathbb{R}$.

В первом из них стандартным методом последовательного решения отдельных уравнений системы (7.4) приходим к уравнению сферической (см. [6]) однородной поверхности

$$v = y_2 \operatorname{tg} y_1. \tag{7.5}$$

Во втором подслучае аналогично получаем более сложное уравнение (7.1).

Замечание 7.2. Уравнение (7.5) легко преобразуется в $y_1 = \operatorname{arctg}(v/y_2)$ или, с точностью до переобозначения переменных, в полученное в (5.12) уравнение поверхности $v = \arg(y_1 + iy_2)$.

Замечание 7.3. С точностью до голоморфных преобразований полученные в первом случае невырожденные орбиты алгебры $\mathfrak{m}_{27}$ можно объединить в семейство

$$v = \alpha \arg(y_1 + iy_2) + \beta \ln(y_1^2 + y_2^2),$$

элементы которого описываются одномерным проективным параметром $(\alpha : \beta)$.

Второй случай леммы 3.2. Тройку базисных полей абелева идеала алгебры $\mathfrak{m}_{27}$ представим в виде

$$e_1 = (0, 0, 1), \quad e_2 = (1, 0, 0), \quad e_5 = (\hat{f}_5, 0, \hat{h}_5).$$

Для (частичного) упрощения поля e_3 обсуждаемой алгебры рассмотрим два коммутационных соотношения

$$[e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2.$$

Из них следует, что

$$e_3 = (z_1 + \hat{f}_3(z_2), \hat{g}_3(z_2), w + \hat{h}_3(z_2)).$$

Отметим при этом, что тождественное обращение в нуль функции $\hat{g}_3(z_2)$ означало бы наличие в обсуждаемой алгебре четверки базисных (а потому линейно независимых) полей с тождественно нулевыми вторыми компонентами. Это приводит (согласно лемме 3.4) к вырождению по Леви любой интегральной поверхности обсуждаемой алгебры Ли. Поэтому далее можно считать (возможно, после сдвига начала координат), что $\hat{g}_3(0) \neq 0$. В такой ситуации мы упростим поле e_3 . Пользуясь техникой [16] (см. замечание 3.2), голоморфной заменой его можно привести к виду $e_3 = (z_1, 1, w)$. При этом вид выпрямленных полей e_1, e_2 , а также упрощенный вид поля e_5 сохраняются. Более того, из коммутационного соотношения $[e_3, e_5] = 0$ теперь следует, что

$$(\hat{f}'_5, 0, \hat{h}'_5) - \hat{f}_5(1, 0, 0) - \hat{h}_5(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

или

$$e_5 = (A_5 e^{z_2}, 0, C_5 e^{z_2})$$

с некоторыми комплексными коэффициентами A_5, C_5 .

Далее обсудим четыре оставшихся коммутатора в алгебре $\mathfrak{m}_{27}$. Все они содержат в качестве множителя e_4 и имеют вид

$$[e_1, e_4] = -e_2, \quad [e_2, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = 0, \quad [e_4, e_5] = 0. \quad (7.6)$$

Из первой тройки этих соотношений следует, что

$$e_4 = (-w + A_4 e^{z_2}, B_4, z_1 + C_4 e^{z_2})$$

с некоторыми комплексными коэффициентами A_4, B_4, C_4 . Тогда последнее соотношение из (7.6) означает, что

$$B_4(A_5 e^{z_2}, 0, C_5 e^{z_2}) - A_5 e^{z_2}(0, 0, 1) - C_5 e^{z_2}(-1, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

Из двух содержательных компонент этого векторного равенства получаем итоговые ограничения на коэффициенты пары полей e_4, e_5 :

$$B_4 A_5 + C_5 = 0, \quad B_4 C_5 - A_5 = 0 \quad \text{или} \quad B_4^2 = -1, \quad C_5 = -B_4 A_5.$$

В итоге набор пяти базисных полей алгебры $\mathfrak{m}_{27}$ имеет во втором случае вид

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_2 &= (1, 0, 0), \\ e_3 &= (z_1, 1, w), \\ e_4 &= (-w + A_4 e^{z_2}, i\varepsilon, z_1 + C_4 e^{z_2}), \\ e_5 &= (A_5 e^{z_2}, 0, -i\varepsilon A_5 e^{z_2}) \end{aligned} \quad (7.7)$$

с некоторыми комплексными коэффициентами A_4, C_4, A_5 ($A_5 \neq 0$), $\varepsilon = \pm 1$.

Этот вид можно еще упростить несложными голоморфными преобразованиями. Во-первых, представим ненулевой коэффициент A_5 в тригонометрической форме $A_5 = r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$. Рассматривая тогда вместо поля e_5 пропорциональное ему поле $(1/r)e_5$, мы сможем записать его в виде

$$e_5 = (e^{z_2+it}, 0, -i\varepsilon e^{z_2+it}).$$

Сдвиг переменной $z_2^* = z_2 + it$ переводит это поле в $e_5 = (e^{z_2}, 0, -i\varepsilon e^{z_2})$ и сохраняет вид остальных полей базиса (7.7) (с измененными значениями коэффициентов A_4, C_4).

Еще одной, экспоненциальной, заменой $z_2^* = e^{z_2}$ алгебра с базисом (7.7) превращается в алгебру аффинных векторных полей с базисом

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1), \\ e_2 &= (1, 0, 0), \\ e_3 &= (z_1, z_2, w), \\ e_4 &= (-w + A_4 z_2, i\varepsilon z_2, z_1 + C_4 z_2), \\ e_5 &= (z_2, 0, -i\varepsilon z_2). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Кроме того, рассматривая вместо поля e_4 комбинацию $e_4 - (\operatorname{Im} A_4)e_5$, коэффициент A_4 в формулах (7.8) можно считать чисто мнимым. Тем самым, любая интегральная поверхность алгебры $\mathfrak{m}_{27}$, реализованной по схеме второго случая, является (с точностью до голоморфных преобразований) *аффинно однородной поверхностью*. Этим утверждением завершается доказательство предложения 7.1 и основной теоремы 1.1. $\square$

Приведем здесь описание процедуры интегрирования алгебр (7.8) и вывод о получаемых при этом однородных поверхностях.

Предложение 7.2. *При произвольных значениях параметров A_4, C_4 любая интегральная поверхность алгебры (7.8) голоморфно эквивалентна индефинитной квадратике*

$$v = |z_1|^2 - |z_2|^2.$$

Доказательство. Выделим, прежде всего, вещественные и мнимые части коэффициентов набора полей (7.8). С учетом сказанного, можно представить эти коэффициенты в виде

$$A_4 = ib_4, \quad C_4 = c_4 + id_4,$$

где $b_4, c_4, d_4 \in \mathbb{R}$. Как и ранее, определяющую функцию любой искомой поверхности (интегральной для произвольной алгебры с базисом вида (7.8)) считаем имеющей вид $v = F(y_1, x_2, y_2)$. Содержательная система уравнений в частных производных, связанная с нахождением этой функции, определяется тремя полями e_3, e_4, e_5 :

$$\begin{aligned} e_3 : \quad & y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} = F, \\ e_4 : \quad & (-F + b_4 x_2) \frac{\partial F}{\partial y_1} - \varepsilon y_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \varepsilon x_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} = y_1 + d_4 x_2 + c_4 y_2, \\ e_5 : \quad & y_2 \frac{\partial F}{\partial y_1} = -\varepsilon x_2. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Решение уравнения, отвечающего полю e_3 , имеет вид

$$F = y_1 G\left(\frac{x_2}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}\right).$$

Аналитическая функция $G(t_1, t_2)$ определяется далее из e_5 -уравнения в виде

$$G = -\frac{t_1}{t_2} + t_1 \varphi\left(\frac{t_1}{t_2}\right),$$

где $\varphi(\xi)$ — произвольная аналитическая функция. Ее мы находим из последнего уравнения системы (7.9), которое с учетом введения новых переменных принимает вид

$$(1 + \xi^2)\varphi'(\xi) + \left(\frac{1}{\xi} - \xi\right)\varphi(\xi) = b_4 \frac{1}{\xi} + \varepsilon d_4 + \varepsilon c_4 \xi.$$

Вводя вспомогательные параметры

$$P = \frac{1}{2}(b_4 + \varepsilon c_4), \quad R = \frac{1}{2}(b_4 - \varepsilon c_4), \quad D = -\frac{\varepsilon d_4}{2},$$

решение этого ОДУ (которое можно найти как «вручную», так и с помощью пакетов символьной математики) запишем в виде

$$\varphi(\xi) = \left(P \operatorname{arctg} \xi + \frac{R\xi - D}{2(1 + \xi^2)} + N \right) \frac{1 + \xi^2}{\xi},$$

где N — произвольная константа интегрирования. Тогда уравнениями искомых однородных поверхностей являются

$$vy_2 + x_2y_1 = N|z_2|^2 + x_2(Ry_2 + Dx_2) + P|z_2|^2 \arg(z_2). \quad (7.10)$$

Заметим теперь, что это уравнение можно переписать в виде

$$(v - Rx_2 - Ny_2)y_2 + x_2(y_1 - Dx_2 - Nx_2) = P|z_2|^2 \arg(z_2).$$

Тогда замена переменных $z_1^* = z_1 - i(N + D)z_2$, $w^* = w - (N + iR)z_2$ оставляет в правой части уравнения (7.10) лишь одно последнее слагаемое и приводит его к виду

$$vy_2 + x_2y_1 = P|z_2|^2 \arg(z_2). \quad (7.11)$$

При этом можно считать, что параметр P принимает лишь значения 0 или 1, так как умножение переменных z_1 , w на любой ненулевой вещественный множитель равносильно делению на этот множитель правой части уравнения (7.11) (при сохранении его вида).

Остается заметить, что это уравнение имеет индефинитную невырожденную форму Леви. Процедура его приведения к нормальной форме Мозера, относительно легко реализуемая, например, по схеме работы [9], дает тождественно нулевой многочлен N_{220} . Это означает омбиличность поверхности (7.11), то есть ее голоморфную сводимость к квадрике $v = |z_1|^2 - |z_2|^2$. Предложение 7.2 доказано. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акопян Р. С., Лобода А. В. О голоморфных реализациях нильпотентных алгебр Ли// в кн.: Современные методы и проблемы математической гидродинамики–2018/ Междунар. науч. конф. (Воронежский государственный университет, 3–8 мая 2018 г.). — Воронеж: ВГПУ, 2018. — С. 200–204.
2. Атанов А. В., Лобода А. В. Голоморфные реализации разложимых пятимерных алгебр Ли// в кн.: Современные методы теории функций и смежные проблемы/ Воронежская зимняя математическая школа (28 января — 2 февраля 2019 г.). — Воронеж: ВГУ, 2019. — С. 24–26.
3. Атанов А. В., Лобода А. В., Суковых В. И. О голоморфной однородности вещественных гиперповерхностей общего положения в $\mathbb{C}^3$ // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2017. — 298. — С. 20–41.
4. Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий. — М.: Мир, 1967.
5. Ежов В. В., Лобода А. В., Шмалъц Г. Каноническая форма многочлена четвертой степени в нормальном уравнении вещественной гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ // Мат. заметки. — 1999. — 66, № 4. — С. 624–626.
6. Исаев А. В., Мищенко М. А. Классификация сферических трубчатых гиперповерхностей, имеющих в сигнатуре формы Леви один минус// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — 52, № 6. — С. 1123–1153.
7. Лагно В. И., Спичак С. В., Стогний В. И. Симметричный анализ уравнений эволюционного типа. — М.—Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2004.
8. Лобода А. В. О размерности группы, транзитивно действующей на гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ // Функц. анал. прилож. — 1999. — 33, № 1. — С. 68–71.
9. Лобода А. В. Однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2001. — 235. — С. 114–142.
10. Лобода А. В. Однородные строго псевдовыпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии// Мат. сб. — 2001. — 192, № 12. — С. 3–24.
11. Лобода А. В. Всякая голоморфно-однородная трубка в $\mathbb{C}^2$ имеет аффинно-однородное основание// Сиб. мат. ж. — 2001. — 42, № 6. — С. 1335–1339.
12. Лобода А. В. Об определении однородной строго псевдовыпуклой гиперповерхности по коэффициентам ее нормального уравнения// Мат. заметки. — 2003. — 73, № 3. — С. 453–456.
13. Мубаракзянов Г. М. О разрешимых алгебрах Ли// Изв. вузов. Мат. — 1963. — № 1. — С. 114–123.

14. *Мубаракзянов Г. М.* Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка// Изв. вузов. Мат. — 1963. — № 3. — С. 99–106.
15. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Функции нескольких переменных. — М.: Наука, 1985.
16. *Beloshapka V. K., Kossovskiy I. G.* Homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, associated with a model CR-cubic// J. Geom. Anal. — 2010. — 20, № 3. — P. 538–564.
17. *Cartan E.* Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes: I// Ann. Math. Pura Appl. — 1932. — 11, № 4. — P. 17–90.
18. *Chern S. S., Moser J. K.* Real hypersurfaces in complex manifolds// Acta Math. — 1974. — 133. — P. 219–271.
19. *Dadok J., Yang P.* Automorphisms of tube domains and spherical hypersurfaces// Am. J. Math. — 1985. — 107, № 4. — P. 999–1013.
20. *Doubrov B., Komrakov B., Rabinovich M.* Homogeneous surfaces in the three-dimensional affine geometry// in: Geometry and Topology of Submanifolds. — World Scientific, 1996. — 8. — P. 168–178.
21. *Doubrov B., Medvedev A., The D.* Homogeneous Levi nondegenerate hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ / [arXiv: 1711.02389v1](#).
22. *Fels G., Kaup W.* Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5// Acta Math. — 2008. — 201. — P. 1–82.

Артём Викторович Атанов

Воронежский государственный университет

E-mail: atanov.cs@gmail.com

Александр Васильевич Лобода

Воронежский государственный технический университет

E-mail: lobvgasu@yandex.ru